

1. ΘΕΜΑ_2_21260

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y - 2x = 0$ και τα σημεία $B(1,1)$ και $\Gamma(-1,3)$.

- α) Να δείξετε ότι το σημείο $A(5,10)$ ανήκει στην ευθεία (ε) .
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{AB}$ και $\overline{A\Gamma}$.
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

2. ΘΕΜΑ_2_20926

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): x - 2y = 1$ και τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,0)$.

- α) Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία (ε) ενώ το σημείο A δεν είναι σημείο της (ε) .
- β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) .
- γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του A από το B και να αποδείξετε ότι η προβολή του A στην ευθεία (ε) είναι το B .

3. ΘΕΜΑ_2_20864

Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): 2x + y - 6 = 0$ και $(\varepsilon_2): 2x + y + 2 = 0$.

- α) Να δείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες.
- β) i. Να δείξετε ότι το σημείο $A(0,6)$ ανήκει στην ευθεία (ε_1) .
- ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών (ε_1) και (ε_2) .

4. ΘΕΜΑ_2_18733

Δίνονται τα σημεία $A(4,3)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(6,0)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{AB}$ και $\overline{A\Gamma}$.
- β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overline{AB}$ και $\overline{A\Gamma}$ είναι κάθετα.
- γ) Δίνεται το σημείο $M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $(MA) = (MB)$.

5. ΘΕΜΑ_2_20885

Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-3,-1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .
- β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, είναι: $E = 8$.

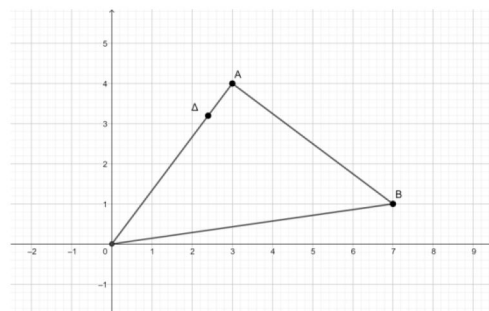
6. ΘΕΜΑ_2_18979

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 2x + 3y = 5$ και $(\varepsilon_2): 4x + 6y = 8$.

- α) Να δείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι παράλληλες.
 β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,1)$ είναι σημείο της ευθείας (ε_1) .
 γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε_2) .

7. ΘΕΜΑ_2_17805

Δίνεται το τρίγωνο AOB με $A(3,4)$, $B(7,1)$, O η αρχή των αξόνων και το σημείο $\Delta\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$ της πλευράς AO .



- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{AD}$.

- β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$.

- γ) Δίνεται ότι $(OAB) = \frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. Να δείξετε ότι $(ADB) = \frac{1}{5}(OAB)$.

8. ΘΕΜΑ_2_15440

Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$, $\Gamma(1,1)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$.
 β) i. Να εξετάσετε αν τα σημεία A , B και Γ ορίζουν τρίγωνο.
 ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

9. ΘΕΜΑ_2_16425

Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): y = \frac{2}{3}x + 1$ και $(\varepsilon_2): x = \frac{2}{3}y + 9$.

- α) Να αποδείξετε ότι: $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$.
 β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών (ε_1) και (ε_2) .

10. ΘΕΜΑ_2_18240

Δίνεται το σημείο $A(1,2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 3$.

- α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) .
 β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην (ε) .
 γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες $(\eta), (\varepsilon)$.

11. ΘΕΜΑ_2_16774

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(2,5)$, $B(3,6)$, $\Gamma(-1,-2)$.

- α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$.
- β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το A .
- γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$.

12. ΘΕΜΑ_2_16771

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $\Gamma(4,-1)$ και το διάνυσμα $\overline{AB} = (3,-1)$.

- α) Να βρεθεί το σημείο B .
- β) Αν $B(5,0)$:
 - i. Να δείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.
 - ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

13. ΘΕΜΑ_2_16810

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία $A(1,1)$, $B(5,2)$, $\Gamma(0,-2)$, $\Delta(8,0)$.

- α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο.
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπέζιου του ερωτήματος α).

14. ΘΕΜΑ_2_16769

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,7)$, $B(-1,5)$ και $\Gamma(3,3)$.

- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β) Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, τότε να υπολογίσετε:
 - i. τις συντεταγμένες του M ,
 - ii. την εξίσωση της διαμέσου AM .

15. ΘΕΜΑ_2_16759

Δίνονται οι ευθείες (ε_1) , (ε_2) και (ε_3) με εξισώσεις $x - 2y = -1$, $2x + y = 4$ και $y = -1$ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.
- β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$.
- γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε_3) .

16. ΘΕΜΑ_2_16194

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 8x + \psi - 28 = 0$, $(\varepsilon_2): x - \psi + 1 = 0$, $(\varepsilon_3): 3x + 4\psi + 5 = 0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των (ε_1) και (ε_2) .

β) Αν το σημείο τομής είναι το $M(3,4)$ να υπολογίσετε:

i. το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου O η αρχή των αξόνων,

ii. την απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ε_3) .

17. ΘΕΜΑ_3_15152

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3x + y + a = 0$ με $a \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου A από το σημείο B .

β) Για ποιες τιμές του a , η απόσταση AB είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) .

γ) Για $a = 4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$.

18. ΘΕΜΑ_4_22067

Θεωρούμε μία ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x$ με θετική κλίση λ .

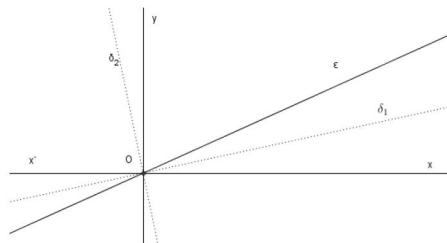
α) Αν δ_1 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_1 είναι:

$$y = \lambda_1 x \quad \text{με} \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}$$

β) Αν δ_2 είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_2 είναι:

$$y = \lambda_2 x \quad \text{με} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 + \lambda^2}}$$

γ) Αν $\lambda = 1$, να εφαρμόσετε τους τύπους του α) ερωτήματος για να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$.



19. ΘΕΜΑ_4_20939

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι τοποθετημένα 7 χωριά ως σημεία του επιπέδου και μια πηγή νερού σε ένα σημείο Π . Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 6 αγωγοί νερού που συνδέουν την πηγή με έξι από τα παραπάνω χωριά. Οι αγωγοί αυτοί ανήκουν στις γραμμές με εξισώσεις της μορφής:

$$(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 2 = 0, \quad \text{με} \quad \lambda \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

α) Να αποδείξετε ότι και οι 6 γραμμές είναι ευθείες.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Π .

γ) Το έβδομο χωριό βρίσκεται στο σημείο $O(0,0)$. Να αποδείξετε ότι κανένας από τους παραπάνω αγωγούς νερού δεν διέρχεται από το χωριό αυτό.

δ) Προκειμένου να έχει πρόσβαση στο νερό το χωριό O , υπάρχουν δύο επιλογές:

1η επιλογή: Να συνδέσουμε απευθείας το χωριό Ο με την πηγή

2η επιλογή: Να συνδέσουμε το χωριό Ο με έναν από τους παραπάνω αγωγούς μέσω της συντομότερης διαδρομής.

Με δεδομένο ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους για κάθε μία από τις παραπάνω επιλογές είναι το ίδιο,

- i. να βρείτε την τιμή του λ για την οποία οι δύο επιλογές οδηγούν στο ίδιο κόστος κατασκευής.
- ii. Πως εξηγείται γεωμετρικά το συμπέρασμα;

20. ΘΕΜΑ_4_20861

Δίνεται το σημείο $M(-2, 2)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) που διέρχονται από το σημείο M .

β) i. Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω εξισώσεις ευθειών σχηματίζουν τρίγωνο με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy .

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) , η οποία διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy , τρίγωνο, με εμβαδόν $E = 8$.

γ) Αν $(\varepsilon_1): y = x + 4$, να βρείτε το μήκος του ύψους του ορθογωνίου τριγώνου, που σχηματίζει η (ε_1) με τους άξονες, το οποίο φέρεται από την κορυφή O .

21. ΘΕΜΑ_4_20728

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ και $(\varepsilon_2): y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια με τον άξονα xx' .

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου $O(0, 0)$, $A(3, \sqrt{3})$, $B(3, 3)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

(Θυμίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από το ημιγινόμενο δύο πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης γωνίας τους).

22. ΘΕΜΑ_4_20724

Η ευθεία (ε) με εξίσωση $x + y - 1 = 0$ του σχήματος, αναπαριστά τη γραμμή ενός σιδηροδρομικού δικτύου που εξυπηρετεί τους κατοίκους δύο πόλεων $A(8, 1)$, $B(-7, 4)$ (για την ακρίβεια A, B είναι τα κεντρικά σημεία των πόλεων από τα οποία μετράμε αποστάσεις). Για το λόγο αυτό θα κατασκευαστεί κατά μήκος της γραμμής (ε) , σταθμός σε ένα σημείο Σ και μία πεζογέφυρα σε ένα

