

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο: ΚΡΟΥΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένα βλήμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα v_0 . Όταν το βλήμα φτάνει στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του εκρήγνυται σε τρία κομμάτια. Αμέσως μετά την έκρηξη, η ολική ορμή και των τριών κομματιών είναι

α) μηδέν.

β) mv_0 .

γ) διάφορη του μηδενός και διάφορη του mv_0 .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Επειδή η έκρηξη διαρκεί πολύ μικρό χρόνο, τυχόν επίδραση εξωτερικών δυνάμεων, όπως εδώ το βάρος, θεωρείται αμελητέα. Συνεπώς στη διάρκεια της έκρηξης η ορμή διατηρείται. Επειδή η κρούση έγινε στο ψηλότερο σημείο, η ταχύτητα του σώματος πριν την έκρηξη είναι μηδέν, άρα και η ορμή του.

Συνεπώς από την αρχή διατήρησης της ορμής προκύπτει: $p_{\text{Τελ}} = p_{\text{Αρχ}} = 0$.

Ερώτηση 2.

Μια σφαίρα Α μάζας m κινούμενη οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $υ$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα Β ίσης μάζας. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Α, λόγω της κρούσης,

- α) έχει ίδια κατεύθυνση με την αρχική ορμή και μέτρο mu .
- β) έχει αντίθετη κατεύθυνση με την αρχική ορμή και μέτρο mu .
- γ) έχει αντίθετη κατεύθυνση με την αρχική ορμή και μέτρο $2mu$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Επειδή οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες και η κρούση είναι κεντρική ελαστική τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Συνεπώς η τελική ορμή της σφαίρας Α θα είναι μηδέν. Η μεταβολή της ορμής της θα είναι:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{Τελ}} - \vec{p}_{\text{Αρχ}} = 0 - \vec{p}_{\text{Αρχ}} = -m \cdot \vec{u}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι το διάνυσμα της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Α θα έχει ίδια διεύθυνση με την αρχική ορμή και αντίθετη φορά (-). Το μέτρο της θα είναι $\Delta p = m \cdot u$.

Ερώτηση 3.

Δύο σώματα με ορμές των οποίων τα μέτρα είναι ίσα ($p_1 = p_2 = p$), κινούνται σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους και συγκρούονται πλαστικά.

Το μέτρο της ορμής του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι ίσο με:

α) p .

β) $2p$.

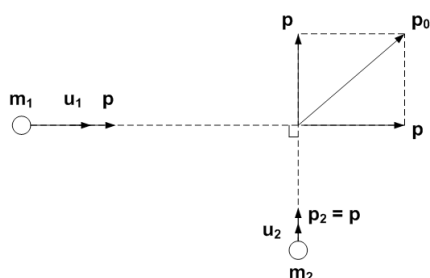
γ) $\sqrt{2}p$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Για την κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής, οπότε: $\vec{p}_{\text{Αρχ}} = \vec{p}_{\text{Τελ}}$. Το μέτρο της ολικής ορμής, p_0 , του συστήματος πριν την κρούση είναι $p_0 = \sqrt{p^2 + p^2} = \sqrt{2}p$.



Άρα $p_{\text{Τελ}} = \sqrt{2}p$.

Ερώτηση 4.

Δύο σώματα με ίσες μάζες ($m_1 = m_2 = m$) και ορμές των οποίων τα μέτρα είναι ίσα ($p_1 = p_2 = p$), κινούνται σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους και συγκρούονται πλαστικά. Αν η κινητική ενέργεια και η ορμή ενός σώματος συνδέονται με τη σχέση

$K = \frac{p^2}{2m}$, τότε η μείωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι ίση με

α) $\frac{p^2}{m}$.

β) $\frac{p^2}{2m}$.

γ) $\frac{p^2}{4m}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

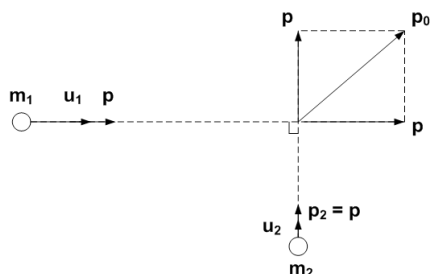
Σωστή απάντηση είναι η β.

$$|\Delta K| = K_1 + K_2 - K_{\text{Συστ}} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_{\text{τελ}}^2}{2(m+m)} \quad (1)$$

Για την κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής, οπότε: $\vec{p}_{\text{Αρχ}} = \vec{p}_{\text{Τελ}}$.

Το μέτρο της ολικής ορμής, p_0 , του συστήματος πριν την κρούση είναι

$$p_0 = \sqrt{p^2 + p^2} = \sqrt{2}p.$$



Άρα $p_{\text{Τελ}} = \sqrt{2}p$.

Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$|\Delta K| = \frac{p^2}{2m} + \frac{p^2}{2m} - \frac{(\sqrt{2}p)^2}{2(m+m)} \Rightarrow |\Delta K| = \frac{p^2}{2m}$$

Ερώτηση 5.

Ένα σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα κάτω και συγκρούεται ελαστικά με οριζόντιο δάπεδο. Αν η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα και u το μέτρο της ταχύτητας του σώματος ελάχιστα πριν την κρούση, τότε η μεταβολή της ταχύτητάς του, λόγω της κρούσης

α) είναι μηδέν.

β) έχει κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα πάνω και μέτρο ίσο με u .

γ) έχει κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα πάνω και μέτρο ίσο με $2u$.

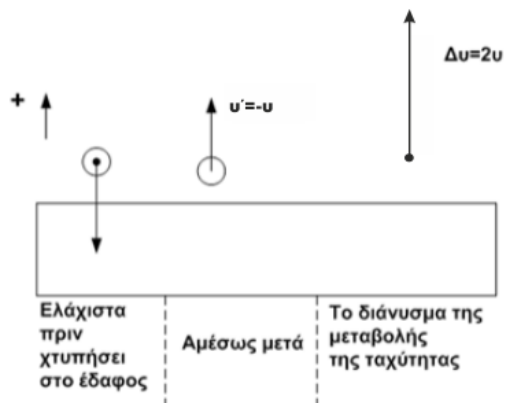
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Επειδή η κρούση είναι ελαστική το σώμα θα αναπηδήσει με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα. Συνεπώς, $\Delta \vec{u} = \vec{u}_\tau - \vec{u}_\alpha$. Αν ορίσουμε θετική φορά προς τα πάνω προκύπτει ότι και το διάνυσμα $\Delta \vec{u}$ θα έχει θετική φορά, το μέτρο του θα είναι:

$$|\Delta \vec{u}| = |\vec{u}_\tau - \vec{u}_\alpha| = u - (-u) = 2u$$



Ερώτηση 6.

Μια σφαίρα Σ_1 , μάζας $m_1 = m$, συγκρούεται κεντρικά πλαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2 , μάζας $m_2 = m$. Στη σφαίρα Σ_1 μετά την κρούση μένει το

- α) 50% της αρχικής ενέργειάς της.
- β) 100% της αρχικής ενέργειάς της.
- γ) 25% της αρχικής ενέργειάς της.

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Με εφαρμογή της διατήρησης της ορμής βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος.

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V, \text{ από όπου προκύπτει } V = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{v_1}{2}.$$

Οπότε η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_1 μετά την κρούση θα είναι:

$$K'_1 = \frac{m_1 V^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{K_1}{4}$$

Όπου K_1 η κινητική της ενέργεια πριν την κρούση,

$$K_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = 4K'_1$$

Συνεπώς το % ποσοστό της ενέργειας που αντιστοιχεί (μένει) στη μάζα m_1 θα είναι:

$$\alpha \% = \frac{K'_1}{K_1} \cdot 100 = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25\%$$

Ερώτηση 7.

Ένα σώμα Α με ορμή μέτρου p και μάζα m συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο σώμα Β, ίδιας μάζας με το Α. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Α είναι ίση με

α) μηδέν.

β) $-\frac{p^2}{2m}$.

γ) $\frac{p^2}{2m}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Επειδή η κρούση είναι ελαστική και τα δύο σώματα έχουν ίδια μάζα, τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Επειδή το σώμα Β είναι αρχικά ακίνητο, το σώμα Α μετά την κρούση θα παραμείνει ακίνητο, κατά συνέπεια η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Α θα είναι ίση με

$$\Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = 0 - \frac{mv^2}{2} \Rightarrow \Delta K = -\frac{m^2 v^2}{2m} \Rightarrow \Delta K = -\frac{p^2}{2m}$$

Ερώτηση 8.

Μια σφαίρα Σ_1 , μάζας $m_1 = m$, συγκρούεται κεντρικά ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2 , μάζας $m_2 = m$. Η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_1 λόγω της κρούσης

α) μετατρέπεται σε θερμότητα που μεταφέρεται στο περιβάλλον.

β) μοιράζεται μεταξύ των δύο σφαιρών.

γ) μεταφέρεται εξολοκλήρου στη σφαίρα Β

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Επειδή η κρούση είναι ελαστική διατηρείται η μηχανική ενέργεια και δεν υπάρχει μεταφορά θερμότητας στο περιβάλλον. Επειδή τα δύο σώματα έχουν ίδια μάζα, λόγω της κρούσης, τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητα. Επειδή το σώμα Β είναι αρχικά ακίνητο, το σώμα Α μετά την κρούση θα παραμείνει ακίνητο, κατά συνέπεια, λόγω της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, όλη η κινητική ενέργεια του σώματος Α θα μεταφερθεί στο σώμα Β.

Ερώτηση 9.

Ένα σώμα Α μάζας $m_1 = 2m$, το οποίο έχει ταχύτητα $\vec{v}_1$ συγκρούεται πλαστικά με σώμα Β μάζας $m_2 = m$. Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο. Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων, $\frac{v_1}{v_2}$, των δύο σωμάτων πριν την κρούση είναι:

α) $\frac{1}{2}$.

β) 2.

γ) 4.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής προκύπτει ότι για να είναι η ορμή του συστήματος πριν την κρούση μηδέν πρέπει το δεύτερο σώμα να κινείται και μάλιστα με ορμή αντίθετη από αυτήν του σώματος Α.

Εφαρμόζουμε την Διατήρησης της Ορμής για την κρούση.

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \Rightarrow m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 0 \Rightarrow 2mv_1 - mv_2 = 0 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

Ερώτηση 10.

Ένα σώμα Α μάζας $m_1 = 2m$, το οποίο έχει κινητική ενέργεια $K_A = K$, συγκρούεται πλαστικά με σώμα Β μάζας $m_2 = m$. Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο. Η μηχανική ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά τη διάρκεια της κρούσης, είναι ίση με

α) $4K$.

β) $\frac{K}{3}$.

γ) $3K$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Αφού το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο όλη η κινητική ενέργεια που είχαν τα σώματα πριν την κρούση μετατρέπεται σε θερμότητα.

$$Q = K_A + K_B \quad (1)$$

Από τη διατήρηση της ορμής προκύπτει:

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \Rightarrow m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 0 \Rightarrow 2mv_1 - mv_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 2v_1$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$Q = K_A + K_B = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \Rightarrow Q = \frac{1}{2}2mv_1^2 + \frac{1}{2}m(2v_1)^2 = mv_1^2 + 2mv_1^2 \Rightarrow$$

$$Q = K + 2K \Rightarrow Q = 3K$$

Ερώτηση 11.

Ένα σώμα Α μάζας m_1 κινούμενο με ταχύτητα v_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα Β μάζας m_2 . Το σώμα Α συνεχίζει μετά την κρούση να κινείται κατά την ίδια φορά με ταχύτητα $v'_1 = \frac{v_1}{2}$. Ο λόγος των μαζών των δύο σωμάτων, $\frac{m_1}{m_2}$, είναι ίσος με

α) 3.

β) 2.

γ) $\frac{1}{3}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Επειδή η κρούση είναι κεντρική ελαστική και το σώμα Β είναι αρχικά ακίνητο, το σώμα Α μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε

$$\frac{v_1}{2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \Rightarrow m_1 + m_2 = 2m_1 - 2m_2 \Rightarrow m_1 = 3m_2$$

Άρα, $\frac{m_1}{m_2} = 3$.

Ερώτηση 12.

Δύο σφαίρες Α και Β, με ίσες μάζες, κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ίδιες κατευθύνσεις και ταχύτητες που έχουν μέτρα $v_1 = 10 \frac{m}{s}$ και $v_2 = 20 \frac{m}{s}$, αντίστοιχα. Οι σφαίρες συγκρούονται χωρίς να δημιουργείται συσσωμάτωμα. Αν μετά την κρούση το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Α είναι $v'_1 = 15 \frac{m}{s}$, τότε η κρούση είναι

α) ελαστική.

β) πλάγια.

γ) ανελαστική.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Επειδή οι σφαίρες κινούνται με ίδιες κατευθύνσεις η κρούση δεν είναι πλάγια.

Ισχύει η διατήρηση της ορμής.

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

Επειδή $m_1 = m_2 = m$ η σχέση γίνεται $v_1 + v_2 = v'_1 + v'_2$, από όπου με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$v'_2 = 15 \frac{m}{s}$$

Ελέγχουμε αν διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος, δηλαδή αν ισχύει

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad \text{ή} \quad v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

$$\text{Όμως } v_1^2 + v_2^2 = 20^2 + 10^2 = 500 \quad \text{και} \quad v_1'^2 + v_2'^2 = 15^2 + 15^2 = 450$$

Άρα, αφού η κινητική ενέργεια δεν διατηρείται η κρούση είναι **ανελαστική***.

*Διόρθωση

Ερώτηση 13.

Σφαίρα Α που κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου v και κινητική ενέργεια K , συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα Β, ίσης μάζας με την Α, που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο. Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι ίση με

α) $0,25K$.

β) $0,5K$.

γ) $0,75K$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα:

$$(m_1 + m_2)V = m_1v + 0 \Rightarrow 2mV = mv \Rightarrow V = \frac{v}{2}$$

$$K_{\text{συσωμ}} = \frac{(m + m)V^2}{2} = mV^2 \Rightarrow K_{\text{συσωμ}} = m \frac{v^2}{4} = \frac{K}{2} \Rightarrow K_{\text{συσωμ}} = 0,5K$$

Ερώτηση 14.

Ένα ακίνητο βλήμα εκρήγνυται σε τρία μέρη Α, Β και Γ. Τα μέρη Α και Β έχουν ορμές που βρίσκονται σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους με μέτρα που είναι ίσα με:

$$p_1 = p_2 = p = 20 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της ορμής του τρίτου κομματιού είναι:

α) $10 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}}.$

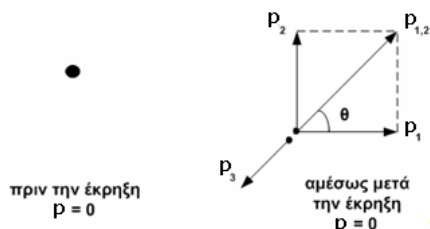
β) $20 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}}.$

γ) $20\sqrt{2} \frac{\text{Kgm}}{\text{s}}.$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.



Επειδή η ορμή διατηρείται θα ισχύει

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \Rightarrow 0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow \vec{p}_3 = -\vec{p}_{12} \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι οι κατευθύνσεις των $\vec{p}_3$ και $\vec{p}_{12}$ θα είναι αντίθετες.

Το μέτρο της ορμής $\vec{p}_{12}$ είναι:

$$p_{12} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{2p^2} = p\sqrt{2} \Rightarrow p_{12} = 20\sqrt{2} \frac{\text{Kgm}}{\text{s}}$$

Άρα το μέτρο της ορμής του 3ου κομματιού είναι $p_3 = 20\sqrt{2} \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Ερώτηση 15.

Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος h πάνω από το ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς K . Η κίνηση του σώματος γίνεται στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου χωρίς τριβές και αντιστάσεις από τον αέρα. Το σώμα αφού συμπιέσει το ελατήριο το εγκαταλείπει στο ίδιο σημείο που το συνάντησε.

Η μεταβολή της ορμής p του σώματος από τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και μέχρι να επανέλθει στο ίδιο σημείο έχει μέτρο

α) 0 .

β) p .

γ) $2p$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του είναι συντηρητικές (βάρος και δύναμη ελατηρίου), άρα η μηχανική του ενέργεια διατηρείται. Αυτό σημαίνει ότι το μέτρο της ταχύτητάς του ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την επαφή του με το ελατήριο θα είναι ίδια αφού στην ίδια θέση θα έχει ίδια κινητική και δυναμική ενέργεια.

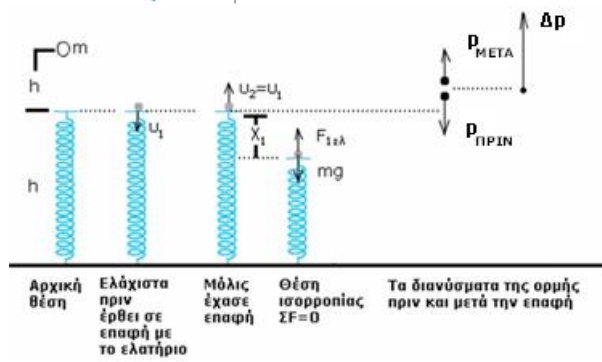
Συνεπώς η μεταβολή της ορμής του θα είναι:

$$\overrightarrow{\Delta p} = \vec{p}_{\text{μετά}} - \vec{p}_{\text{πριν}}$$

Τα διανύσματα έχουν ίδια διεύθυνση, ορίζουμε θετική φορά προς τα πάνω, μετατρέπουμε τη διανυσματική σχέση σε αλγεβρική και λαμβάνουμε υπόψη ότι

$$|\vec{p}_{\text{μετά}}| = |\vec{p}_{\text{πριν}}| = p$$

Προκύπτει $\Delta p = p - (-p) = 2p$. Η κατεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{\Delta p}$ θα είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω.



Ερώτηση 16.

Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος h πάνω από το ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς K . Η κίνηση του σώματος γίνεται στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου χωρίς τριβές και αντιστάσεις από τον αέρα. Το σώμα αφού συμπέσει το ελατήριο το εγκαταλείπει στο ίδιο σημείο που το συνάντησε.

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος είναι μέγιστο.

α) τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το ελατήριο.

β) στη θέση όπου η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται είναι μηδέν.

γ) στη θέση μέγιστης συσπείρωσης.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Από τη στιγμή που το σώμα έρχεται σε επαφή με το ελατήριο εκτός από το βάρος του ασκείται και η δύναμη του ελατηρίου με φορά προς τα πάνω. Παίρνοντας τα θετικά προς τα κάτω ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής γράφεται:

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow mg - F_{\text{ελατ}} = m\alpha \Rightarrow mg - kx = m\alpha, \text{ όπου } x \text{ η παραμόρφωση του ελατηρίου.}$$

Καθώς το σώμα κατεβαίνει το x μεγαλώνει. Επομένως η επιτάχυνση α μικραίνει. Συνεχίζει όμως να αυξάνεται η ταχύτητα του σώματος, αλλά με μικρότερο ρυθμό.

Κάποια στιγμή θα γίνει $\Sigma F = 0$, στη θέση αυτή η ταχύτητα θα είναι μέγιστη και η επιτάχυνση ίση με το μηδέν. Στη συνέχεια, επειδή το x αυξάνεται, η kx θα γίνει μεγαλύτερη από το βάρος, η επιτάχυνση θα γίνει αρνητική και το σώμα θα αρχίσει να επιβραδύνεται.

Άρα το μέτρο της ταχύτητας του σώματος είναι μέγιστο στη θέση που ισχύει $\Sigma F = 0$.

Ερώτηση 17.

Μια μπάλα αφήνεται να πέσει κατακόρυφα στο έδαφος με ορμή $10 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}}$ και αναπηδά με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα. Ο χρόνος πρόσκρουσης είναι $0,5\text{s}$.

Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής της μπάλας στη διάρκεια της κρούσης σε $\frac{\text{Kgm}}{\text{s}^2}$ έχει μέτρο ίσο με

α) 40.

β) 20.

γ) 10.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

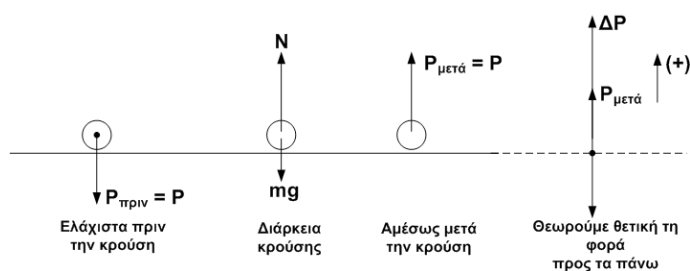
Σωστή απάντηση είναι η α.

Η μπάλα στη διάρκεια της κρούσης δέχεται τις δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα και γι αυτό μεταβάλλεται η ορμή της.

Η μεταβολή της ορμής θα είναι: $\vec{\Delta p} = \vec{p}_{(\text{μετά})} - \vec{p}_{(\text{πριν})}$ (1)

Επειδή τα διανύσματα έχουν ίδια διεύθυνση ορίζουμε φορά (θετική προς τα πάνω) και μετατρέπουμε τη διανυσματική σχέση σε αλγεβρική:

$$\Delta p = p - (-p) = 2p = 2 \cdot 10 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p = 20 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}}$$

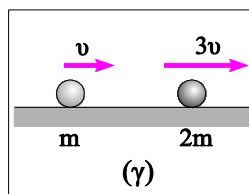
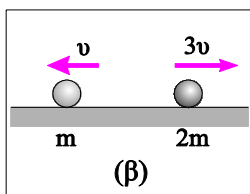
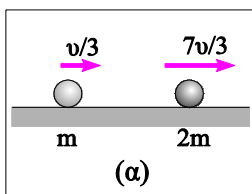
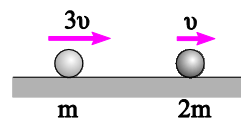


$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{20 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}}}{0,5\text{s}} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = 40 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}^2}$$

Ερώτηση 18.

(Η ερώτηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Ποντικό Ηλία)

Η κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών του σχήματος είναι κεντρική και ελαστική. Οι σφαίρες μετά την κρούση θα κινηθούν όπως στο σχήμα



Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστό είναι το σχήμα (α).

Για την κρούση ισχύει η διατήρηση της ορμής.

Οι σφαίρες του σχήματος της εκφώνησης έχουν πριν την κρούση συνολική ορμή

$$p_{\text{αρχ}} = m \cdot 3v + 2m \cdot v \Rightarrow p_{\text{αρχ}} = 5mv$$

Άρα και η τελική ορμή του συστήματος των σφαιρών πρέπει να είναι $p_{\text{τελ}} = 5 \cdot mv$

Στο σχήμα (α) μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν ορμή

$$p_{\text{τελ}} = 2m \cdot \frac{7v}{3} + m \cdot \frac{v}{3} \Rightarrow p_{\text{τελ}} = 5mv$$

Στο σχήμα (β) μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν ορμή

$$p_{\text{τελ}} = 2m \cdot 3v - mv \Rightarrow p_{\text{τελ}} = 5mv$$

Στο σχήμα (γ) μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν ορμή

$$p_{\text{τελ}} = 2m \cdot 3v + mv \Rightarrow p_{\text{τελ}} = 7mv$$

Άρα, η διατήρηση της ορμής ικανοποιείται μόνο στα σχήματα (α) και (β).

Η κρούση είναι ελαστική. Επομένως θα πρέπει επίσης να διατηρείται και η κινητική ενέργεια του συστήματος.

Πριν την κρούση οι σφαίρες έχουν κινητική ενέργεια

$$K_{αρχ} = \frac{1}{2}m \cdot (3v)^2 + \frac{1}{2}2m \cdot v^2 \Rightarrow K_{αρχ} = \frac{11}{2}mv^2$$

Στο σχήμα (α) μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν κινητική ενέργεια:

$$K_{τελ} = \frac{1}{2}m \cdot \left(\frac{v}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}2m \cdot \left(\frac{7v}{3}\right)^2 \Rightarrow K_{τελ} = \frac{11}{2}mv^2$$

Στο σχήμα (β) μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν κινητική ενέργεια:

$$K_{τελ} = \frac{1}{2}m \cdot v^2 + \frac{1}{2}2m \cdot (3v)^2 \Rightarrow K_{τελ} = \frac{19}{2}mv^2$$

Παρατηρούμε ότι η διατήρηση της ορμής και η διατήρηση της κινητικής ενέργειας ικανοποιούνται μόνο στο σχήμα (α).

Ερώτηση 19.

Ένα σώμα Α μάζας Μ είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα άλλο σώμα Β μάζας m, που κινείται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται πλαστικά κεντρικά με το σώμα Α. Αν μετά την κρούση το συσσωμάτωμα έχει το $\frac{1}{3}$ της κινητικής ενέργειας που είχε ελάχιστα πριν την κρούση, τότε μεταξύ των μαζών των σωμάτων ισχύει η σχέση

α) $\frac{M}{m} = 6.$

β) $\frac{M}{m} = 2.$

γ) $\frac{M}{m} = 3.$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

$$\text{Δίνεται ότι: } \frac{K_{\text{ολ}}^{\text{τελ}}}{K_{\text{ολ}}^{\text{αρχ}}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\frac{(M+m)V^2}{2}}{\frac{mv^2}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V^2}{v^2} = \frac{m}{3(M+m)} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε τη Διατήρησης της Ορμής για την κρούση, οπότε παίρνουμε:

$$p_{\text{ολ}}^{\text{τελ}} = p_{\text{ολ}}^{\text{αρχ}} \Rightarrow (M+m)V = mv \Rightarrow \frac{V}{v} = \frac{m}{M+m} \quad (2)$$

Αφού υψώσουμε την (2) στο τετράγωνο την εξισώνουμε με τη (1), οπότε προκύπτει:

$$\frac{m}{3(M+m)} = \frac{m^2}{(M+m)^2} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{m}{(M+m)} \Rightarrow 2m = M \text{ άρα } \frac{M}{m} = 2.$$

Ερώτηση 20.

Μια μικρή σφαίρα Σ_1 , μάζας m_1 , συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη μικρή σφαίρα Σ_2 , μάζας m_2 . Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται με αντίθετες κατευθύνσεις και τα μέτρα των ταχυτήτων τους v'_1 και v'_2 αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $|v'_1| = 2|v'_2|$. Ο λόγος των μαζών των δύο σφαιρών $\frac{m_1}{m_2}$, είναι ίσος με:

α) 1.

β) $\frac{1}{5}$.

γ) 5.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Έχουμε ελαστική κρούση δύο σωμάτων από τα οποία το ένα αρχικά είναι ακίνητο, οπότε οι ταχύτητές τους μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

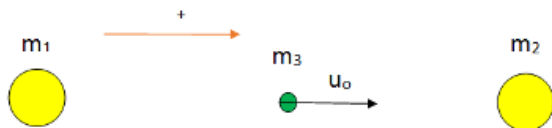
$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Τα σώματα μετά την κρούση θα κινηθούν στην ίδια διεύθυνση αλλά με αντίθετες φορές. Όπως προκύπτει από τις πιο πάνω σχέσεις το σώμα Σ_2 θα έχει ίδια φορά με αυτή που είχε πριν την κρούση το Σ_1 . Συνεπώς για τα μέτρα των ταχυτήτων θα ισχύει:

$$-v'_1 = 2v'_2 \Rightarrow -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = 2 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

$$\text{Από όπου προκύπτει: } -m_1 + m_2 = 4m_1 \Rightarrow m_2 = 5m_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{5}$$

Ερώτηση 21.



Όλες οι σφαίρες του σχήματος βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο είναι ελαστικές και αρχικά είναι ακίνητες. Οι μάζες των σφαιρών συνδέονται με τη σχέση: $m_1 = m_2 = 4m_3$. Στη σφαίρα μάζας m_3 δίνουμε αρχική ταχύτητα u_0 και οι κρούσεις που ακολουθούν είναι κεντρικές. Ο αριθμός των κρούσεων που θα γίνουν συνολικά είναι

α. 2.

β. 3.

γ. 4.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η 1^η κρούση είναι μεταξύ των σφαιρών με μάζες m_3, m_2 . Αυτές θα κινηθούν με ταχύτητες:

$$u_3' = \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2} u_0 = \frac{m_3 - 4m_3}{m_3 + 4m_3} u_0 = -\frac{3u_0}{5} \Rightarrow u_3' = -0,6u_0$$

$$\text{και: } u_2' = \frac{2m_3}{m_3 + m_2} u_0 = \frac{2u_0}{5} \Rightarrow u_2' = 0,4u_0$$

Η σφαίρα μάζας m_3 γυρίζει πίσω με ταχύτητα μέτρου $0,6u_0$ και συγκρούεται κεντρικά ελαστικά με την ακίνητη m_1 . Μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα

$$u_3'' = \frac{m_3 - m_1}{m_3 + m_1} u_3' = \frac{m_3 - 4m_3}{m_3 + 4m_3} (-0,6u_0) = \frac{1,8u_0}{5} \Rightarrow u_3'' = 0,36u_0$$

Επειδή μετά την 2^η κρούση η ταχύτητα της σφαίρας με μάζα m_3 είναι μικρότερη της ταχύτητας της σφαίρας με μάζα m_2 δεν θα υπάρξει άλλη κρούση.

Άρα θα γίνουν 2 κρούσεις.

Ερώτηση 22.



Τα σώματα Α και Β του σχήματος με μάζες m_A και m_B αντίστοιχα είναι ακίνητα πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Εκτοξεύουμε το σώμα Α με ταχύτητα u_0 προς το Β, η κρούση που ακολουθεί είναι κεντρική πλαστική και διαρκεί χρονικό διάστημα Δt . Το μέτρο της μέσης δύναμης που άσκησε το σώμα Α στο σώμα Β δίνεται από τη σχέση

α. $F = \frac{m_B m_A u_0}{(m_A - m_B) \Delta t}$.

β. $F = \frac{m_B m_A u_0}{(m_A + m_B) \Delta t}$.

γ. $F = \frac{(m_B + m_A) u_0}{m_A m_B \Delta t}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Επειδή η κρούση είναι κεντρική η διατήρηση της ορμής αλγεβρικά γράφεται:

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \quad \text{ή} \quad m_A u_0 = (m_A + m_B) V \quad \text{ή} \quad V = \frac{m_A u_0}{m_A + m_B} . \quad (1)$$

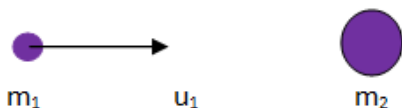
Το μέτρο της μέσης δύναμης F που αναπτύσσει το Α στο Β είναι:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m_B V - 0}{\Delta t}$$

Με αντικατάσταση της V από την (1) παίρνουμε:

$$F = \frac{m_B m_A u_0}{(m_A + m_B) \Delta t}$$

Ερώτηση 23.



Ένα σώμα μάζας m_1 κινούμενο με ταχύτητα u_1 συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2 . Το ποσοστό % της ορμής, που μεταφέρεται από το σώμα μάζας m_1 στο σώμα μάζας m_2 κατά την κρούση είναι μεγαλύτερο όταν για τις μάζες ισχύει η σχέση

α. $\frac{m_1}{m_2} = 1$

β. $\frac{m_1}{m_2} \gg 1$

γ. $\frac{m_1}{m_2} \ll 1$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα αποκτά ταχύτητα που βρίσκεται με εφαρμογή της ΑΔΟ.

$$m_1 u_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} .$$

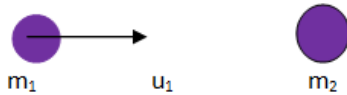
Το σώμα μάζας m_2 αποκτά ορμή $p_2 = m_2 V = \frac{m_2 m_1 u_1}{m_1 + m_2} .$

Επειδή $p_{2, \text{αρχ.}} = 0$, το ποσοστό % της ορμής που μεταφέρθηκε από το πρώτο στο δεύτερο σώμα είναι:

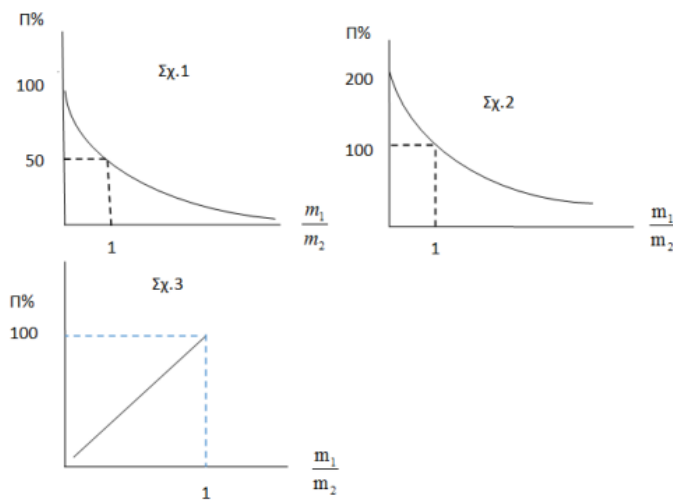
$$\pi\% = \frac{\Delta p_2}{p_1} 100\% = \frac{\frac{m_1 m_2 u_1}{m_1 + m_2}}{m_1 u_1} 100\% = \frac{m_2}{m_1 + m_2} 100\% = \frac{100}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \% .$$

Παρατηρούμε ότι όσο μικραίνει ο λόγος των μαζών $\frac{m_1}{m_2}$ μεγαλώνει το ποσοστό της ορμής που μεταβιβάζει το κινούμενο σώμα m_1 στο ακίνητο m_2 .

Ερώτηση 24.



Ένα σώμα, Σ_1 , μάζας m_1 κινούμενο με ταχύτητα u_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα, Σ_2 , μάζας m_2 . Η γραφική παράσταση του ποσοστού % της ορμής του σώματος Σ_1 που μεταφέρεται στο Σ_2 κατά την κρούση, σε συνάρτηση με το λόγο των μαζών $\frac{m_1}{m_2}$ απεικονίζεται στο διάγραμμα



α) 1

β) 2

γ) 3

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Το Σ_2 μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα $u_2' = \frac{2m_1u_1}{m_1+m_2}$

και θα αποκτήσει ορμή $p_2 = m_2u_2' = \frac{2m_1m_2u_1}{m_1+m_2}$

Το ποσοστό % της ορμής του σώματος Σ_1 που μεταφέρεται στο Σ_2 είναι:

$$\pi\% = \frac{\Delta p_2}{p_1} 100\% = \frac{p_2' - 0}{p_1} 100\% = \frac{m_2 u_2'}{m_1 u_1} 100\% \Rightarrow \pi\% = \frac{m_2}{m_1 u_1} \frac{2m_1 u_1}{m_1 + m_2} 100\% = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} 100\% \Rightarrow$$

$$\pi\% = \frac{200}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \%$$

Η συνάρτηση είναι μια υπερβολή, άρα σωστά διαγράμματα μπορεί να είναι τα 1, 2.

Όταν ο λόγος $\frac{m_1}{m_2} = 1$, τότε $\pi\% = 100\%$. Αυτό συμβαίνει μόνο στο διάγραμμα 2.

Ερώτηση 25.

Σε πείραμα στο C.E.R.N., δύο πρωτόνια επιταχύνονται σε μεγάλες ταχύτητες, κινούμενα αντίθετα σε παράλληλες διευθύνσεις με ταχύτητες ίσων μέτρων, και αλληλεπιδρούν με δυνάμεις ηλεκτρομαγνητικές.

Στη φάση της αλληλεπίδρασης δεν επιδρούν στο σύστημα των δύο πρωτονίων εξωτερικά αίτια π.χ. πεδία. Μετά την αλληλεπίδρασή τους τα πρωτόνια κινούνται



- α. σε παράλληλες διευθύνσεις, διαφορετικές των αρχικών.
- β. στις ίδιες διευθύνσεις με πριν.
- γ. οπωσδήποτε σε κάθετες διευθύνσεις.

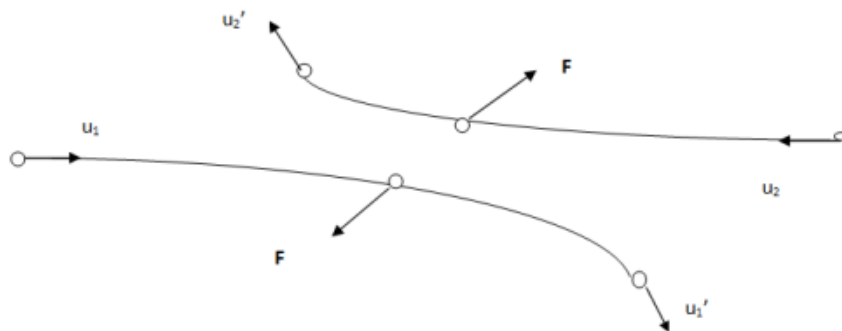
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

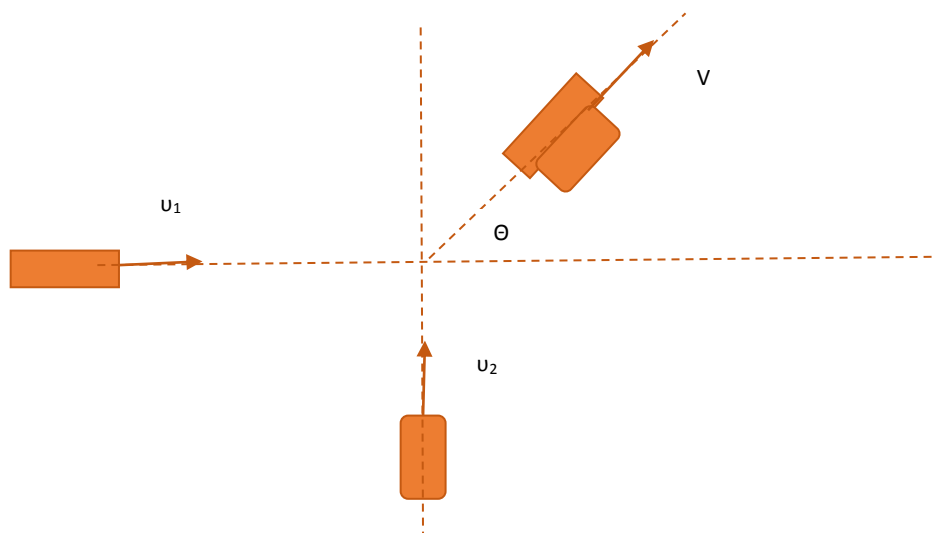
Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η αρχική ορμή του συστήματος είναι μηδέν και θα παραμείνει μηδέν, αφού δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις. Άρα, σωστές απαντήσεις μπορεί να είναι μόνο οι α, β.

Επειδή οι διευθύνσεις των αρχικών ταχυτήτων είναι παράλληλες, οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης δεν βρίσκονται πάνω στις διευθύνσεις των ταχυτήτων, με συνέπεια να ακολουθήσουν διαφορετικές πορείες από τις αρχικές. Όμως κάθε στιγμή πρέπει να έχουν ταχύτητες ίσων μέτρων και αντίθετων κατευθύνσεων.



Ερώτηση 26.



Σε μια πλαγιομετωπική σύγκρουση δύο αυτοκινήτων 1, 2, που κινούνται σε κάθετους δρόμους, δημιουργείται συσσωμάτωμα, το οποίο αποκτά κοινή ταχύτητα V που σχηματίζει γωνία $\theta=45^\circ$ με τη διεύθυνση κίνησης του αυτοκινήτου 1. Ο εμπειρογνώμονας ζυγίζει τα αυτοκίνητα και βρίσκει ότι το αυτοκίνητο 2 είναι 20% βαρύτερο από το 1.

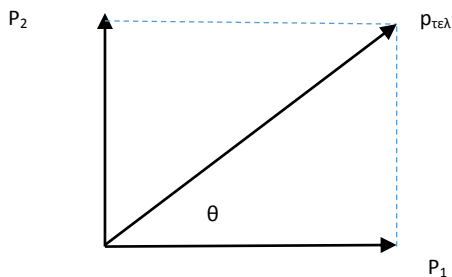
Ο λόγος των ταχυτήτων u_1/u_2 είναι

- α) ίσος με ένα.
- β) μεγαλύτερος του ένα.
- γ) μικρότερος του ένα.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).



$$\text{Είναι } \varepsilon\varphi\theta = \frac{p_2}{p_1} \quad \text{ή} \quad 1 = \frac{p_2}{p_1} \quad \text{ή} \quad p_1 = p_2 \quad \text{ή} \quad m_1 u_1 = m_2 u_2 \quad \text{ή} \quad m_1 u_1 = 1,2 m_1 u_2 \quad \text{ή} \quad \frac{u_1}{u_2} = 1,2$$

Ερώτηση 27.

Οι σφαίρες Σ_1 , Σ_2 του σχήματος είναι ελαστικές. Η σφαίρα Σ_1 κινούμενη με ταχύτητα u_1 συγκρούεται κεντρικά με την ακίνητη Σ_2 που βρίσκεται μπροστά από λείο κατακόρυφο τοίχο με τον οποίο στην συνέχεια συγκρούεται ελαστικά. Η σφαίρα Σ_1 επιστρέφει με ταχύτητα $u_1/2$. Η ταχύτητα της Σ_2 μετά την κρούση με τον τοίχο είναι:



α) u_1 .

β) $u_1/2$.

γ) 0 .

Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η κρούση των δύο σφαιρών είναι κεντρική ελαστική, άρα για την ταχύτητα της σφαίρας Σ_1 έχουμε:

$$u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \Rightarrow -\frac{u_1}{2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \Rightarrow 2m_1 - 2m_2 = -m_1 - m_2 \Rightarrow m_2 = 3m_1$$

Η σφαίρα Σ_2 μετά την κρούση της με την Σ_1 αποκτά ταχύτητα u_2' για την οποία ισχύει:

$$u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{u_1}{2}$$

Μετά την ελαστική κρούση της με τον τοίχο θα επιστρέψει με ταχύτητα ίδιου μέτρου, δηλαδή $\frac{u_1}{2}$.

Ερώτηση 28.

Μια σφαίρα Α μάζας m κινούμενη με ταχύτητα μέτρου u συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με αρχικά ακίνητη δεύτερη σφαίρα Β διπλάσιας μάζας. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Α είναι

α) $mu/3$

β) $-2mu/3$

γ) $-mu/3$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

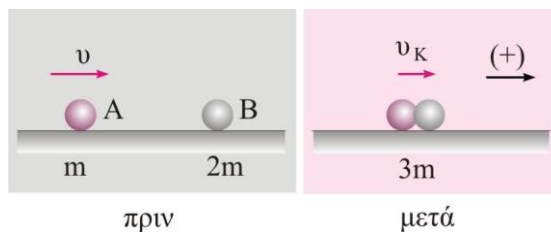
Σωστή απάντηση είναι η (β).

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των σφαιρών λίγο πριν και αμέσως μετά την πλαστική κρούση.

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow mu = 3m v_{\kappa} \Rightarrow v_{\kappa} = \frac{u}{3}$$

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Α είναι

$$\Delta p_A = p'_A - p_A = m v_{\kappa} - m u \Rightarrow \Delta p_A = -\frac{2mu}{3}$$



Ερώτηση 29.

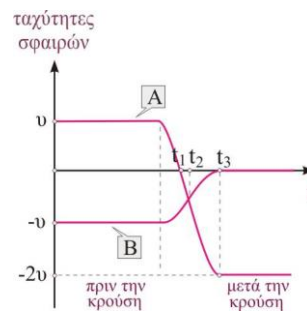
Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνονται οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων δυο σφαιρών Α και Β πριν και μετά τη μεταξύ τους κεντρική κρούση. Οι μάζες των δύο σφαιρών συνδέονται με τη σχέση

α. $m_B = 3m_A$

β. $m_B = 2m_A$

γ. $m_B = m_A$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



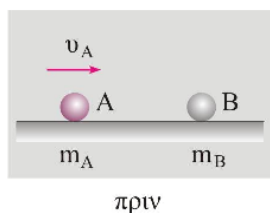
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Επειδή η κρούση είναι κεντρική η διατήρηση της ορμής αλγεβρικά γράφεται:

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_A v - m_B v = -m_A \cdot 2v + 0 \Rightarrow m_B = 3m_A$$

Ερώτηση 30.



Η σφαίρα Α του σχήματος, μάζας m_A , προσπίπτει με ταχύτητα μέτρου u στην ακίνητη σφαίρα Β, μάζας $m_B = m_A/3$, σχηματίζοντας συσσωμάτωμα. Κατά την κρούση το 25% της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος γίνεται θερμότητα. Αν η σφαίρα Α προσπέσει στη σφαίρα Β με ταχύτητα μέτρου $2u$, το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος που θα γίνει θερμότητα είναι

α. 25%

β. 50%

γ. 75%.

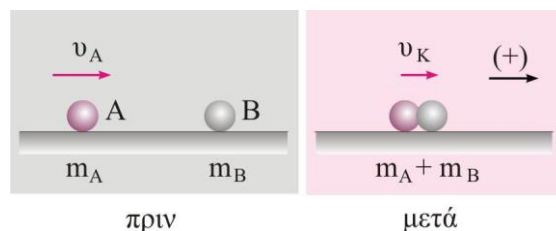
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ και έχουμε:

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_A v_A = (m_A + m_B) v_K, \quad (1)$$



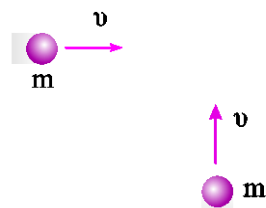
$$\Pi\% = \frac{Q}{K_{\text{αρχ}}} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_A v_A^2 - \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_K^2}{\frac{1}{2} m_A v_A^2} 100\% = \frac{m_A v_A^2 - (m_A + m_B) \left(\frac{m_A v_A}{m_A + m_B} \right)^2}{\frac{1}{2} m_A v_A^2} 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = \frac{m_B}{m_A + m_B} 100\%$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της αρχικής ταχύτητας u_A .

Ερώτηση 31.

Οι δύο σφαίρες του σχήματος κινούνται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις με ταχύτητες ίδιου μέτρου και συγκρούονται πλαστικά. Η κίνηση γίνεται σε οριζόντιο λείο επίπεδο. Το μέτρο της ταχύτητας V_K του δημιουργούμενου συσσωματώματος είναι



α. $V_K = v\sqrt{2}$

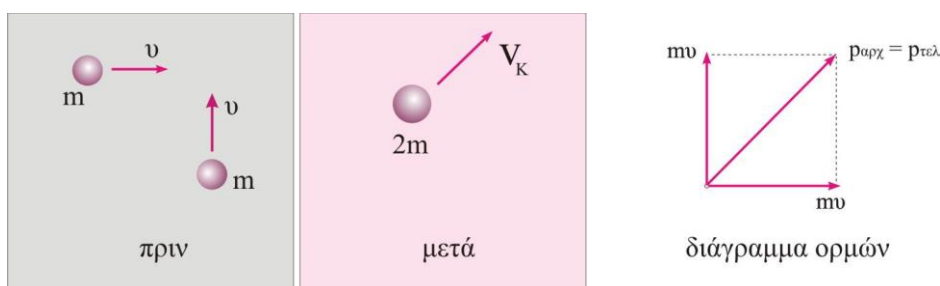
β. $V_K = \frac{v\sqrt{2}}{2}$

γ. $V_K = 2v$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

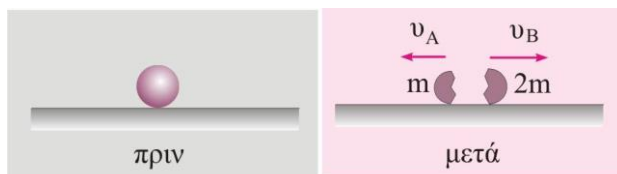


Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{τελ}} = \vec{p}_{\text{αρχ}} \Rightarrow (2m \cdot V_K)^2 = (mv)^2 + (mv)^2 \Rightarrow 4V_K^2 = 2v^2 \Rightarrow V_K = v \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ερώτηση 32.

Ένα αρχικά ακίνητο σώμα που βρίσκεται σε λείο οριζόντιο δάπεδο εκρήγνυται σε δύο κομμάτια Α και Β με μάζες $m_A=m$ και $m_B=2m$ αντίστοιχα, όπως στο σχήμα.



Αν με K συμβολίσουμε την κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο κομματιών μετά την έκρηξη, τότε για την κινητική ενέργεια του κομματιού Α, K_A , ισχύει

α. $K_A = \frac{K}{3}$

β. $K_A = \frac{2K}{3}$

γ. $K_A = \frac{K}{2}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Α. Η έκρηξη οφείλεται σε εσωτερικές δυνάμεις, άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής.

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow 0 = 2mv_B - mv_A \Rightarrow v_A = 2v_B$$

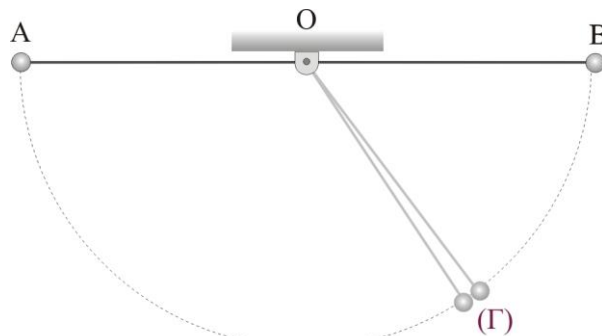
Β. Η κινητική ενέργεια του δημιουργούμενου συσσωματώματος είναι: $K = K_A + K_B$

$$\text{Όμως, } K_A = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2 v_A^2}{m} = \frac{p_A^2}{2m} \text{ και } K_B = \frac{p_B^2}{4m} = \frac{K_A}{2}$$

$$\text{Άρα, } K = K_A + \frac{K_A}{2} \Rightarrow K_A = \frac{2K}{3}$$

Ερώτηση 33. **Νέο**

Τα σφαιρίδια Α και Β του σχήματος είναι δεμένα σε μη ελαστικά νήματα ίδιου μήκους των οποίων οι άλλες άκρες είναι δεμένες ακλόνητα στο ίδιο σημείο Ο. Εκτρέπουμε τα σφαιρίδια ώστε τα νήματα να είναι αρχικά οριζόντια και τεντωμένα. Αφήνουμε πρώτα το σφαιρίδιο Α και ύστερα το Β ώστε τα σφαιρίδια να συγκρουστούν στη θέση (Γ). Αν η σύγκρουση είναι κεντρική και ελαστική και αμέσως μετά την κρούση το σφαιρίδιο Β



στιγμιαία ακινητοποιείται, ο λόγος των μαζών $\frac{m_A}{m_B}$ των σφαιριδίων είναι

α. 1/4.

β. 1/2.

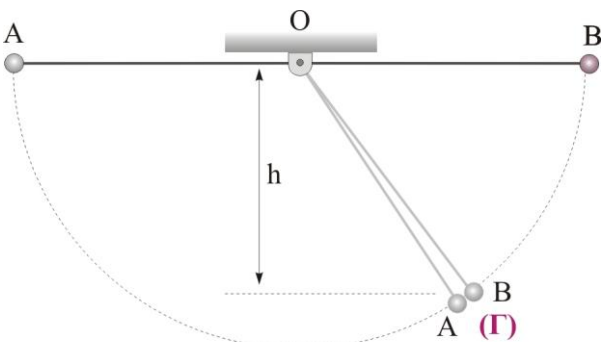
γ. 1/3.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

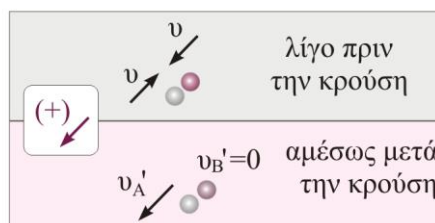
Τα σφαιρίδια από τη θέση ελευθέρωσης μέχρι της θέσης σύγκρουσης έχουν την ίδια κατακόρυφη μετατόπιση, h . Με εφαρμογή του θεωρήματος έργου ενέργειας για κάθε σφαιρίδιο μεταξύ των δύο θέσεων προκύπτει ότι οι ταχύτητές τους θα έχουν ίδιο μέτρο.



$$K_{\Gamma} - K_A = W_w \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh \quad \text{ή}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Το σφαιρίδιο Β αμέσως μετά την κεντρική και ελαστική σύγκρουση ακινητοποιείται ($v_B' = 0$). Εφαρμόζουμε τη σχέση της κεντρικής και ελαστικής κρούσης για το σφαιρίδιο Β και παίρνουμε:



$$v'_B = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} v_B + \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} (-v) + \frac{2m_A}{m_A + m_B} (v) = 0 \quad \text{ή}$$

$$2m_A = m_B - m_A \quad \text{ή} \quad \frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{3}$$

Ερώτηση 34. **Νέο**

Μία σφαίρα Σ_A , μάζας m_A , κινούμενη με ταχύτητα μέτρου v_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με την αρχικά ακίνητη σφαίρα Σ_B , μάζας m_B . Αν ο λόγος των μαζών των

σφαιρών είναι $\frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{2}$, το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας της σφαίρας A κατά την κρούση είναι

- α. 50%.
- β. $\frac{800}{9}\%$.
- γ. 64%.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

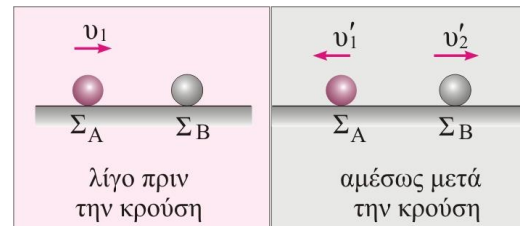
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η κρούση είναι ελαστική, επομένως η κινητική ενέργεια που έχασε η σφαίρα Σ_A κατά την κρούση ισούται με την κινητική ενέργεια που πήρε η σφαίρα Σ_B .

Η κρούση είναι κεντρική ελαστική, οπότε η σφαίρα Σ_B μετά την κρούση κινείται με

ταχύτητα
$$v'_2 = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_1$$



Το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_A κατά την κρούση ισούται με :

$$\Pi\% = \frac{\frac{1}{2} m_B v'^2_2}{\frac{1}{2} m_A v^2_1} 100\%$$

Αντικαθιστώντας το v'_2 στην παραπάνω σχέση παίρνουμε:

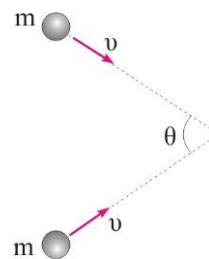
$$\Pi\% = \frac{\frac{1}{2} m_B \left(\frac{2m_A}{m_A + m_B} v_1 \right)^2}{\frac{1}{2} m_A v^2_1} 100\% = \frac{m_B \cdot 4m^2_A}{m_A (m_A + m_B)^2} 100\% \quad \text{ή}$$

$$\Pi\% = \frac{4 \cdot 2m_A m_A}{(m_A + 2m_A)^2} 100\% = \frac{8m^2_A}{9m^2_A} 100\% \quad \text{ή} \quad \Pi\% = \frac{800}{9}\%$$

Ερώτηση 35.

• Νέο

Δύο ίδιες σφαίρες μάζας m κινούνται σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες μέτρου u και συγκρούονται πλαστικά. Οι ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση σχηματίζουν γωνία και κατά την κρούση το σύστημα χάνει το 25% της αρχικής κινητικής του ενέργειας. Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα μέτρου



α. $u \frac{\sqrt{3}}{2}$.

β. $u \frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ. $u \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση έχει μάζα $2m$ και ταχύτητα V . Το σύστημα λόγω της κρούσης χάνει το 25% και μένει με το 75% της αρχικής κινητικής του ενέργειας.

$$K_{\text{τελ}} = \frac{3}{4} K_{\text{αρχ}} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} 2mV^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} mu^2 + \frac{1}{2} mu^2 \right) \quad \text{ή}$$

$$2mV^2 = \frac{3}{4} 2mu^2 \quad \text{ή} \quad V = u \frac{\sqrt{3}}{2}$$

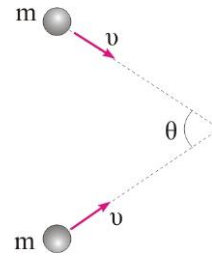
Ερώτηση 36. **Νέο**

Δύο ίδιες σφαίρες μάζας m κινούνται σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες μέτρου u και συγκρούονται πλαστικά. Οι ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση σχηματίζουν γωνία θ και κατά την κρούση το σύστημα χάνει το 25% της αρχικής κινητικής του ενέργειας. Το συνημίτονο της γωνίας θ είναι

α. $\text{συν}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

β. $\text{συν}\theta = \frac{1}{2}$.

γ. $\text{συν}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση έχει μάζα $2m$ και ταχύτητα V . Το σύστημα λόγω της κρούσης χάνει το 25% και μένει με το 75% της αρχικής κινητικής του ενέργειας.

$$K_{\text{τελ}} = \frac{3}{4} K_{\text{αρχ}} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} 2mV^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} mu^2 + \frac{1}{2} mu^2 \right) \quad \text{ή}$$

$$2mV^2 = \frac{3}{4} 2mu^2 \quad \text{ή} \quad V = u \frac{\sqrt{3}}{2}$$

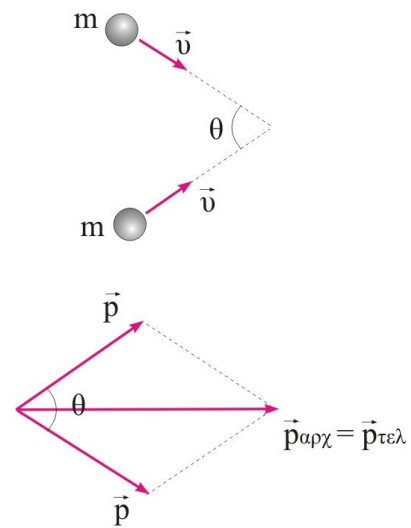
Το μέτρο της τελικής ορμής του συσσωματώματος είναι

$$p_{\text{τελ}} = 2mV = 2mu \frac{\sqrt{3}}{2} = mu\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad p_{\text{τελ}} = p\sqrt{3}$$

Το μέτρο της αρχικής ορμής του συστήματος βρίσκεται με τον κανόνα του παραλληλογράμου.

$$p_{\text{αρχ}} = \sqrt{p^2 + p^2 + 2p^2 \text{συν}\theta} \quad \text{ή} \quad p_{\text{αρχ}} = \sqrt{2p^2 + 2p^2 \text{συν}\theta}$$

Η αρχή διατήρησης της ορμής δίνει:



διάγραμμα ορμών

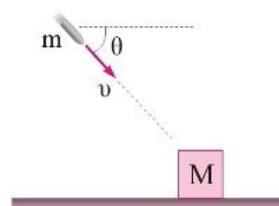
$$p_{\text{τελ}} = p_{\text{αρχ}} \Rightarrow p\sqrt{3} = \sqrt{2p^2 + 2p^2 \cos \theta} \Rightarrow (p\sqrt{3})^2 = 2p^2 + 2p^2 \cos \theta \quad \text{ή}$$

$$3p^2 = 2p^2(1 + \cos \theta) \quad \text{ή} \quad \cos \theta = \frac{1}{2}$$

Ερώτηση 37. **Νέο**

Το βλήμα μάζας m του σχήματος κινούμενο με ταχύτητα μέτρου u και σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ ως προς τον ορίζοντα, συγκρούεται πλαστικά με το αρχικά ακίνητο σώμα μάζας M , που ισορροπεί στο λείο οριζόντιο επίπεδο.

Η μεταβολή της ορμής του συστήματος βλήμα-ξύλο κατά την κρούση



α. είναι μηδέν.

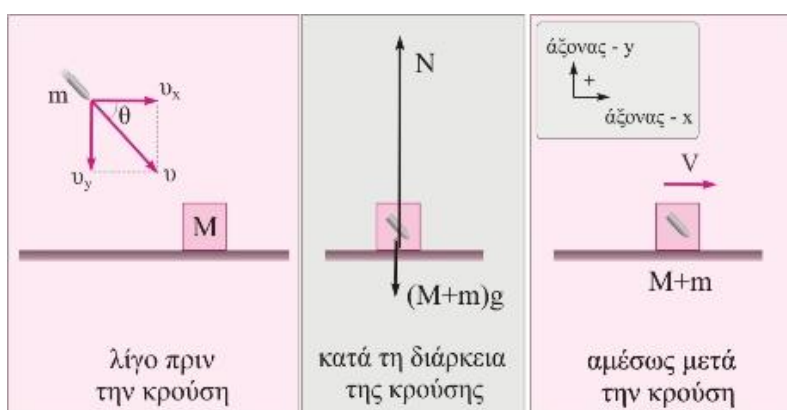
β. έχει μέτρο $mu\eta\mu\phi$ και φορά κατακόρυφη προς τα πάνω.

γ. έχει μέτρο $(M+m)u\eta\mu\phi$ και φορά κατακόρυφη προς τα πάνω.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).



Ισχύει η αρχή της διατήρησης της ορμής μόνο στον άξονα- x . Στον άξονα- y κατά την ενσφήνωση του βλήματος, το συσσωμάτωμα δεν έχει τη δυνατότητα να κινηθεί λόγω της ισχυρότατης εξωτερικής δύναμης που δέχεται από το δάπεδο. Επομένως η μεταβολή της ορμής του συστήματος κατά την κρούση οφείλεται μόνο στη μεταβολή της ορμής κατά τον άξονα- y .

Πριν την κρούση η ορμή του συστήματος στον άξονα- y είναι :

$$p_{y(\alpha\rho\chi)} = -mu_y = -m \cdot u\eta\mu\phi$$

Μετά την κρούση η ορμή του συστήματος στον άξονα- y είναι :

$$p_{y(\tau\epsilon\lambda)} = 0 \quad \text{αφού το συσσωμάτωμα κινείται οριζόντια.}$$

Επομένως η μεταβολή της ορμής του συστήματος κατά την κρούση είναι :

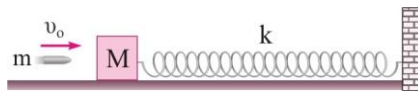
$$\Delta p = \Delta p_y = 0 - (-m \cdot v_{\eta\mu\phi}) \quad \text{ή} \quad \Delta p = m \cdot v_{\eta\mu\phi}$$

Το θετικό πρόσημο δηλώνει ότι το Δp έχει φορά προς τα πάνω.

Ερώτηση 38.



Το βλήμα μάζας m του σχήματος κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα v_0 συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με το ακίνητο σώμα, μάζας M , που βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Το σώμα, μάζας M , είναι δεμένο στην άκρη ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου, το οποίο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και η άλλη άκρη του είναι ακλόνητα στερεωμένη. Μετά την κρούση, η μέγιστη κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι ίση με το $1/5$ της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος. Ο



λόγος των μαζών $\frac{m}{M}$ είναι

α. $1/2$.

β. $2/3$.

γ. $1/4$.

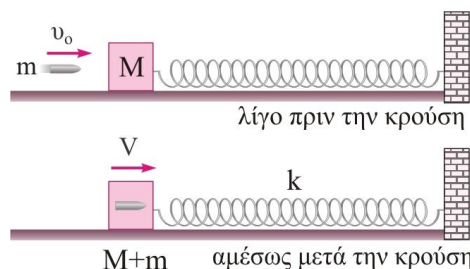
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Μετά την κρούση, η μέγιστη κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι ίση με το $1/5$ της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος, επομένως

$$K_{\text{συσ}} = \frac{1}{5} K_{\text{βλ}} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} (M+m) V^2 = \frac{1}{5} \frac{1}{2} m v_0^2, \quad (1)$$



Εφαρμόζουμε την αρχή της διατήρησης της ορμής για το σύστημα βλήμα-σώμα.

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \quad \text{ή} \quad m v_0 = (M+m) V \quad \text{ή} \quad V = \frac{m v_0}{M+m}, \quad (2)$$

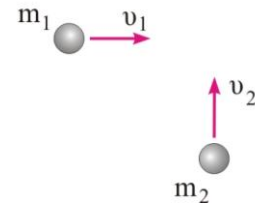
Συνδυάζοντας τις (1), (2) έχουμε:

$$\frac{1}{2} (M+m) \left(\frac{m v_0}{M+m} \right)^2 = \frac{1}{5} \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{ή} \quad \frac{m}{M+m} = \frac{1}{5} \quad \text{ή} \quad \frac{m}{M} = \frac{1}{4}$$

Ερώτηση 39. **Νέο**

Τα σώματα του σχήματος κινούνται οριζόντια σε κάθετες διευθύνσεις. Το ένα σώμα έχει μάζα m_1 και ταχύτητα μέτρου u_1 . Το άλλο σώμα έχει μάζα $m_2=4m_1$ και ταχύτητα

μέτρου $u_2 = \frac{u_1}{3}$. Οι σφαίρες συγκρούονται πλαστικά. Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα μέτρου



α. $\frac{u_1}{3}$.

β. $\frac{2u_1}{3}$.

γ. u_1 .

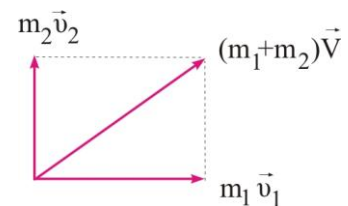
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Μετά την πλαστική κρούση, το συσσωμάτωμα έχει μάζα $m_1+m_2=5m_1$ και ταχύτητα μέτρου V , άρα η ολική ορμή του συστήματος μετά την κρούση έχει μέτρο

$$p_{\text{τελ}} = 5m_1 V$$



διάγραμμα ορμών

Η ολική ορμή του συστήματος πριν την κρούση έχει μέτρο που βρίσκεται με το πυθαγόρειο θεώρημα

$$p_{\text{αρχ}} = \sqrt{(m_1 u_1)^2 + (m_2 u_2)^2} = \sqrt{(m_1 u_1)^2 + \left(4m_1 \frac{u_1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{9}(m_1 u_1)^2} \Rightarrow p_{\text{αρχ}} = \frac{5}{3} m_1 u_1$$

Η διατήρηση της ορμής για την κρούση δίνει:

$$p_{\text{τελ}} = p_{\text{αρχ}} \Rightarrow 5m_1 V = \frac{5}{3} m_1 u_1 \Rightarrow V = \frac{1}{3} u_1$$

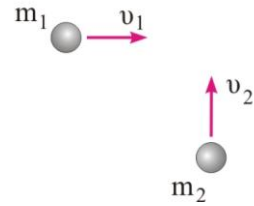
Ερώτηση 40.



Τα σώματα του σχήματος κινούνται οριζόντια σε κάθετες διευθύνσεις. Το ένα σώμα έχει μάζα m_1 και ταχύτητα μέτρου u_1 . Το

άλλο σώμα έχει μάζα $m_2=4m_1$ και ταχύτητα μέτρου $u_2 = \frac{u_1}{3}$. Οι

σφαίρες συγκρούονται πλαστικά. Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο μαζών που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση είναι



α. $\frac{800}{13}\%$.

β. $\frac{500}{13}\%$.

γ. 62,5%.

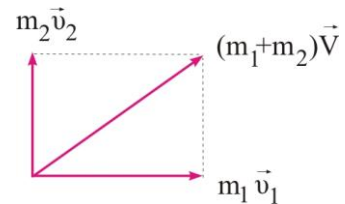
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Μετά την πλαστική κρούση, το συσσωμάτωμα έχει μάζα $m_1+m_2=5m_1$ και ταχύτητα μέτρου V , άρα η ολική ορμή του συστήματος μετά την κρούση έχει μέτρο

$$p_{\text{τελ}} = 5m_1 V$$



διάγραμμα ορμών

Η ολική ορμή του συστήματος πριν την κρούση έχει μέτρο που βρίσκεται με το πυθαγόρειο θεώρημα

$$p_{\text{αρχ}} = \sqrt{(m_1 u_1)^2 + (m_2 u_2)^2} = \sqrt{(m_1 u_1)^2 + \left(4m_1 \frac{u_1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{9}(m_1 u_1)^2} \Rightarrow p_{\text{αρχ}} = \frac{5}{3} m_1 u_1$$

Η διατήρηση της ορμής για την κρούση δίνει:

$$p_{\text{τελ}} = p_{\text{αρχ}} \Rightarrow 5m_1 V = \frac{5}{3} m_1 u_1 \Rightarrow V = \frac{1}{3} u_1$$

Η θερμότητα που εκλύθηκε κατά την κρούση ισούται με τη διαφορά μεταξύ της αρχικής και τελικής κινητικής ενέργειας του συστήματος.

$$K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} 4m_1 \left(\frac{u_1}{3}\right)^2 \Rightarrow K_{\text{αρχ}} = \frac{13}{9} \cdot \frac{1}{2} m_1 u_1^2$$

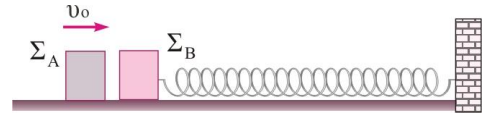
$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}5m_1\left(\frac{v_1}{3}\right)^2 \Rightarrow K_{\text{τελ}} = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2}m_1v_1^2$$

$$\Pi\% = \frac{Q}{K_{\text{αρχ}}}100\% = \frac{K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}}}{K_{\text{αρχ}}}100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = \frac{\frac{13}{9} \cdot \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{13}{9} \cdot \frac{1}{2}m_1v_1^2}100\% \Rightarrow \Pi\% = \frac{800}{13}\%$$

Ερώτηση 41. **Νέο**

Το σώμα Σ_B μάζας M βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και είναι δεμένο στην άκρη ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου που βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη. Το σώμα Σ_A μάζας m , του σχήματος, κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα u_0 κτυπά κεντρικά στο ακίνητο σώμα μάζας M . Για να έχουμε την ίδια μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου είτε η κρούση είναι ελαστική είτε πλαστική, θα πρέπει ο λόγος των μαζών m/M να είναι



α. 1.

β. 2.

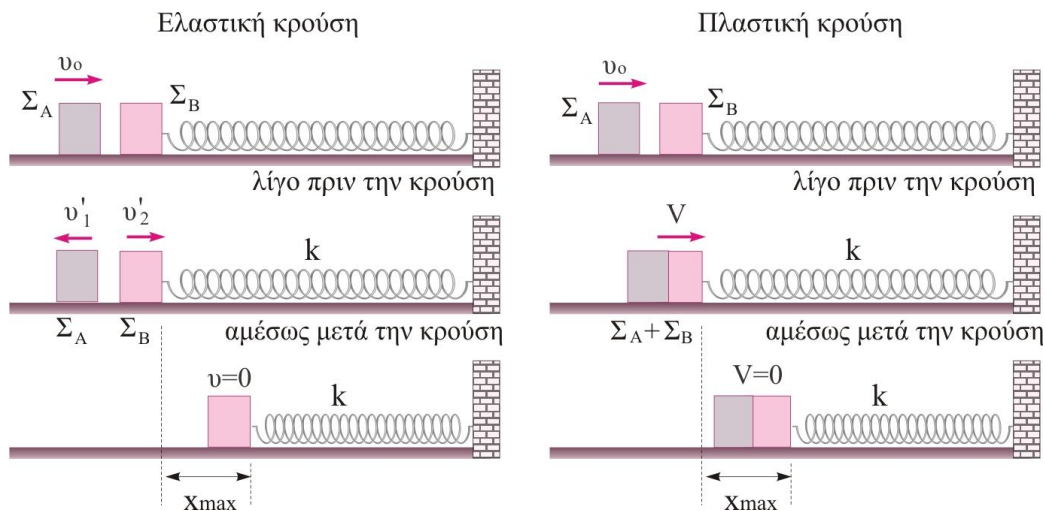
γ. 3.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Ίδια μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου, δηλώνει ίδια $U_{ελ(max)}$ και ίδια ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος, καθώς το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Όμως, $E_T = U_{max} = K_{max}$



Συμβολίζουμε με v'_2 την ταχύτητα του σώματος Σ_B μετά την ελαστική κρούση και με V την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.

Για τις κινητικές ενέργειες στις δύο περιπτώσεις ισχύει:

$$K_{ελ(max)} = K_{πλ(max)} \Rightarrow \frac{1}{2} M v'^2_2 = \frac{1}{2} (M + m) V^2 \quad (1)$$

Αν η κρούση είναι ελαστική, το σώμα Σ_B θα έχει αμέσως μετά την κρούση ταχύτητα μέτρου u_2' η οποία δίνεται από τη σχέση

$$u_2' = \frac{2m}{m+M} u_0$$

(2)

Αν η κρούση είναι πλαστική, το συσσωμάτωμα $\Sigma_A + \Sigma_B$ θα έχει αμέσως μετά την κρούση ταχύτητα μέτρου V , η οποία υπολογίζεται από την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση.

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετα}} \quad \text{ή} \quad m u_0 = (M+m) V \quad \text{ή} \quad V = \frac{m u_0}{M+m} \quad (3)$$

Με αντικατάσταση των (2) και (3) στην σχέση (1) παίρνουμε:

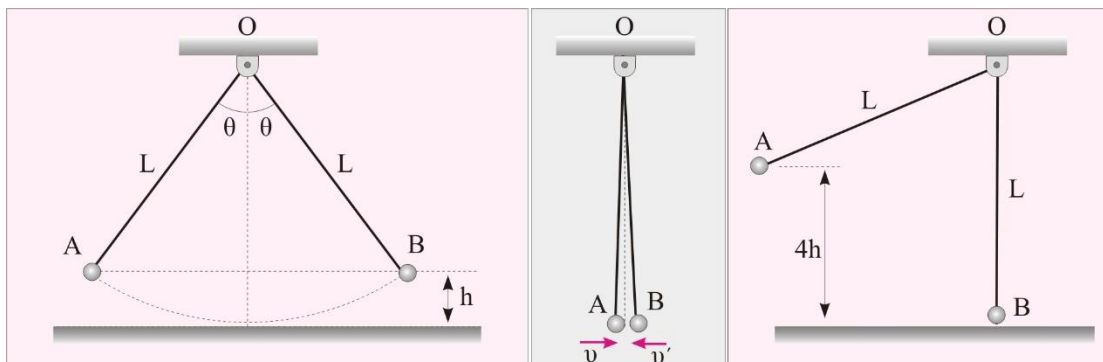
$$\frac{1}{2} M \cdot \left(\frac{2m}{m+M} u_0 \right)^2 = \frac{1}{2} (M+m) \cdot \left(\frac{m u_0}{M+m} \right)^2 \quad \text{ή}$$

$$M \cdot \frac{4m^2 u_0^2}{(m+M)^2} = (M+m) \cdot \frac{m^2 u_0^2}{(m+M)^2} \quad \text{ή} \quad 4M = M+m \quad \text{ή} \quad \frac{m}{M} = 3$$

Ερώτηση 42.

• Νέο

Τα σφαιρίδια Σ_A , μάζας m_A και Σ_B , μάζας m_B , του σχήματος, είναι δεμένα στις άκρες μη ελαστικών νημάτων ίδιου μήκους. Τα σφαιρίδια ελευθερώνονται ταυτόχρονα με τα νήματα τεντωμένα από θέσεις συμμετρικές ως προς την κατακόρυφο που διέρχεται από τη θέση ισορροπίας τους (βλέπε σχήμα) και συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά στη θέση ισορροπίας τους.



Μετά την κρούση, το σφαιρίδιο A επιστρέφει πίσω και εκτελώντας κυκλική τροχιά φτάνει σε μέγιστο ύψος τετραπλάσιο από αυτό που ελευθερώθηκε. Ο λόγος των μαζών

$$\frac{m_A}{m_B} \text{ είναι}$$

α. 1/2.

β. 1/3.

γ. 1/4.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

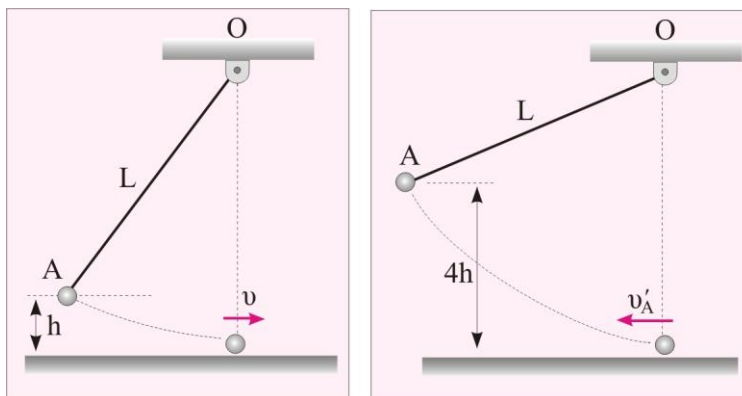
Σωστή απάντηση είναι η (β).

Τα σφαιρίδια αφήνονται από το ίδιο ύψος και όταν φτάσουν στο σημείο κρούσης θα έχουν ταχύτητες ίδιου μέτρου u , το οποίο υπολογίζεται με εφαρμογή του θεωρήματος έργου ενέργειας μεταξύ των δύο θέσεων.

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh \quad \text{ή}$$

$$v^2 = 2gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \quad , \quad (1)$$

Το σφαιρίδιο Σ_A , μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα u'_A



και ανέρχεται σε ύψος $4h$. Οπότε το θεώρημα έργου ενέργειας δίνει για την ταχύτητα του Σ_A , μετά την κρούση

$$0 - \frac{1}{2} m v_A'^2 = -4mgh \quad \text{ή} \quad v_A'^2 = 8gh \quad \Rightarrow v_A' = 2\sqrt{2gh}, \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τις (1), (2) προκύπτει ότι τα μέτρα των δύο ταχυτήτων του Σ_A πριν και μετά την κρούση συνδέονται με τη σχέση $v_A' = 2v$ (3)

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, οπότε η σφαίρα Α αμέσως μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα v_A' για την οποία ισχύει:

$$v_A' = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v + \frac{2m_B}{m_A + m_B} (-v) \Rightarrow v_A' = \frac{m_A - 3m_B}{m_A + m_B} v$$

Η οποία με τη βοήθεια της σχέσης (3) μας δίνει:

$$v_A' = \frac{m_A - 3m_B}{m_A + m_B} v \Rightarrow -2v = \frac{m_A - 3m_B}{m_A + m_B} v \Rightarrow -2(m_A + m_B) = m_A - 3m_B \quad \text{ή} \quad \frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{3}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ένα σώμα Α μάζας $m_1 = 10\text{kg}$, κινούμενο με ταχύτητα v_1 πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$, συγκρούεται με ακίνητο σώμα Β.

Α) Αν η κρούση είναι μετωπική και ελαστική και τα δύο σώματα μετά την κρούση έχουν ταχύτητες ίσου μέτρου, να βρείτε:

- 1) τη μάζα του σώματος Β.
- 2) την % μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Α.

Β) Αν η κρούση των δύο σωμάτων είναι πλαστική και η ταχύτητα του σώματος Α είναι

$$v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ να υπολογίσετε:}$$

- 1) Την κοινή τους ταχύτητα.
- 2) Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων, πριν και μετά την κρούση.

Λύση



α)

1) Έχουμε ελαστική κρούση δύο σωμάτων που το ένα αρχικά είναι ακίνητο, οπότε οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1)$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2)$$

Τα σώματα μετά την κρούση θα κινηθούν στην ίδια διεύθυνση, αλλά δεν διευκρινίζεται αν έχουν ίδιες ή αντίθετες κατευθύνσεις. Έτσι διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) να κινηθούν με την ίδια φορά:

Θέτουμε $v_1' = v_2'$, δηλαδή $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$, η επίλυση της σχέσης δίνει

$m_1 = -m_2$, που είναι άτοπο. Άρα τα δύο σώματα δεν μπορεί να κινηθούν με ίδιες φορές, μετά την κρούση.

ii) να κινηθούν με αντίθετες φορές:

Θέτουμε $v_1' = -v_2'$, δηλαδή $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$, η επίλυση της σχέσης δίνει:

$m_2 = 3m_1 \Rightarrow m_2 = 30\text{kg}$, που είναι το σωστό.

2) Με αντικατάσταση στις σχέσεις (1) και (2) τις τιμές των μαζών $m_1 = 10\text{kg}$ και $m_2 = 30\text{kg}$ προκύπτει

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{10\text{kg} - 30\text{kg}}{10\text{kg} + 30\text{kg}} v_1 \Rightarrow v_1' = -\frac{v_1}{2}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 \cdot 10\text{kg}}{10\text{kg} + 30\text{kg}} v_1 \Rightarrow v_2' = \frac{v_1}{2}$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Α είναι:

$$\Delta K_1 = K_1' - K_1 = \frac{m_1 v_1'^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow \Delta K_1 = \frac{m_1 \left(\frac{v_1}{2}\right)^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow \Delta K_1 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{m_1 v_1^2}{2}$$

Η εκατοστιαία μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Α υπολογίζεται ως εξής:

$$a\% = \frac{\Delta K_1}{K_1} 100\% = -\frac{3}{4} 100\% \Rightarrow a\% = -75\%$$

Β) 1) Η κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος βρίσκεται εφαρμόζοντας τη διατήρηση της ορμής για την κρούση.

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{10\text{kg} \cdot 4\text{m/s}}{10\text{kg} + 30\text{kg}} \Rightarrow V = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta K = \frac{(10\text{kg} + 30\text{kg}) \cdot (1\text{m/s})^2}{2} - \frac{10\text{kg} \cdot (4\text{m/s})^2}{2} \Rightarrow \Delta K = -60\text{J}$$

Άσκηση 2.

(Η άσκηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Παπαδημητρίου Αθανάσιο)

Ένα σώμα Σ_1 , μάζας m_1 , κινούμενο σε οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 5 \text{ m/s}$ κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα Σ_2 , μάζας m_2 . Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του επιπέδου και κάθε σώματος είναι $\mu = 0,5$. Αμέσως μετά την κρούση, το σώμα μάζας Σ_1 κινείται αντίρροπα με ταχύτητα μέτρου $v'_1 = 3 \text{ m/s}$.

α) Να προσδιορίσετε το λόγο των μαζών $\frac{m_1}{m_2}$.

β) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση.

γ) Να βρείτε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 που μεταβιβάστηκε στο σώμα Σ_2 , λόγω της κρούσης.

δ) Να υπολογίσετε πόσο θα απέχουν τα σώματα όταν σταματήσουν.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

α) Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, οπότε οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1)$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2)$$

Με αντικατάσταση, στο S.I., στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$-3 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} 5 \Rightarrow -3m_1 - 3m_2 = 5m_1 - 5m_2 \Rightarrow 2m_2 = 8m_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4}$$

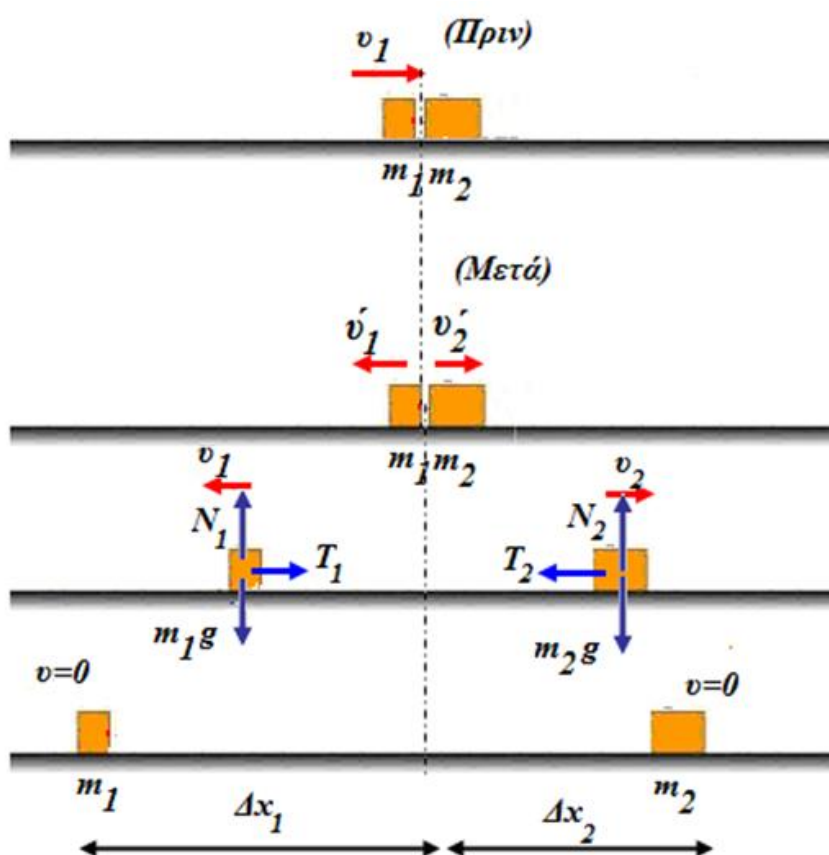
β) Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + 4m_1} \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Η κινητική ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σώμα Σ_2 κατά την κρούση είναι ίση με την κινητική ενέργεια που απέκτησε το σώμα αυτό, ακριβώς μετά την κρούση. Έτσι το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 που μεταβιβάστηκε στο σώμα Σ_2 , λόγω της κρούσης είναι:

$$\frac{K_2'}{K_1} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} 100\% = \frac{4m_1 (2\text{m/s})^2}{m_1 (5\text{m/s})^2} 100\% \Rightarrow \frac{K_2'}{K_1} 100\% = 64\%$$

δ) Μετά την κρούση και λόγω της ύπαρξης των τριβών καθένα από τα δύο σώματα εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση και τελικά σταματά.



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για κάθε σώμα χωριστά.

$$0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = W_{mg} + W_{N_1} + W_{T_1} \Rightarrow -\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -T_1 \cdot \Delta x_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \mu m_1 g \Delta x_1 \quad \text{ή}$$

$$\Delta x_1 = \frac{v_1'^2}{2\mu g} = \frac{(3\text{m/s})^2}{2 \cdot 0,5 \cdot 10\text{m/s}^2} \Rightarrow \Delta x_1 = 0,9\text{m}$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = W_{m_2 g} + W_{N_2} + W_{T_2} \Rightarrow -\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -T_2 \cdot \Delta x_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \mu m_2 g \Delta x_2 \text{ ή}$$

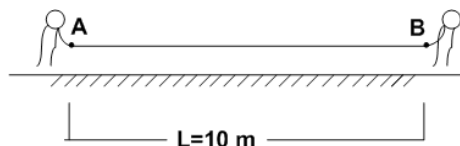
$$\Delta x_2 = \frac{v_2'^2}{2\mu g} = \frac{(2\text{m/s})^2}{2 \cdot 0,5 \cdot 10\text{m/s}^2} \Rightarrow \Delta x_2 = 0,4\text{m}$$

(Τα έργα των βαρών και των κάθετων αντιδράσεων είναι μηδενικά, διότι οι δυνάμεις αυτές είναι κάθετες στις αντίστοιχες μετατοπίσεις)

Η τελική απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων είναι: $S = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 1,3\text{m}$

Άσκηση 3.

Δύο μαθητές παγοδρόμοι Α και Β, με μάζες αντίστοιχα $m_1 = 40\text{Kg}$ και $m_2 = 60\text{Kg}$, κρατούν τις άκρες ενός σχοινιού αμελητέας μάζας. Οι μαθητές στέκονται αρχικά ακίνητοι πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο (παγοδρόμιο) απέχοντας μεταξύ τους $L = 10\text{m}$. Κάποια στιγμή οι μαθητές αρχίζουν να μαζεύουν το σχοινί ασκώντας δύναμη ο ένας στον άλλον, χωρίς να πέσει κανείς από τους δύο.



α) Να βρείτε ποια είναι η σχέση μεταξύ των δυνάμεων που ασκεί ο ένας μαθητής στον άλλο μέσω του σχοινιού.

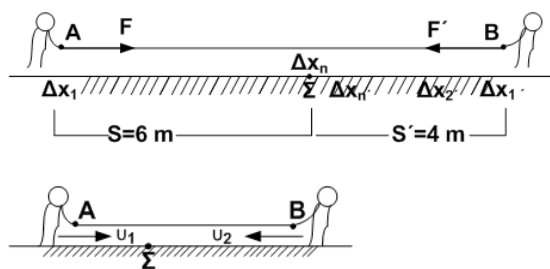
β) Να βρείτε τον λόγο των κινητικών ενεργειών που έχουν οι μαθητές ελάχιστα πριν τη στιγμή της συνάντησης.

γ) Αν ελάχιστα πριν τη στιγμή της συνάντησης, ο μαθητής Α έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου $v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ποιά θα είναι το μέτρο της ταχύτητας του μαθητή Β;

δ) Αν οι μαθητές τη στιγμή της σύγκρουσης αγκαλιαστούν και παραμείνουν αγκαλιασμένοι ποια θα είναι η κοινή τους ταχύτητα;

Λύση

α)



Οι δυνάμεις F και F' που ασκεί ο ένας μαθητής στον άλλο μέσω του σχοινιού είναι εσωτερικές δυνάμεις για το σύστημα μαθητές - σχοινί. Κάθε μαθητής ασκεί και δέχεται δύναμη από το σχοινί (δράση - αντίδραση). Επειδή το σχοινί είναι μη εκτατό η δύναμη μεταφέρεται από το ένα άκρο του σχοινιού στο άλλο και το μέτρο της είναι σταθερό. Συνεπώς σύμφωνα με τον 3^ο Νόμο του Νεύτωνα οι δυνάμεις που ασκούνται στους μαθητές από το σχοινί θα είναι αντίθετες. (Στο σχήμα παραβλέπονται οι δυνάμεις που ασκούν οι μαθητές στο σχοινί).

β) Το σύστημα μαθητές - σχοινί είναι ένα μονωμένο σύστημα σωμάτων. Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ορμής μεταξύ των δύο θέσεων:

$$\vec{p}_{\text{Τελ}} = \vec{p}_{\text{Αρχ}} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Rightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

Οι μαθητές ελάχιστα πριν τη συνάντησή τους έχουν αντίθετες ορμές και για τα μέτρα των ορμών τους ισχύει:

$$p_1 = p_2 = p \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας το β' μέλος του τύπου της κινητικής ενέργειας με τη μάζα m βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την κινητική ενέργεια με την ορμή:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \quad (2)$$

Ο ζητούμενος λόγος των κινητικών ενεργειών είναι:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{p_1^2}{2m_1}}{\frac{p_2^2}{2m_2}} = \frac{\frac{p^2}{2m_1}}{\frac{p^2}{2m_2}} \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{60\text{kg}}{40\text{kg}} \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{3}{2}$$

γ) Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 = \frac{40\text{kg}}{60\text{kg}} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2 = \frac{4}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ορμής μεταξύ των θέσεων λίγο πριν συναντηθούν και αμέσως μετά τη συνάντηση.

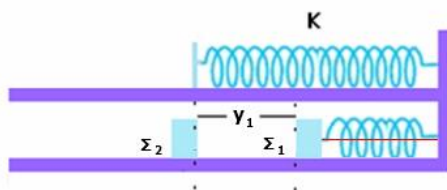
$$p_{\text{Αρχ}} = p_{\text{Τελ}} \Rightarrow m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \text{ από όπου προκύπτει } V = \frac{(m_1 v_1 - m_2 v_2)}{(m_1 + m_2)} = 0$$

Άσκηση 4.

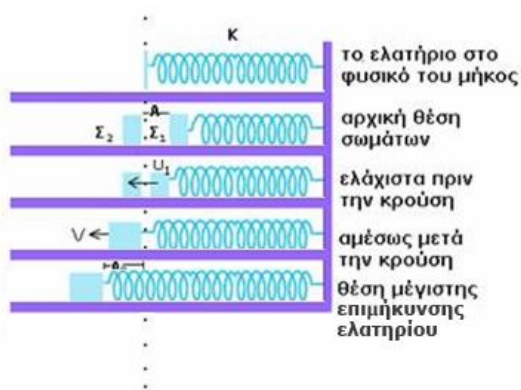
Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 , αμελητέων διαστάσεων, με μάζες $m_1 = 1\text{Kg}$ και $m_2 = 3\text{Kg}$ αντίστοιχα είναι τοποθετημένα σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο στη μία άκρη οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Η άλλη άκρη του ελατηρίου, είναι ακλόνητα στερεωμένη. Το ελατήριο με τη βοήθεια νήματος είναι συσπειρωμένο κατά $0,2\text{m}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σώμα Σ_2 βρίσκεται ακίνητο στο οριζόντιο επίπεδο στη θέση που αντιστοιχεί στο φυσικό μήκος ℓ_0 του ελατηρίου. Κάποια χρονική στιγμή κόβουμε το νήμα και το σώμα Σ_1 κινούμενο προς τα αριστερά συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με το σώμα Σ_2 , αν θεωρήσουμε τις διαστάσεις των σωμάτων αμελητέες, να υπολογίσετε:

- το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 λίγο πριν την κρούση του με το σώμα Σ_2 .
- το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος, αμέσως μετά την κρούση.
- το ποσό θερμότητας που μεταφέρθηκε από τα σώματα στο περιβάλλον.
- τη μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου.

Δίνεται $\pi = 3,14$.



Λύση



α) Η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ελάχιστο πριν την κρούση θα βρεθεί από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα Σ_1 - k μεταξύ των δύο θέσεων. Η αρχική του θέση είναι στη μέγιστη απομάκρυνση και η τελική θέση είναι η θέση ισορροπίας του.

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{kA^2}{m_1}} = \sqrt{\frac{100 \frac{N}{m} \cdot (0,2m)^2}{1kg}} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{m}{s}$$

β) Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της Ορμής (Α.Δ.Ο) για την κρούση:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V, \text{ από όπου προκύπτει}$$

$$V = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{1kg \cdot 2m/s}{(1kg + 3kg)} \Rightarrow V = 0,5 \frac{m}{s}$$

γ) Με βάση την αρχή διατήρησης της ενέργειας, η θερμότητα ισούται με την μείωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος:

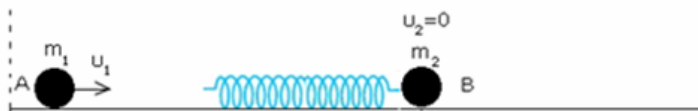
$$Q = |\Delta K| = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) V^2}{2} \Rightarrow Q = 2J - 0,5J = 1,5J$$

δ) Το συσσωμάτωμα θα κινηθεί υπό την επίδραση συντηρητικών δυνάμεων. Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης φυσικού μήκους και της ακραίας θέσης. Με Α συμβολίζουμε τη μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου.

$$\frac{(M + m) V^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{M + m}{k}} V = \sqrt{\frac{3kg + 1kg}{100N/m}} \cdot (0,5 \frac{m}{s}) \Rightarrow A = 0,1m$$

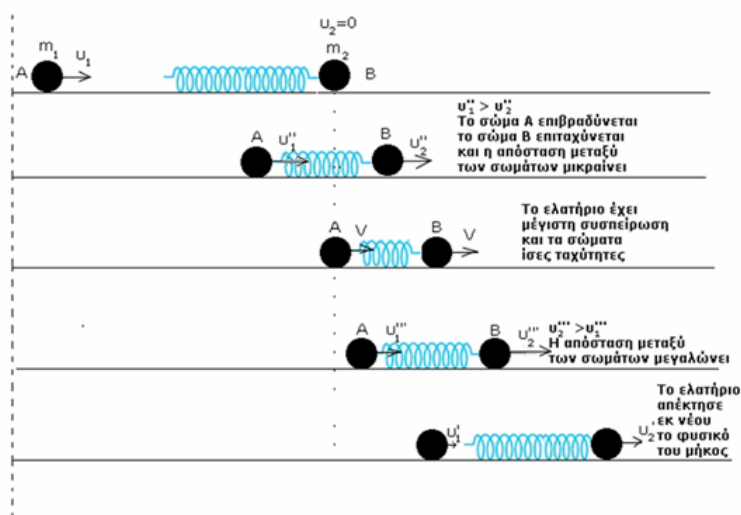
Άσκηση 5.

Ένα σώμα Σ_A , μάζας $m_1 = 10\text{Kg}$, κινείται με ταχύτητα $v_1 = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η διεύθυνση της ταχύτητας του σώματος Σ_A ταυτίζεται με τη διεύθυνση του άξονα ενός ιδανικού ελατηρίου το οποίο είναι στερεωμένο, όπως στο σχήμα, σε ακίνητο σώμα Σ_B , μάζας $m_2 = 30\text{Kg}$. Το σώμα Σ_A προσπίπτει στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου που αρχίζει να συσπειρώνεται.



- Να υπολογίσετε την ορμή και τη μηχανική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση.
- Να εξηγήσετε γιατί η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου συμβαίνει τη στιγμή που τα δύο σώματα έχουν κοινή ταχύτητα.
- Να υπολογίσετε την κοινή ταχύτητα των δύο σωμάτων την στιγμή που η παραμόρφωση του ελατηρίου θα είναι μέγιστη.
- Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυναμική ενέργεια που αποκτά το ελατήριο λόγω της παραμόρφωσης του.

Λύση



- Από το σύστημα των δύο σωμάτων και του ελατηρίου πριν την 'κρούση', ορμή και μηχανική ενέργεια είχε μόνο το Σ_A .

$$p_{αρχ} = m_1 v_1 = 4\text{kg} \cdot 10\text{m/s} \Rightarrow p_{αρχ} = 40\text{kgm/s}$$

$$E_{αρχ} = K_{αρχ} + U_{αρχ} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + 0 \Rightarrow E_{αρχ} = \frac{10\text{kg} \cdot (4\text{m/s})^2}{2} \Rightarrow E_{αρχ} = 80\text{J}$$

β) Από τη στιγμή που το σώμα Σ_A έρχεται σε επαφή με το ελατήριο, τότε το ελατήριο αρχίζει να συσπειρώνεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα σώματα Σ_A και Σ_B να δέχονται δυνάμεις από το ελατήριο. Συνεπώς το σώμα Σ_A να επιβραδύνεται και το Σ_B να επιταχύνεται. Όμως για όσο χρόνο η ταχύτητα του Σ_A είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του Σ_B μειώνεται η απόσταση μεταξύ των σωμάτων (πλησιάζουν) και η παραμόρφωση του ελατηρίου μεγαλώνει, συνεπώς αυξάνεται και η δυναμική ενέργεια λόγω παραμόρφωσης. Κάποια στιγμή οι ταχύτητές τους θα γίνουν ίσες, τότε η παραμόρφωση του ελατηρίου θα είναι μέγιστη και φυσικά η απόσταση μεταξύ των σωμάτων ελάχιστη. Από τη στιγμή αυτή και μετά θα μεγαλώνει η απόσταση των σωμάτων, γιατί η ταχύτητα του Σ_B εξακολουθεί να αυξάνεται και του Σ_A εξακολουθεί να μειώνεται. Αυτό συνεχίζεται μέχρις ότου το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του σχήμα. Άρα τη στιγμή που τα δύο σώματα έχουν κοινή ταχύτητα το ελατήριο έχει τη μέγιστη παραμόρφωση του.

γ) Οι δυνάμεις μεταξύ σωμάτων και ελατηρίου είναι εσωτερικές, έτσι σε όλη τη διάρκεια της "κρούσης" η ορμή του συστήματος διατηρείται.

Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ορμής για το σύστημα μεταξύ της θέσης που το σώμα Σ_A πρόκειται να ακουμπήσει το ελατήριο και της θέσης που το ελατήριο έχει υποστεί τη μέγιστη παραμόρφωση.

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow p_{αρχ} = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{p_{αρχ}}{(m_1 + m_2)} = \frac{40\text{kgm/s}}{(10\text{kg} + 30\text{kg})} \Rightarrow V = 1\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

δ) Το δάπεδο είναι λείο και το ελατήριο ιδανικό, οπότε η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου. Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα μεταξύ της θέσης που το σώμα Σ_A πρόκειται να ακουμπήσει το ελατήριο και της θέσης που το ελατήριο έχει υποστεί τη μέγιστη παραμόρφωση.

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + 0 = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} + U_{\max} \Rightarrow$$

$$U_{\max} = 80\text{J} - \frac{(10\text{kg} + 30\text{kg})(1\text{m/s})^2}{2} \Rightarrow U_{\max} = 60\text{J}$$

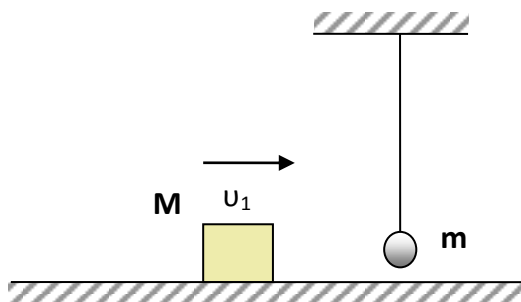
Άσκηση 6.

Ένα σώμα μάζας $M=4 \text{ kg}$ κινούμενο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται μετωπικά και ανελαστικά, έχοντας ταχύτητα u_1 με μια ακίνητη σφαίρα μάζας $m=3 \text{ kg}$, η οποία είναι κρεμασμένη με νήμα μήκους $\ell=0,9 \text{ m}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μετά την κρούση η σφαίρα εκτρέπεται και η μέγιστη γωνία που σχηματίζει το νήμα με την αρχική κατακόρυφη θέση του είναι $\varphi=60^\circ$, ενώ το σώμα μάζας M διανύει απόσταση $d=4 \text{ m}$ μέχρι να σταματήσει. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος μάζας M και του οριζόντιου δαπέδου είναι $\mu=0,2$.

Να υπολογίσετε:

- την ταχύτητα u_2' της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση.
- την ταχύτητα u_1' του σώματος μάζας M αμέσως μετά την κρούση.
- την ταχύτητα u_1 του σώματος μάζας M ελάχιστα πριν την κρούση.
- το μέτρο της τάσης του νήματος, αμέσως μετά την κρούση.

Δίνεται: $g=10 \text{ m/s}^2$.



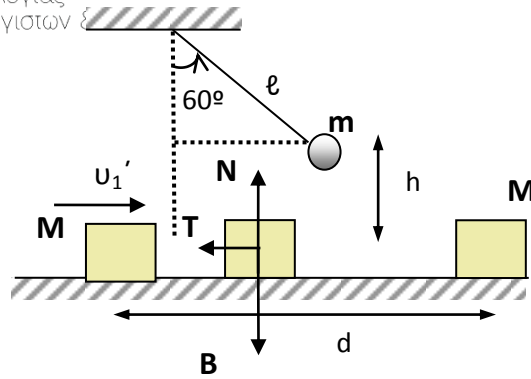
Λύση

α. Για την κίνηση της σφαίρας μετά την κρούση μέχρι να σταματήσει για πρώτη φορά εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας

$$W_w = \Delta K = K_{(\text{τελ})} - K_{(\text{αρχ})} \Rightarrow W_w = 0 - \frac{1}{2} m v_2'^2 \Rightarrow -mgh = -\frac{1}{2} m v_2'^2$$

$$\Rightarrow mg\ell(1 - \cos\varphi) = \frac{1}{2} m v_2'^2 \Rightarrow 2g\ell(1 - \cos\varphi) = v_2'^2 \Rightarrow v_2' = \sqrt{2g\ell(1 - \cos 60^\circ)} \Rightarrow$$

$$v_2' = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,9 \text{m} \left(1 - \frac{1}{2}\right)} \Rightarrow v_2' = 3 \text{ m/s}.$$



β. Για την κίνηση του σώματος μάζας M μετά την κρούση μέχρι να σταματήσει εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας.

$$W_T = \Delta K = K_{(τελ)} - K_{(αρχ)} \Rightarrow W_T = 0 - \frac{1}{2} M v_1'^2 \Rightarrow -T \cdot d = -\frac{1}{2} M v_1'^2$$

$$\Rightarrow -\mu \cdot N \cdot d = -\frac{1}{2} M v_1'^2 \Rightarrow -\mu M g d = -\frac{1}{2} M v_1'^2 \Rightarrow \mu M g d = \frac{1}{2} M v_1'^2$$

$$\Rightarrow 2\mu g d = v_1'^2 \Rightarrow v_1' = \sqrt{2\mu g d} \Rightarrow v_1' = \sqrt{2 \cdot 0,2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 4m} \Rightarrow v_1' = 4m/s.$$

γ. Από τη διατήρηση της ορμής κατά την κρούση προκύπτει:

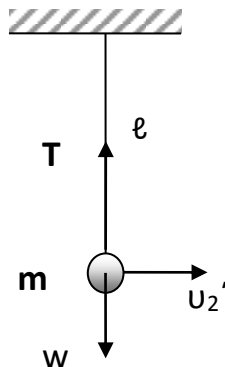
$$\vec{p}_{πριν} = \vec{p}_{μετά} \Rightarrow M v_1 = M v_1' + m v_2' \Rightarrow v_1 = \frac{M v_1' + m v_2'}{M} = \frac{4kg \cdot 4m/s + 3kg \cdot 3m/s}{4kg} \Rightarrow$$

$$v_1 = 6,25 m/s.$$

δ. Η συνισταμένη της τάσης του νήματος και του βάρους της σφαίρας θα είναι η κεντρομόλος δύναμη. Άρα

$$F_k = T - w \Rightarrow T - m \cdot g = \frac{m \cdot v_2'^2}{\ell} \Rightarrow T = m \cdot g + \frac{m \cdot v_2'^2}{\ell} \Rightarrow$$

$$T = 3kg \cdot 10m/s^2 + \frac{3kg \cdot (3m/s)^2}{0,9m} \Rightarrow T = 60N.$$



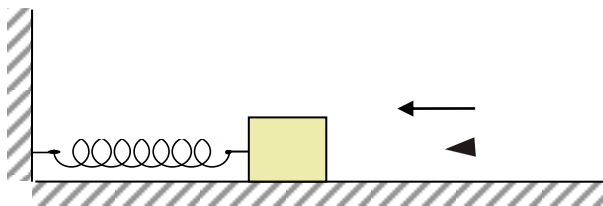
Άσκηση 7.

Ένα βλήμα μάζας $m=500\text{ g}$ κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα u_1 σφηνώνεται σε σώμα μάζας $M=9,5\text{ kg}$, που ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο, δεμένο στην άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k=80\text{ N/m}$, που βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, ενώ το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου είναι $x=0,5\text{ m}$. Η συνολική θερμότητα που απελευθερώνεται από την έναρξη της κρούσης μέχρι να σταματήσει το συσσωμάτωμα για πρώτη φορά είναι 390 J .

Να υπολογίσετε:

- την ταχύτητα u_1 του σώματος m .
- την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση.
- την τριβή ολίσθησης που ασκείται στο σώμα.
- το μέγιστο μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος από τη στιγμή που ξεκινά την κίνησή του μέχρι να επανέλθει το ελατήριο στο φυσικό του μήκος.

Δίνεται: $g=10\text{ m/s}^2$.



Λύση

α. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας όλη η κινητική ενέργεια που είχε το βλήμα πριν την κρούση θα μετατραπεί μέχρι να σταματήσει το συσσωμάτωμα για πρώτη φορά σε δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και σε θερμότητα λόγω της κρούσης και λόγω των τριβών στην κίνηση του συσσωματώματος. Αυτή η συνολική θερμότητα που απελευθερώνεται από την έναρξη της κρούσης είναι 390 J . Άρα

$$K_{\text{αρχ}} = U_{\text{ελ}} + Q \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}kx^2 + Q \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0,5\text{ kg} \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} 80 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,5\text{ m})^2 + 390\text{ J} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot 0,5\text{ kg} \cdot v_1^2 = 400\text{ J} \Rightarrow v_1^2 = 400 \cdot 4\text{ J/kg} \Rightarrow v_1 = 40\text{ m/s}.$$

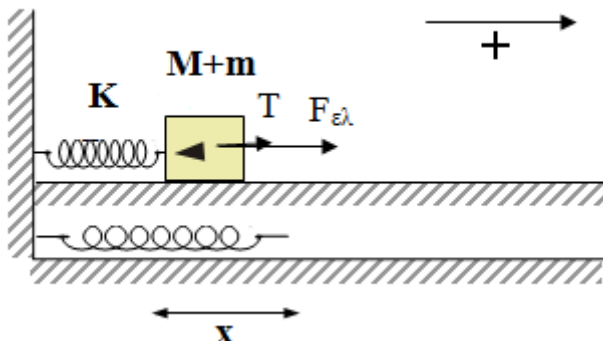
β. Από τη διατήρηση της ορμής κατά την κρούση προκύπτει για το συσσωμάτωμα, που κινείται με ταχύτητα V μετά την κρούση:

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \Rightarrow m \cdot v_1 = (M + m) \cdot V \Rightarrow V = \frac{m \cdot v_1}{M + m} = \frac{0,5\text{kg} \cdot 40\text{m/s}}{9,5\text{kg} + 0,5\text{kg}} \Rightarrow V = 2\text{m/s}.$$

γ. Με χρήση της αρχής διατήρησης της ενέργειας από τη στιγμή μετά την κρούση μέχρι να σταματήσει το συσσωμάτωμα για πρώτη φορά έχουμε

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = \frac{1}{2}kx^2 + Q_T \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 10\text{kg} \cdot (2\text{m/s})^2 = \frac{1}{2}80\text{N/m} \cdot (0,5\text{m})^2 + |W_T| \Rightarrow 20\text{J} = 10\text{J} + |T \cdot 0,5\text{m}| \Rightarrow T = 20\text{N}.$$

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται το συσσωμάτωμα. Στο συσσωμάτωμα ασκούνται δύο δυνάμεις, η τριβή και η $F_{\text{ελ}}$. Το μέτρο της συνισταμένης παίρνει τη μέγιστη τιμή του ελάχιστα πριν το συσσωμάτωμα σταματήσει στην ακραία θέση, όπου οι δύο δυνάμεις έχουν την ίδια κατεύθυνση και η τιμή της $F_{\text{ελ}}$ έχει μέγιστο μέτρο. Παίρνοντας τα θετικά προς τα δεξιά έχουμε:



$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |\Sigma F| = |F_{\text{ελ}}| + T = |kx| + T \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 80 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,5\text{m} + 20\text{N} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 60 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}.$$

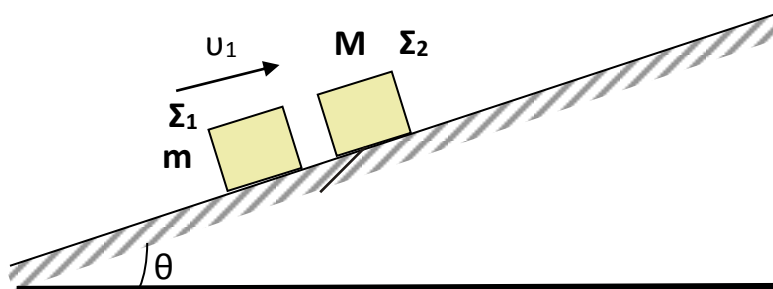
Άσκηση 8.

Ένα σώμα Σ_1 , μάζας $m=2\text{kg}$, κινούμενο πάνω σε πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης θ , προσπίπτει με ταχύτητα $u_1 = 6\text{m/s}$ σε ακίνητο σώμα Σ_2 , μάζας $M=4\text{kg}$, με το οποίο συγκρούεται ελαστικά. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων και του πλάγιου δαπέδου είναι $\mu = 0,25$.

Να υπολογίσετε:

- τις ταχύτητες u_1' και u_2' των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.
- την απόσταση d_2 που διανύει το σώμα Σ_2 μέχρι να σταματήσει.
- το χρονικό διάστημα που κινήθηκε το σώμα Σ_2 μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.
- τη θερμότητα που αναπτύχθηκε μεταξύ του σώματος Σ_1 και του δαπέδου από τη στιγμή της κρούσης μέχρι τη στιγμή που σταματά στιγμιαία το σώμα Σ_2 .

Δίνονται: $\eta\mu\theta = 0,6$, $\sigma\upsilon\nu\theta = 0,8$, $g = 10\text{ m/s}^2$.



Λύση

α. Η κρούση είναι κεντρική ελαστική. Τα σώματα μετά την κρούση θα κινηθούν στην ίδια διεύθυνση με ταχύτητες που δίνονται από τις σχέσεις:

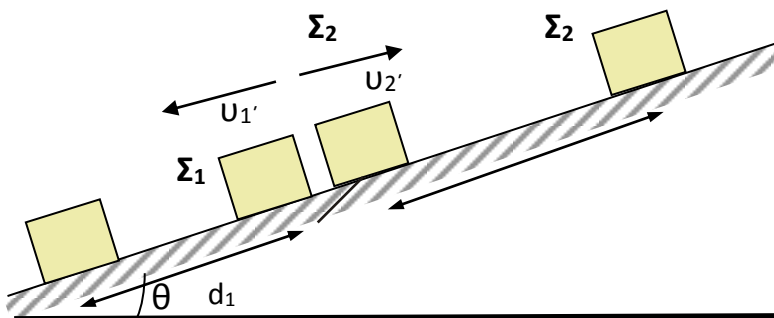
$$v'_1 = \frac{m-M}{m+M} v_1 \quad (1)$$

$$v'_2 = \frac{2m}{m+M} v_1 \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε

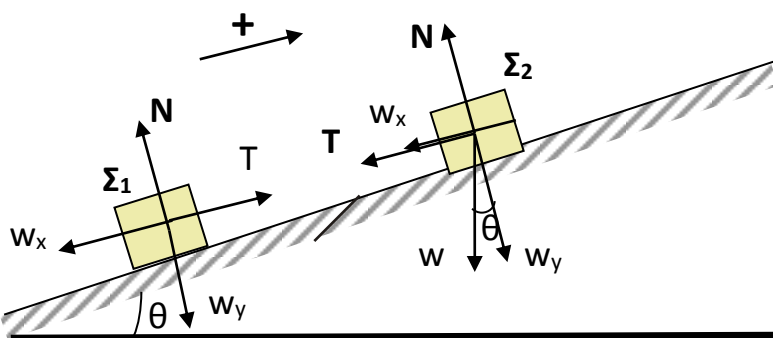
$$v'_1 = \frac{m-M}{m+M} v_1 = \frac{2\text{kg}-4\text{kg}}{2\text{kg}+4\text{kg}} \cdot 6\text{m/s} \Rightarrow v'_1 = -2\text{m/s}.$$

$$v'_2 = \frac{2m}{m+M} v_1 \Rightarrow v'_2 = \frac{2 \cdot 2\text{kg}}{2\text{kg} + 4\text{kg}} 6\text{m/s} \Rightarrow v'_2 = 4\text{m/s}.$$



β. Για την κίνηση του σώματος Σ₂ μετά την κρούση μέχρι να σταματήσει εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας

$$W_w + W_T = K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} \quad (1)$$



Η τριβή δίνεται από τη σχέση $T = \mu \cdot N$ και $N = w_y$. Άρα η σχέση (1) γίνεται

$$-w_x \cdot d_2 - T \cdot d_2 = -\frac{1}{2} M v_2'^2 \Rightarrow -Mg \cdot \eta\mu\varphi \cdot d_2 - \mu \cdot Mg \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot d_2 = -\frac{1}{2} M v_2'^2$$

$$\Rightarrow -g \cdot \eta\mu\varphi \cdot d_2 - \mu \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot d_2 = -\frac{1}{2} v_2'^2 \Rightarrow d_2 = \frac{v_2'^2}{2g(\eta\mu\varphi + \mu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi)} \Rightarrow$$

$$d_2 = \frac{(4\text{m/s})^2}{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (0,6 + 0,25 \cdot 0,8)} \Rightarrow d_2 = 1\text{m}$$

γ. Θα βρούμε σε πόσο χρόνο θα σταματήσει το σώμα Σ₂. Πρώτα ας βρούμε την επιτάχυνσή του. Παίρνοντας ως θετική φορά αυτήν της αρχικής ταχύτητας του σώματος Σ₁ έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= M \cdot \alpha_2 \Rightarrow -w_x - T = M \cdot \alpha_2 \Rightarrow -M \cdot g \cdot \eta\mu\varphi - \mu \cdot N = M \cdot \alpha_2 \Rightarrow \\ -M \cdot g \cdot \eta\mu\varphi - \mu \cdot M \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi &= M \cdot \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = -g(\eta\mu\varphi + \mu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi) \Rightarrow \\ \alpha_2 &= -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (0,6 + 0,25 \cdot 0,8) \Rightarrow \alpha_2 = -8 \text{ m/s}^2.\end{aligned}$$

Ο χρόνος κίνησης θα προκύψει από τη σχέση

$$v = v_2' + \alpha_2 \cdot t \Rightarrow 0 = 4 - 8 \cdot t \Rightarrow t = 0,5 \text{ s}.$$

δ. Η θερμότητα που αναπτύχθηκε μεταξύ του σώματος Σ_1 και του δαπέδου από τη στιγμή της κρούσης μέχρι τη στιγμή που το σώμα Σ_2 σταματά είναι $Q = |W_T| = |\mu \cdot m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot d_1|$, όπου το d_1 δηλώνει τη μετατόπιση του σώματος Σ_1 στο χρονικό διάστημα των 0,5s.

Η επιτάχυνση του σώματος Σ_1 είναι:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= m \cdot \alpha_1 \Rightarrow -w_x + T = m \cdot \alpha_1 \Rightarrow -m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi + \mu \cdot N = m \cdot \alpha_1 \Rightarrow \\ -m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi + \mu \cdot m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi &= m \cdot \alpha_1 \Rightarrow -g \cdot \eta\mu\varphi + \mu \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \alpha_1 \Rightarrow \\ \alpha_1 &= g(-\eta\mu\varphi + \mu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi) = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (-0,6 + 0,25 \cdot 0,8) \Rightarrow \alpha_1 = -4 \text{ m/s}^2.\end{aligned}$$

Στο χρονικό διάστημα των 0,5s το Σ_1 θα μετατοπισθεί κατά d_1 , που είναι ίσο με:

$$d_1 = v_1' t + \frac{1}{2} \alpha_1 \cdot t^2 = -(2 \text{ m/s}) \cdot 0,5 \text{ s} + \frac{1}{2} (-4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot (0,5 \text{ s})^2 \Rightarrow d_1 = -1,5 \text{ m}.$$

Με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση της θερμότητας παίρνουμε:

$$Q = |W_T| = |\mu \cdot m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot d_1| = 0,25 \cdot 2 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,8 \cdot 1,5 \text{ m} \Rightarrow Q = 6 \text{ J}.$$

Άσκηση 9.



Δύο σώματα Σ_A και Σ_B , μάζας $m_A=3\text{kg}$ και $m_B=1\text{kg}$ αντίστοιχα, κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο στην ίδια κατεύθυνση, με το σώμα B να προπορεύεται. Τα δύο σώματα εκτελούν ευθύγραμμες ομαλές κινήσεις, το σώμα Σ_A με ταχύτητα $u_A=10\text{ m/s}$ και το σώμα Σ_B με ταχύτητα u_B . Τη χρονική στιγμή $t=0$ η απόσταση μεταξύ των σωμάτων είναι $d=10\text{m}$. Τα δύο σώματα συγκρούονται ελαστικά μετωπικά τη χρονική στιγμή $t_1=5\text{ s}$.

Να υπολογίσετε:

A) την ταχύτητα u_B του σώματος B.

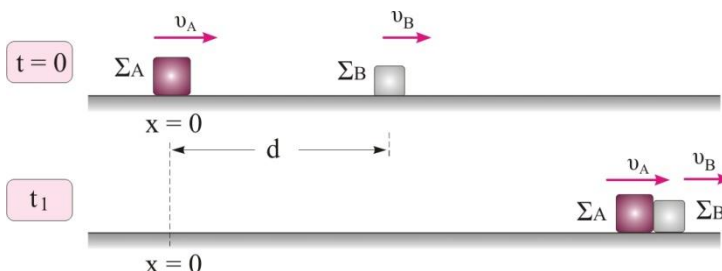
B) τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση.

Γ) το ποσοστό % της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος A που μεταφέρθηκε στο σώμα B.

Δ) τη χρονική στιγμή t_2 που τα δύο σώματα θα απέχουν μεταξύ τους πάλι απόσταση $d=10\text{m}$.

Λύση

A) Θεωρούμε σημείο αναφοράς τη θέση του σώματος Σ_A τη χρονική στιγμή $t=0$. Οι εξισώσεις που δίνουν τη θέση των δύο σωμάτων σε σχέση με το χρόνο είναι:



$$x_A = v_A t \Rightarrow x_A = 10t \quad (\text{SI})$$

$$x_B = d + v_B t \Rightarrow x_B = 10 + v_B t \quad (\text{SI})$$

Όταν τα δύο σώματα συναντηθούν ισχύει $x_A = x_B$, οπότε παίρνουμε

$$10\text{m} + v_B t = 10t \Rightarrow 10\text{m} + v_B 5\text{s} = 10 \cdot 5\text{m} \Rightarrow v_B = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

B) Η κρούση των δύο σωμάτων είναι μετωπική ελαστική. Τα σώματα μετά την κρούση θα κινηθούν στην ίδια διεύθυνση με ταχύτητες που δίνονται από τις σχέσεις:

$$v'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A + \frac{2m_B}{m_A + m_B} v_B \quad (1)$$

$$v'_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A + \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} v_B \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$v'_A = \frac{3\text{kg} - 1\text{kg}}{3\text{kg} + 1\text{kg}} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{2 \cdot 1\text{kg}}{3\text{kg} + 1\text{kg}} \cdot 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_A = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Από τη σχέση (2) παίρνουμε

$$v'_B = \frac{2 \cdot 3\text{kg}}{3\text{kg} + 1\text{kg}} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{1\text{kg} - 3\text{kg}}{3\text{kg} + 1\text{kg}} \cdot 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_B = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Γ) Το ποσοστό % της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_A που μεταφέρθηκε στο σώμα Σ_B είναι:

$$\frac{\Delta K_B}{K_A} \cdot 100\% = \frac{K'_B - K_B}{K_A} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_B v'^2_B - \frac{1}{2} m_B v_B^2}{\frac{1}{2} m_A v_A^2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

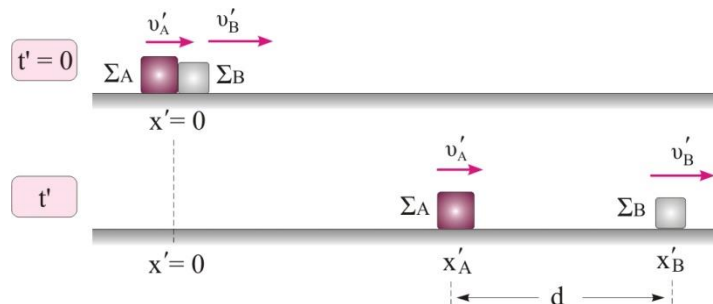
$$\frac{\Delta K_B}{K_A} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} 1\text{kg} \cdot \left(11 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{1}{2} 1\text{kg} \cdot \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\frac{1}{2} 3\text{kg} \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta K_B}{K_A} \cdot 100\% = \frac{60,5 - 32}{150} \cdot 100\% = \frac{28,5}{150} \cdot 100\% \Rightarrow \frac{\Delta K_B}{K_A} \cdot 100\% = 19\%.$$

Δ) Θεωρώντας νέο σημείο αναφοράς τη θέση της κρούσης, και $t' = 0$ τη στιγμή της κρούσης, οι θέσεις των σωμάτων δίνονται από τις σχέσεις:

$$x'_A = v'_A t' \Rightarrow x'_A = 9t' \quad (\text{SI})$$

$$x'_B = v'_B t' \Rightarrow x'_B = 11t' \quad (\text{SI})$$



Όταν θα απέχουν μεταξύ τους $d = 10 \text{ m}$ θα ισχύει

$$x'_B - x'_A = d = 10\text{m} \Rightarrow 11 \frac{\text{m}}{\text{s}} t' - 9 \frac{\text{m}}{\text{s}} t' = 10\text{m} \Rightarrow t' = 5\text{s}.$$

Άρα, η χρονική στιγμή t_2 που τα δύο σώματα θα απέχουν πάλι απόσταση d είναι

$$t_2 = t_1 + t' = 5\text{s} + 5\text{s} = 10\text{s}.$$

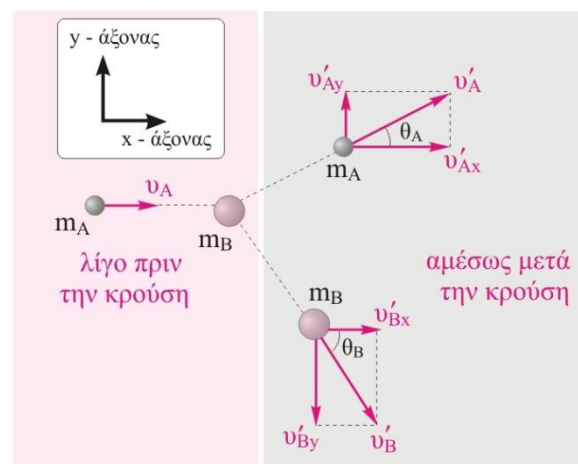
Άσκηση 10. Νέο

Μια σφαίρα Α, μάζας $m_A=1\text{ kg}$ κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $u_A = 8\text{ m/s}$ και συγκρούεται πλάγια με ακίνητη σφαίρα, Β, μάζας $m_B=2\text{ kg}$. Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται σε κατευθύνσεις που σχηματίζουν με την ταχύτητα u_A γωνίες $\theta_A=30^\circ$ και $\theta_B=60^\circ$, αντίστοιχα.
Να υπολογίσετε:

- Α) τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σφαιρών μετά την κρούση.
- Β) τη μεταβολή της ορμής της κάθε σφαίρας κατά την κρούση.
- Γ) πόσο θα απέχουν οι σφαίρες 2 s μετά την κρούση.
- Δ) τη θερμότητα που ελευθερώθηκε κατά την κρούση.

Λύση

Α) Η αρχή διατήρησης της ορμής ισχύει σε κάθε άξονα ξεχωριστά, αφού κατά την κρούση το σύστημα των δύο σφαιρών θεωρείται μονωμένο. Έστω u_A' και u_B' , τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σφαιρών μετά την κρούση, αντίστοιχα.
Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον άξονα x:



$$\vec{p}_{x,\text{πριν}} = \vec{p}_{x,\text{μετά}} \Rightarrow m_A u_A = m_A u_A' \cos \theta_A + m_B u_B' \cos \theta_B \Rightarrow$$

$$1\text{kg} \cdot 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1\text{kg} \cdot u_A' \cos 30^\circ + 2\text{kg} \cdot u_B' \cos 60^\circ \Rightarrow 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = u_A' \frac{\sqrt{3}}{2} + 2u_B' \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = u_A' \frac{\sqrt{3}}{2} + u_B' \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον άξονα y:

$$\vec{p}_{y,\text{πριν}} = \vec{p}_{y,\text{μετά}} \Rightarrow 0 = m_A u_A' \sin \theta_A - m_B u_B' \sin \theta_B \Rightarrow$$

$$0 = 1\text{kg} \cdot u_A' \sin 30^\circ - 2\text{kg} \cdot u_B' \sin 60^\circ \Rightarrow 0 = u_A' \frac{1}{2} - 2u_B' \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$u_A' = 2\sqrt{3}u_B' \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των σχέσεων (1) και (2) και υπολογίζουμε τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σφαιρών μετά την κρούση

$$(1) \Rightarrow 8 \frac{m}{s} = 2\sqrt{3}v_B' \frac{\sqrt{3}}{2} + v_B' \Rightarrow v_B' = 2 \frac{m}{s} \quad \text{και}$$

$$(2) \Rightarrow v_A' = 2\sqrt{3} \cdot 2 \frac{m}{s} = 4\sqrt{3} \frac{m}{s}.$$

Β) Θα υπολογίσουμε πρώτα τη μεταβολή της ορμής της σφαίρας Β.

$$\Delta p_B = p_{B(\text{μετά})} - p_{B(\text{πριν})} \Rightarrow \Delta p_B = m_B v_B' - 0 \Rightarrow \Delta p_B = 2\text{kg} \cdot 2 \frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$\Delta p_B = 4 \frac{\text{kgm}}{s}.$$

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Β έχει διεύθυνση και φορά ίδια με την ταχύτητα u_2' , δηλαδή σχηματίζει με την ταχύτητα u_A γωνία $\theta_B = 60^\circ$.

Κατά τη διάρκεια κάθε κρούσης δύο σωμάτων ισχύει $\Delta \vec{p}_{\text{ολ}} = 0$, όμως

$$\Delta \vec{p}_{\text{ολ}} = \Delta \vec{p}_A + \Delta \vec{p}_B \Rightarrow 0 = \Delta \vec{p}_A + \Delta \vec{p}_B \Rightarrow \Delta \vec{p}_A = -\Delta \vec{p}_B \quad (3)$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Α είναι αντίθετη της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Β και έχει μέτρο

$$\Delta p_A = 4 \frac{\text{kgm}}{s}.$$

Γ) Μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = 2\text{s}$ οι σφαίρες μετατοπίζονται κατά

$$\Delta x_A = v_A' \Delta t = 4\sqrt{3} \frac{m}{s} \cdot 2\text{s} = 8\sqrt{3}\text{m}$$

$$\Delta x_B = v_B' \Delta t = 2 \frac{m}{s} \cdot 2\text{s} = 4\text{m}.$$

Οι κατευθύνσεις των μετατοπίσεων σχηματίζουν γωνία 90° και με το πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε πόσο θα απέχουν οι σφαίρες 2 s μετά την κρούση

$$d = \sqrt{\Delta x_A^2 + \Delta x_B^2} \Rightarrow d = \sqrt{(8\sqrt{3}\text{m})^2 + (4\text{m})^2} \Rightarrow d = \sqrt{208}\text{m}.$$

Δ) Η θερμότητα που ελευθερώθηκε κατά την κρούση είναι

$$Q = |\Delta K| = K_{(\alpha\rho\chi)} - K_{(\tau\epsilon\lambda)} = \frac{1}{2}m_A v_A^2 - \frac{1}{2}m_A v_A'^2 - \frac{1}{2}m_B v_B'^2 \Rightarrow$$

$$Q = \frac{1}{2}1\text{kg} \cdot (8\text{m/s})^2 - \frac{1}{2}1\text{kg} \cdot (4\sqrt{3}\text{m/s})^2 - \frac{1}{2}2\text{kg} \cdot (2\text{m/s})^2 \Rightarrow$$

$$Q = 4\text{J}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Ένα σώμα μάζας m_1 κινούμενο σε οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 10 \frac{m}{s}$ κεντρικά και ελαστικά με σώμα μάζας $m_2 = 3Kg$ που κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_2 = 15 \frac{m}{s}$ σε αντίθετη κατεύθυνση από το m_1 . Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα. Αμέσως μετά την κρούση το σώμα μάζας m_1 κινείται με αντίθετη φορά από την αρχική του και με ταχύτητα μέτρου $v'_1 = 5 \frac{m}{s}$.

α) Να προσδιορίσετε τη μάζα m_1 .

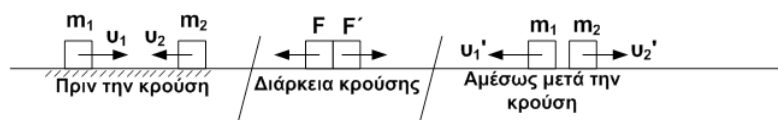
β) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση.

γ) Να βρεθεί το % ποσοστό της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1 σε σχέση με την αρχική κινητική του ενέργεια, λόγω της κρούσης.

δ) Να υπολογισθεί πόσο θα απέχουν τα σώματα όταν σταματήσουν. Δίνεται ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του επιπέδου και κάθε σώματος είναι $\mu = 0,5$.

Δίνεται $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

Λύση



α) Έχουμε κεντρική ελαστική κρούση δύο σωμάτων που είναι και τα δύο σε κίνηση. Εφαρμόζουμε τους αντίστοιχους τύπους του σχολικού βιβλίου.

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad (1)$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \quad (2)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι αλγεβρικές, λαμβάνονται δηλαδή υπόψη τα πρόσημα των ταχυτήτων. Στην περίπτωσή μας έχουμε ορίσει θετική φορά προς τα δεξιά, δηλαδή τη φορά της ταχύτητας v_1 .

Με αριθμητική αντικατάσταση στην σχέση (1) παίρνουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \Rightarrow -5 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} 10 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} (-15) \quad (\text{SI}) \Rightarrow$$

$$-5(m_1 + m_2) = 10m_1 - 40m_2 \Rightarrow$$

$$3m_1 = 7m_2 \Rightarrow m_1 = 7\text{Kg}$$

β) Με αριθμητική αντικατάσταση στην σχέση (2) παίρνουμε:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \Rightarrow v_2' = \frac{2 \cdot 7}{10} 10 + \frac{3 - 7}{10} (-15) \quad (\text{SI}) \Rightarrow v_2' = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ)

$$a \% = \frac{\Delta K_1}{K_{1(\text{αρχ})}} \cdot 100\% = \frac{K_{1(\text{τελ})} - K_{1(\text{αρχ})}}{K_{1(\text{αρχ})}} \cdot 100\% = \left(\frac{K_{1(\text{τελ})}}{K_{1(\text{αρχ})}} - 1 \right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

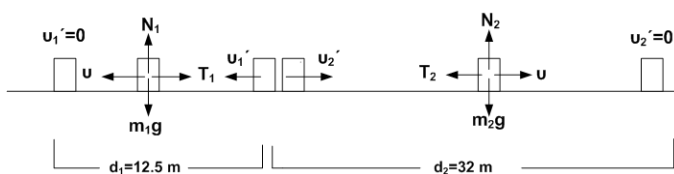
$$a \% = \left(\frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} - 1 \right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$a \% = \left(\frac{v_1'^2}{v_1^2} - 1 \right) \cdot 100\% = \left(\frac{(5\text{m/s})^2}{(10\text{m/s})^2} - 1 \right) \cdot 100\% \Rightarrow a \% = -75\%$$

Το (-) δηλώνει ότι η ενέργειά του μειώθηκε.

δ) Για τη δύναμη της τριβής που αναπτύσσεται στα δύο σώματα ισχύει:

$$T_1 = \mu N_1 = \mu m_1 g \quad \text{και} \quad T_2 = \mu N_2 = \mu m_2 g.$$



Παρατηρούμε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης η κινητική ενέργεια του σώματος ελαττώνεται μόνο λόγω του έργου της τριβής. Μέσω του έργου της τριβής αφαιρείται κινητική ενέργεια από τα σώματα και μετατρέπεται σε θερμική, μέχρις ότου όλη η κινητική ενέργεια γίνει θερμική και τα σώματα σταματήσουν.

Συνεπώς από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, έχουμε:

Για το σώμα μάζας m_1 το έργο της τριβής θα είναι ίσο με την κινητική ενέργεια:

$$T_1 \cdot d_1 = \frac{m_1 v_1'^2}{2} \Rightarrow \mu m_1 g d_1 = \frac{m_1 v_1'^2}{2} \Rightarrow d_1 = \frac{v_1'^2}{2\mu g} = \frac{(5\text{m/s})^2}{2 \cdot 0,5 \cdot 10\text{m/s}^2} \Rightarrow d_1 = 2,5\text{m}$$

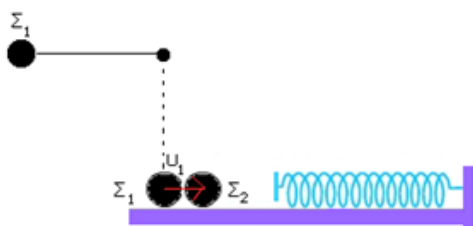
Ομοίως για το σώμα μάζας m_2 το έργο της τριβής θα είναι ίσο με την κινητική ενέργεια:

$$T_2 d_2 = \frac{m_2 v_2'^2}{2} \Rightarrow \mu m_2 g d_2 = \frac{m_2 v_2'^2}{2} \Rightarrow d_2 = \frac{v_2'^2}{2\mu g} = \frac{(20\text{m/s})^2}{2 \cdot 0,5 \cdot 10\text{m/s}^2} \Rightarrow d_2 = 40\text{m}$$

Άρα η μεταξύ τους απόσταση είναι:

$$d = d_1 + d_2 = 2,5\text{m} + 40\text{m} \Rightarrow d = 42,5\text{m}$$

Πρόβλημα 2.



Ένα σώμα Σ_1 με μάζα $m_1 = 1\text{Kg}$ είναι δεμένο με αβαρές και μη εκτατό νήμα μήκους $L = 1,8\text{m}$, του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αρχικά το νήμα είναι οριζόντιο. Αφήνουμε ελεύθερο το σώμα Σ_1 να κινηθεί. Το σώμα Σ_1 μόλις το νήμα γίνει κατακόρυφο, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = m_1$, που είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα Σ_2 μετά την κρούση συναντά και συγκρούεται με το ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\text{N/m}$, του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη, όπως στο σχήμα. Το σώμα Σ_2 συμπιέζει το ελατήριο και στη συνέχεια συναντά εκ νέου το σώμα Σ_1 και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά για δεύτερη φορά με αυτό. Να θεωρηθούν οι τριβές και η αντίσταση του αέρα αμελητέες.

α) Να βρείτε το μέτρο της τάσης του νήματος ελάχιστα πριν τη σύγκρουση του σώματος Σ_1 με το σώμα Σ_2 .

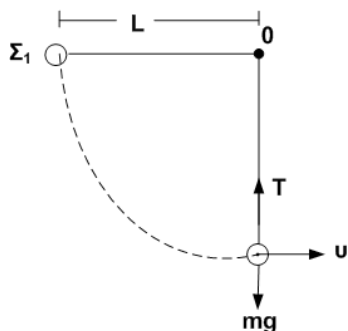
β) Να βρείτε τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου.

δ) Να βρείτε το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το σώμα Σ_1 που είναι δεμένο με το νήμα μετά τη δεύτερή του κρούση με το σώμα Σ_2 .

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Λύση



α) Στην κατώτερη θέση η συνισταμένη του βάρους και της τάσης του νήματος θα ισούται με την κεντρομόλο δύναμη, η οποία θα έχει φορά προς τα πάνω και μέτρο που βρίσκεται από τη σχέση:

$$\Sigma F = \frac{mv^2}{L} \Rightarrow T - mg = \frac{mv^2}{L} \Rightarrow T = m(g + \frac{v^2}{L}) \quad (1)$$

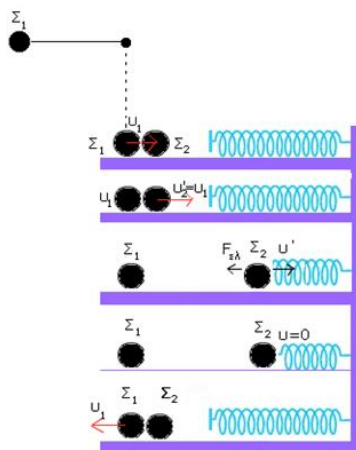
Το σώμα Σ_1 διαγράφει το τεταρτοκύκλιο. Η τάση του νήματος που ασκείται σε αυτό δεν παράγει έργο. Έργο παράγει μόνο το βάρος του, που είναι συντηρητική δύναμη. Τριβές ή αντιστάσεις δεν υπάρχουν. Έτσι εφαρμόζοντας τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας, για τις δύο θέσεις, οριζόντια και κατακόρυφη, μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα v του Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας του σώματος λόγω του βαρυτικού πεδίου, εκείνο στο οποίο το σώμα βρίσκεται στην κατώτατη θέση.

$$E_{\mu\eta\chi, \alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi, \tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mgL \Rightarrow v = \sqrt{2gL} = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 1,8 \text{ m}} \Rightarrow v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$T = 1 \text{ kg} \cdot (10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{(6 \text{ m/s})^2}{1,8 \text{ m}}) \Rightarrow T = 30 \text{ N}$$

β) Τα δύο σώματα έχουν ίσες μάζες και η κρούση είναι ελαστική κεντρική, άρα τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Έτσι το σώμα Σ_1 μένει ακίνητο και το Σ_2 κινείται με την ταχύτητα του Σ_1 , δηλαδή με ταχύτητα μέτρου $v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



γ) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα Σ_2 -k είναι συντηρητικές.

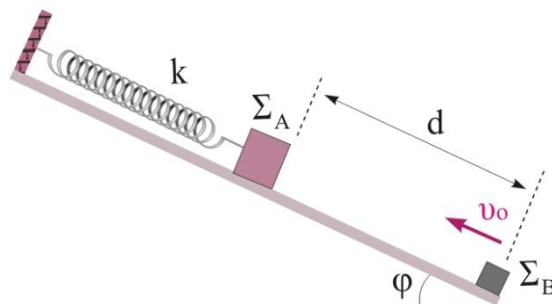
Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης που το Σ_2 συναντά το ελατήριο στο φυσικό του μήκος και της θέσης της μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου. Με A δηλώνουμε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.

$$\frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m_2}{k}} u = \sqrt{\frac{1\text{kg}}{100\text{N/m}}} \cdot (6\frac{\text{m}}{\text{s}}) \Rightarrow A = 0,6\text{m}$$

δ) Το σώμα Σ_2 εγκαταλείπει το ελατήριο με ταχύτητα μέτρου u_1 και συναντά το σώμα Σ_1 ακίνητο στη θέση όπου το νήμα είναι κατακόρυφο. Στην κρούση που ακολουθεί τα σώματα θα ανταλλάξουν ταχύτητες, άρα η ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα Σ_1 θα έχει μέτρο ίσο με αυτό που είχε πριν συγκρουστεί για πρώτη φορά. Συνεπώς, επειδή η μηχανική ενέργεια διατηρείται, θα φτάσει ξανά στην αρχική θέση από όπου αφέθηκε ελεύθερο, δηλαδή στη θέση όπου το νήμα θα είναι οριζόντιο.

Πρόβλημα 3. Νέο

Ένα σώμα Σ_A , μάζας $m_A = 4 \text{ kg}$, ισορροπεί πάνω σε λείο πλάγιο επίπεδο γωνίας $\varphi = 30^\circ$, δεμένο στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200 \text{ N/m}$, η άλλη άκρη του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένη. Από τη βάση του πλάγιου επιπέδου και από απόσταση d από το σώμα Σ_A , εκτοξεύουμε προς την κορυφή του πλάγιου επιπέδου ένα δεύτερο σώμα Σ_B , μάζας $m_B = 4 \text{ kg}$, με αρχική ταχύτητα $u_0 = 2 \text{ m/s}$, όπως φαίνεται στο



διπλανό σχήμα. Η σύγκρουση των δύο σωμάτων είναι πλαστική. Μετά τη σύγκρουση, το συσσωμάτωμα ξεκινά απλή αρμονική ταλάντωση και μηδενίζει για πρώτη φορά την ταχύτητα του στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Να υπολογίσετε:

Α) τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_A .

Β) την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Γ) την απόσταση d μεταξύ του σώματος Σ_A και του σώματος Σ_B .

Δ) την περίοδο της ταλάντωσης και να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος σε σχέση με το χρόνο, αν θεωρήσουμε $t=0$ τη χρονική στιγμή της κρούσης και θετική φορά προς τα πάνω.

Δίνονται: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$.

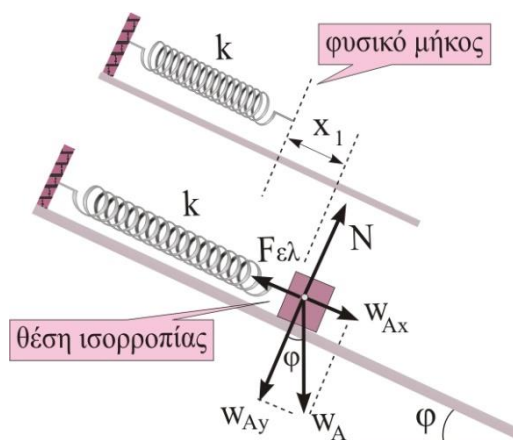
Λύση

Α) Η δυναμική ενέργεια ενός ελατηρίου

βρίσκεται από τη σχέση $U_{ελ} = \frac{1}{2} kx^2$, (1)

όπου x η παραμόρφωσή του από το φυσικό του μήκος.

Στην αρχική θέση ισορροπίας, το σώμα Σ_A ισορροπεί με την επίδραση του βάρους, της δύναμης στήριξης από το πλάγιο επίπεδο και της δύναμης του ελατηρίου. Μετά την ανάλυση του βάρους σε δύο κάθετες συνιστώσες έχουμε



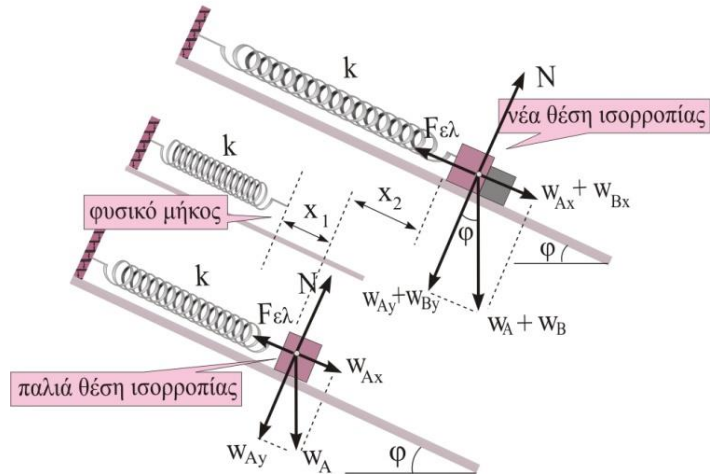
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow w_{Ax} = F_{ελ} \Rightarrow m_A g \cdot \eta \mu \phi = kx_1 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{m_A g \cdot \eta \mu \phi}{k} \Rightarrow x_1 = \frac{4 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5}{200 \frac{\text{N}}{\text{m}}} \Rightarrow x_1 = 0,1 \text{ m}.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) βρίσκουμε τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} k x_1^2 \Rightarrow U_{ελ} = \frac{1}{2} \cdot 200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,1 \text{ m})^2 \Rightarrow U_{ελ} = 1 \text{ J}.$$

Β) Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας η οποία είναι μετατοπισμένη προς τα κάτω κατά x_2 από την αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_A . Η μετατόπιση x_2 βρίσκεται από τη συνθήκη ισορροπίας στη νέα θέση.



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow w_{AB,x} = F_{ελ} \Rightarrow (m_A + m_B) g \cdot \eta \mu \phi = k(x_1 + x_2) \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{(m_A + m_B) g \cdot \eta \mu \phi}{k} - x_1 \Rightarrow x_2 = \frac{(4 \text{ kg} + 4 \text{ kg}) \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5}{200 \frac{\text{N}}{\text{m}}} - 0,1 \text{ m} \Rightarrow$$

$$x_2 = 0,1 \text{ m}.$$

Εφόσον μετά τη σύγκρουση το συσσωμάτωμα σταματά στιγμιαία στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου το πλάτος της ταλάντωσής του ισούται με

$$A = x_1 + x_2 \Rightarrow A = 0,1 \text{ m} + 0,1 \text{ m} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}.$$

Η ταχύτητα του συσσωματώματος V αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση του συσσωματώματος, μεταξύ των εξής δύο θέσεων: της θέσης αμέσως μετά την κρούση η οποία απέχει x_2 από τη νέα θέση ισορροπίας και της ακραίας θέσης

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)V^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \Rightarrow V^2 = \frac{k(A^2 - x_2^2)}{m_A + m_B} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{k(A^2 - x_2^2)}{m_A + m_B}} \Rightarrow$$

$$V = \sqrt{\frac{200 \frac{N}{m} [(0,2m)^2 - (0,1m)^2]}{8kg}} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{s}.$$

Γ) Την απόσταση d μεταξύ του σώματος Σ_A και του σώματος Σ_B θα τη βρούμε με εφαρμογή του θεωρήματος έργου - ενέργειας, για την κίνηση του σώματος Σ_B από το σημείο εκτόξευσης μέχρι το σημείο ελάχιστα πριν την κρούση με το σώμα Σ_A . Την ταχύτητα v_B που έχει το σώμα Σ_B ελάχιστα πριν την κρούση θα την υπολογίσουμε με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \Rightarrow m_B v_B = (m_A + m_B) V \Rightarrow v_B = \frac{(m_A + m_B) V}{m_B} = \frac{(4kg + 4kg) \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{s}}{4kg} \Rightarrow$$

$$v_B = \sqrt{3} \frac{m}{s}.$$

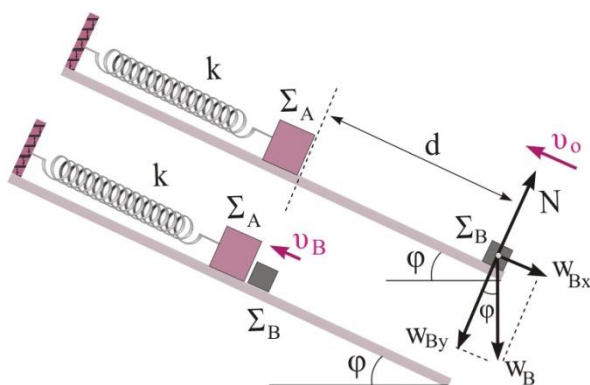
Και το θεώρημα έργου - ενέργειας δίνει την απόσταση d

$$W_{w_B} = \Delta K = K_{(\text{τελ})} - K_{(\text{αρχ})} \Rightarrow$$

$$-m_B g \cdot \eta \mu \phi \cdot d = \frac{1}{2} m_B v_B^2 - \frac{1}{2} m_B v_0^2 \Rightarrow$$

$$d = \frac{v_0^2 - v_B^2}{2g \eta \mu \phi} \Rightarrow$$

$$d = \frac{\left(2 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(\sqrt{3} \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,5} \Rightarrow d = 0,1m.$$



Δ) Η περίοδος της ταλάντωσης του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_A + m_B}{k}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{8kg}{200N/m}} \Rightarrow T = \frac{4\pi}{10} s.$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος σε σχέση με το χρόνο είναι

$$x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow x = 0,2 \cdot \eta \mu(\omega t + \phi_0) \quad (SI) \quad (2)$$

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{10} s} = 5 \frac{\text{rad}}{s}.$$

Θα υπολογίσουμε την αρχική φάση της ταλάντωσης. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση $x=x_2$, εφόσον λάβαμε ως θετική φορά προς τα πάνω και έχει θετική ταχύτητα επίσης. Αντικαθιστούμε στη σχέση (2) και έχουμε

$$x_2 = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow 0,1\text{m} = 0,2\text{m} \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{array} \right\} \xrightarrow{0 \leq \varphi_0 < 2\pi} \begin{array}{l} \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \end{array} \quad \begin{array}{l} (3) \\ (4) \end{array}$$

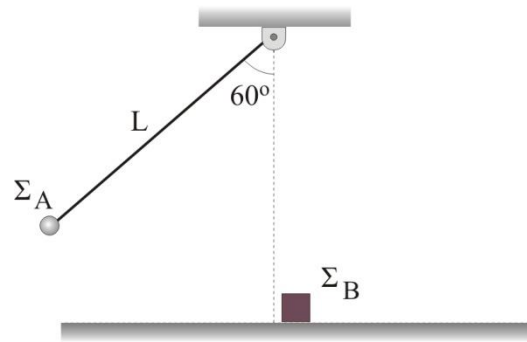
Από τις δύο λύσεις γίνεται δεκτή η (3), γιατί η ταχύτητα είναι θετική, άρα η αρχική φάση είναι $\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$.

Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος σε σχέση με το χρόνο είναι

$$x = 0,2 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (\text{SI})$$

Πρόβλημα 4. Νέο

Μία σφαίρα Σ_A , μάζας $m_A=2\text{kg}$, είναι κρεμασμένη με νήμα μήκους $L=0,9\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή. Εκτρέπουμε τη σφαίρα από τη θέση ισορροπίας της κατά 60° και με το νήμα τεντωμένο την ελευθερώνουμε, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν η σφαίρα Σ_A διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα, Σ_B , μάζας $m_B=4\text{kg}$, που βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος Σ_B και του οριζόντιου δαπέδου είναι $\mu=0,5$.



Να υπολογίσετε:

- A) την τάση του νήματος στη θέση που αυτό σχηματίζει με την κατακόρυφη που διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της σφαίρας γωνία φ , για την οποία ισχύει $\sin\varphi=2/3$.
- B) τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.
- Γ) το ποσοστό % της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_A , που απέμεινε σε αυτή, μετά την κρούση.
- Δ) τη μετατόπιση του σώματος Σ_B μέχρι να σταματήσει και τη θερμότητα που παράχθηκε κατά τη διάρκεια του φαινομένου.

Δίνονται: $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}$ και $g=10 \text{ m/s}^2$.

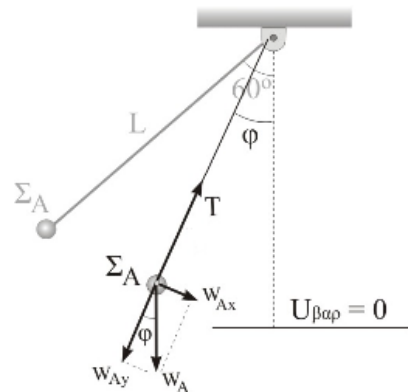
Λύση

A) Το σώμα Σ_A , κατά την κίνησή του, εκτελεί τμήμα κυκλικής τροχιάς, οπότε έχει ανάγκη από κεντρομόλο δύναμη. Το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, σε κάθε θέση, τον δημιουργούν η συνισταμένη της τάσης του νήματος και της ακτινικής συνιστώσας του βάρους της σφαίρας. Άρα

$$\Sigma F = F_k \Rightarrow T - w_{Ay} = F_k \Rightarrow T - m_A g \sin\varphi = \frac{m_A v_A^2}{L} \Rightarrow$$

$$T = m_A g \sin\varphi + \frac{m_A v_A^2}{L} \quad (1)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα v_A στη θέση που το νήμα σχηματίζει με την κατακόρυφη που διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της σφαίρας, γωνία φ , για την οποία ισχύει $\sin\varphi=2/3$.



Κατά την κίνηση της σφαίρας διατηρείται η μηχανική ενέργεια, γιατί η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος της, αφού η τάση του νήματος είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα (και τη μετατόπιση) της σφαίρας. Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για την κίνηση της σφαίρας Σ_A από τη θέση ελευθέρωσης ως τη θέση που το νήμα σχηματίζει με την κατακόρυφη που διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της σφαίρας, γωνία φ , για την οποία ισχύει $\sin\varphi = 2/3$. Θεωρούμε στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας τη χαμηλότερη θέση της σφαίρας, δηλαδή τη θέση ισορροπίας της.

$$E_{\mu\eta\chi, \alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi, \tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$0 + m_A g(L - L\sin 60^\circ) = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + m_A g(L - L\sin\varphi) \Rightarrow$$

$$g(L - L\sin 60^\circ) = \frac{1}{2} v_A^2 + g(L - L\sin\varphi) \Rightarrow v_A^2 = 2gL(\sin\varphi - \sin 60^\circ) \Rightarrow$$

$$v_A = \sqrt{2gL(\sin\varphi - \sin 60^\circ)} \Rightarrow v_A = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,9\text{m} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)} \Rightarrow v_A = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$T = 2\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2\text{kg} \cdot (\sqrt{3}\text{m/s})^2}{0,9\text{m}} \Rightarrow T = 20\text{N}.$$

Β) Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για την κίνηση της σφαίρας Σ_A από τη θέση ελευθέρωσης έως τη θέση που το νήμα γίνεται κατακόρυφο, για να βρούμε την ταχύτητά της, v_1 , ελάχιστα πριν την κρούση

$$E_{\mu\eta\chi, \alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi, \tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$0 + m_A g(L - L\sin 60^\circ) = \frac{1}{2} m_A v_1^2 + 0 \Rightarrow$$

$$g(L - L\sin 60^\circ) = \frac{1}{2} v_1^2 \Rightarrow v_1^2 = 2gL(1 - \sin 60^\circ) \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{2gL(1 - \sin 60^\circ)} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,9\text{m} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)} \Rightarrow v_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η κρούση των δύο σωμάτων είναι μετωπική ελαστική. Τα σώματα μετά την κρούση θα κινηθούν στην ίδια διεύθυνση, με ταχύτητες που δίνονται από τις σχέσεις:

$$v'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_1 \Rightarrow v'_A = \frac{2\text{kg} - 4\text{kg}}{2\text{kg} + 4\text{kg}} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_A = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$v'_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_1 \Rightarrow v'_B = \frac{2 \cdot 2\text{kg}}{2\text{kg} + 4\text{kg}} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_B = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Γ) Το ποσοστό % της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_A που της απέμεινε μετά την κρούση είναι

$$\frac{K'_A}{K_A} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_A v'^2_A}{\frac{1}{2} m_A v_A^2} \cdot 100\% = \frac{v'^2_A}{v_A^2} \cdot 100\% = \frac{\left(-1 \frac{m}{s}\right)^2}{\left(3 \frac{m}{s}\right)^2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\frac{K'_A}{K_A} \cdot 100\% = \frac{1}{9} \cdot 100\% \Rightarrow \frac{K'_B}{K_A} \cdot 100\% = \frac{100}{9} \%$$

Δ) Για να υπολογίσουμε τη μετατόπιση x_B του σώματος Σ_B μετά την κρούση, μέχρι να σταματήσει, εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας

$$K_{(\text{τελ})} - K_{(\text{αρχ})} = W_T \quad (2)$$

Η τριβή δίνεται από τη σχέση $T = \mu N$.

Είναι $\Sigma F_y = 0$, άρα $N = w_B = m_B g$.

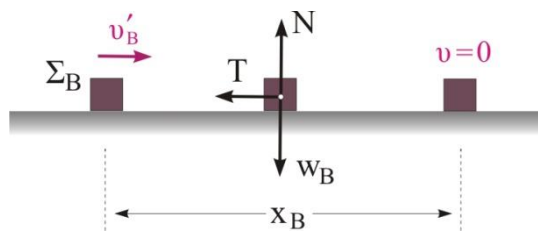
Έτσι η σχέση (2) γίνεται

$$0 - \frac{1}{2} m_B v_B'^2 = -T x_B \Rightarrow \frac{1}{2} m_B v_B'^2 = \mu m_B g x_B \Rightarrow x_B = \frac{v_B'^2}{2 \mu g} \Rightarrow$$

$$x_B = \frac{(2 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 0,5 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow x_B = 0,4 \text{ m}.$$

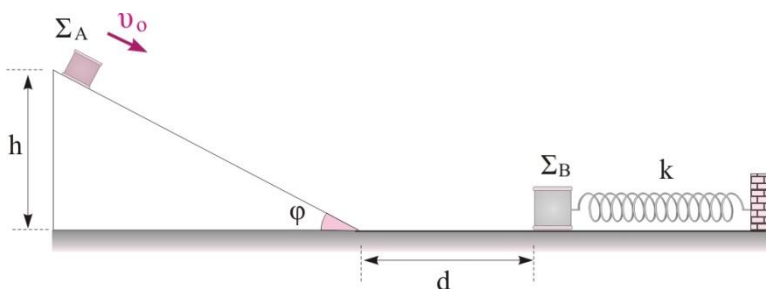
Θερμότητα παράχθηκε λόγω της τριβής, κατά την μετατόπιση του σώματος Σ_B πάνω στο επίπεδο και ισούται με το απόλυτο του έργου της τριβής

$$Q = |W_T| = |-T x_B| = \mu m_B g x_B \Rightarrow Q = 0,5 \cdot 4 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,4 \text{ m} \Rightarrow Q = 8 \text{ J}.$$



Πρόβλημα 5. **Νέο**

Ένα σώμα Σ_A , μάζας $m_A=4\text{kg}$, που βρίσκεται πάνω σε πλάγιο επίπεδο γωνίας φ , εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $u_0=2\text{m/s}$ προς τη βάση του επιπέδου από σημείο που βρίσκεται σε ύψος $h=1,8\text{m}$ πάνω από



αυτή. Όταν το σώμα φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο συνεχίζει να κινείται σε αυτό, χωρίς να συμβαίνει απώλεια ενέργειας κατά την αλλαγή της διεύθυνσης κίνησης. Στο οριζόντιο επίπεδο κινείται ένα δεύτερο σώμα, Σ_B , μάζας $m_B=1\text{kg}$, το οποίο είναι στερεωμένο στο ένα άκρο οριζώντιου ελατηρίου σταθεράς $k=200\text{ N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο (βλέπε σχήμα).

Τα δύο σώματα συγκρούονται πλαστικά τη στιγμή που το σώμα Σ_A έχει διανύσει στο οριζόντιο επίπεδο απόσταση $d=0,7\text{m}$ και το σώμα Σ_B κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $u_B=2\text{ m/s}$. Στη θέση της σύγκρουσης το ελατήριο είναι επιμηκυμένο από το φυσικό του μήκος κατά $x_2=0,4\text{m}$.

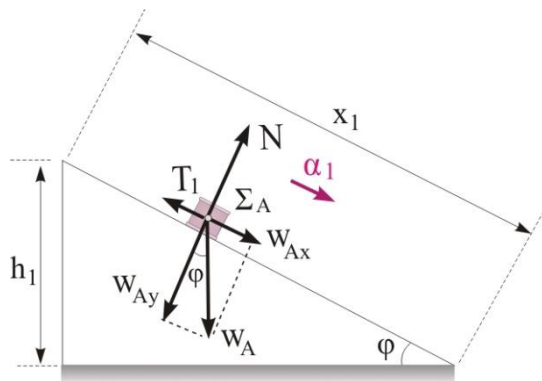
Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων και των δύο δαπέδων είναι $\mu=0,5$. Να υπολογίσετε:

- το χρόνο κίνησης του σώματος Σ_A στο πλάγιο επίπεδο.
- την ταχύτητα του σώματος Σ_A ελάχιστα πριν την κρούση με το σώμα Σ_B .
- την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- τη μετατόπιση του συσσωματώματος μέχρι η κινητική του ενέργεια να γίνει 17 J για πρώτη φορά.
- τη συνολική θερμότητα που παράχθηκε από τη στιγμή που εκτοξεύτηκε το σώμα A μέχρι τη θέση που το συσσωμάτωμα έχει κινητική ενέργεια 17 J για πρώτη φορά.

Δίνονται: $g=10\text{ m/s}^2$, $\eta\mu\varphi=0,6$ και $\sigma\upsilon\eta\varphi=0,8$.

Λύση

A) Το σώμα Σ_A κατά την κίνησή του στο πλάγιο επίπεδο δέχεται δύο δυνάμεις, το βάρος του και τη δύναμη από το δάπεδο, η οποία αναλύεται σε δύο συνιστώσες, την κάθετη δύναμη στήριξης, N , και την τριβή ολίσθησης, T_1 . Θα βρούμε το χρόνο κίνησης του σώματος Σ_A στο πλάγιο επίπεδο μέσα από τις εξισώσεις της κινηματικής.



Μετά την ανάλυση του βάρους βρίσκουμε την κάθετη δύναμη στήριξης, N .

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_{Ay} = m_A g \cdot \sigma \nu \nu \varphi \Rightarrow N = 4 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,8 \Rightarrow N = 32 \text{ N}.$$

Η τριβή ολίσθησης είναι

$$T_1 = \mu N = 0,5 \cdot 32 \text{ N} \Rightarrow T_1 = 16 \text{ N}.$$

Η επιτάχυνση του σώματος Σ_A είναι

$$\Sigma F_x = m_A a_1 \Rightarrow w_{Ax} - T_1 = m_A a_1 \Rightarrow m_A g \cdot \eta \mu \varphi - T_1 = m_A a_1 \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{m_A g \cdot \eta \mu \varphi - T_1}{m_A} \Rightarrow a_1 = \frac{4 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,6 - 16 \text{ N}}{4 \text{ kg}} \Rightarrow a_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η μετατόπιση x_1 του σώματος στο πλάγιο επίπεδο προκύπτει από το ύψος που αφήσαμε το σώμα:

$$\eta \mu \varphi = \frac{h}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{h}{\eta \mu \varphi} \Rightarrow x_1 = \frac{1,8 \text{ m}}{0,6} \Rightarrow x_1 = 3 \text{ m}.$$

Από τη σχέση της μετατόπισης του σώματος Σ_A , που κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα, υπολογίζουμε το χρόνο κίνησης του σώματος Σ_A στο πλάγιο επίπεδο

$$x_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \Rightarrow 3 \text{ m} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} t_1 + \frac{1}{2} 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1^2 + 2 t_1 - 3 = 0 \quad (1)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι δευτεροβάθμια. Βρίσκουμε πρώτα τη διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16.$$

Οι λύσεις της σχέσης (1) είναι

$$t_1 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s} \quad \text{ή} \quad t_1 = -3 \text{ s}.$$

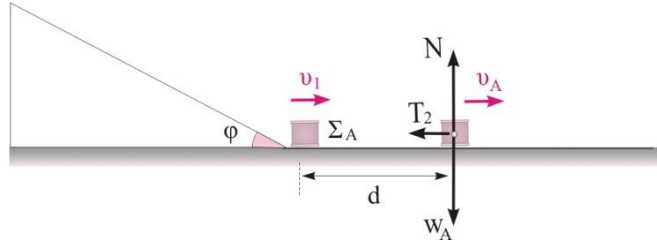
Δεκτή είναι η θετική λύση $t_1 = 1 \text{ s}$.

Β) Το σώμα Σ_A φτάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου με ταχύτητα

$$v_1 = v_0 + a_1 t_1 \Rightarrow v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s} \Rightarrow v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Θα βρούμε την ταχύτητα του σώματος Σ_A ελάχιστα πριν την κρούση με το σώμα Σ_B εφαρμόζοντας το Θεώρημα έργου-ενέργειας μεταξύ των δύο θέσεων.

Στο οριζόντιο επίπεδο το σώμα Σ_A δέχεται τριβή ολίσθησης, που το επιβραδύνει. Βρίσκουμε την κάθετη δύναμη στήριξης του οριζόντιου επιπέδου



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_A = m_A g \Rightarrow N = 4\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow N = 40\text{N}.$$

$$\text{Η τριβή ολίσθησης είναι } T_2 = \mu N = 0,5 \cdot 40\text{N} \Rightarrow T_2 = 20\text{N}.$$

Το θεώρημα έργου - ενέργειας δίνει:

$$W_T = \Delta K = K_{(\text{τελ})} - K_{(\text{αρχ})} \Rightarrow -T_2 d = \frac{1}{2} m_A v_A^2 - \frac{1}{2} m_A v_1^2 \Rightarrow$$

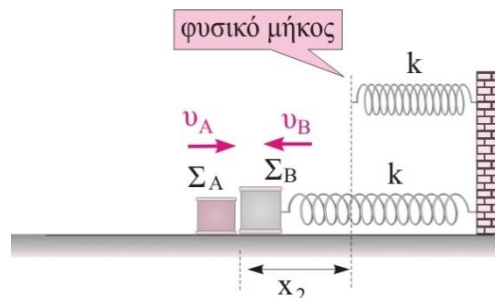
$$v_A = \sqrt{\frac{m_A v_1^2 - 2T_2 d}{m_A}} = \sqrt{\frac{4\text{kg} \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 2 \cdot 20\text{N} \cdot 0,7\text{m}}{4\text{kg}}} \Rightarrow v_A = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Γ) Για την πλαστική κρούση εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής, για να υπολογίσουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος V, αμέσως μετά την κρούση

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \Rightarrow m_A v_A - m_B v_B = (m_A + m_B) V \Rightarrow$$

$$V = \frac{m_A v_A - m_B v_B}{m_A + m_B} \Rightarrow V = \frac{4\text{kg} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1\text{kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\text{kg} + 1\text{kg}} \Rightarrow$$

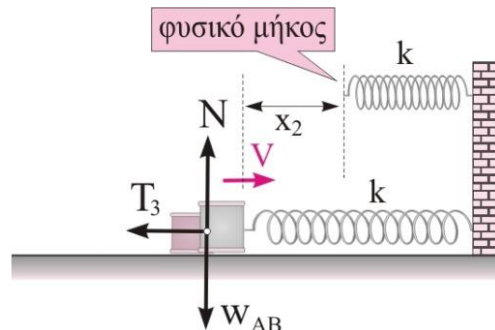
$$V = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Δ) Θα βρούμε πρώτα την τριβή ολίσθησης για το συσσωμάτωμα. Βρίσκουμε την κάθετη δύναμη στήριξης του οριζόντιου επιπέδου

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_{AB} = (m_A + m_B) g \Rightarrow$$

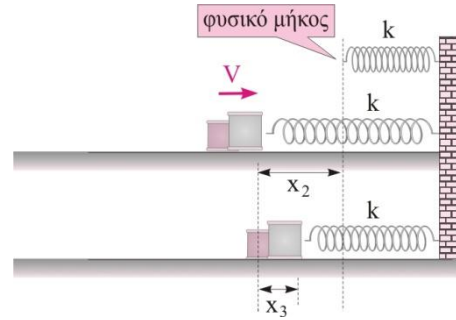
$$N = 5\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow N = 50\text{N}.$$



Η τριβή ολίσθησης είναι

$$T_3 = \mu N = 0,5 \cdot 50 \text{ N} \Rightarrow T_3 = 25 \text{ N}.$$

Για να βρούμε τη μετατόπιση του συσσωματώματος, μέχρι η κινητική του ενέργεια να γίνει 17 J για πρώτη φορά, εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας



$$W_T + W_{F_{ελ}} = \Delta K = K_{(τελ)} - K_{(αρχ)} \Rightarrow -T_3 x_3 + U_{ελ, αρχ} - U_{ελ, τελ} = K_{(τελ)} - \frac{1}{2}(m_A + m_B) V^2 \Rightarrow$$

$$-T_3 x_3 + \frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{1}{2} k (x_2 - x_3)^2 = K_{(τελ)} - \frac{1}{2}(m_A + m_B) V^2 \Rightarrow$$

$$-25 \text{ N} \cdot x_3 + \frac{1}{2} \cdot 200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,4 \text{ m})^2 - \frac{1}{2} \cdot 200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,4 \text{ m} - x_3)^2 = 17 \text{ J} - \frac{1}{2} 5 \text{ kg} \cdot \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$100 x_3^2 - 55 x_3 + 7 = 0 \quad (2)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι δευτεροβάθμια. Βρίσκουμε πρώτα τη διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 55^2 - 4 \cdot 100 \cdot 7 = 225.$$

Οι λύσεις της σχέσης (2) είναι

$$x_3 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{55 \pm \sqrt{225}}{200} = \frac{55 \pm 15}{200} \Rightarrow x_3 = 0,2 \text{ m} \quad \text{ή} \quad x_3 = 0,35 \text{ m}.$$

Δεκτή είναι η πρώτη λύση $x_3 = 0,2 \text{ m}$.

Ε) Α' τρόπος

Παραγωγή θερμότητας έχουμε σε τέσσερις φάσεις: τρεις φάσεις λόγω της τριβής ολίσθησης και μία κατά την πλαστική κρούση. Είναι

$$Q_1 = |W_T| = |-T_1 x_1| = 16 \text{ N} \cdot 3 \text{ m} \Rightarrow Q_1 = 48 \text{ J}$$

$$Q_2 = |W_T| = |-T_2 d| = 20 \text{ N} \cdot 0,7 \text{ m} \Rightarrow Q_2 = 14 \text{ J}$$

$$Q_3 = |W_T| = |-T_3 x_3| = 25 \text{ N} \cdot 0,2 \text{ m} \Rightarrow Q_3 = 5 \text{ J}$$

$$Q_4 = |\Delta K| = K_{(αρχ)} - K_{(τελ)} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 - \frac{1}{2} (m_A + m_B) V^2 \Rightarrow$$

$$Q_4 = \frac{1}{2} 4\text{kg} \cdot (3\text{m/s})^2 + \frac{1}{2} 1\text{kg} \cdot (2\text{m/s})^2 - \frac{1}{2} 5\text{kg} \cdot (2\text{m/s})^2 \Rightarrow$$

$$Q_4 = 10\text{J}.$$

Άρα, η συνολική θερμότητα που απελευθερώθηκε στο περιβάλλον από τη στιγμή που εκτοξεύτηκε το σώμα Α, μέχρι τη θέση που το συσσωμάτωμα έχει κινητική ενέργεια 17J για πρώτη φορά, είναι

$$Q_{ολ} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 77\text{J}.$$

Β' τρόπος

Η συνολική θερμότητα που απελευθερώθηκε στο περιβάλλον από τη στιγμή που εκτοξεύτηκε το σώμα Α μέχρι τη θέση που το συσσωμάτωμα έχει κινητική ενέργεια 17 J για πρώτη φορά, ισούται με την αρχική ενέργεια του συστήματος σωμάτων - ελατηρίου μείον την τελική ενέργεια του συστήματος

$$Q_{ολ} = E_{αρχ} - E_{τελ} = \left[\frac{1}{2} m_A v_0^2 + m_A g h + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \right] - \left[K_{(τελ)} + \frac{1}{2} k (x_2 - x_3)^2 \right] \Rightarrow$$

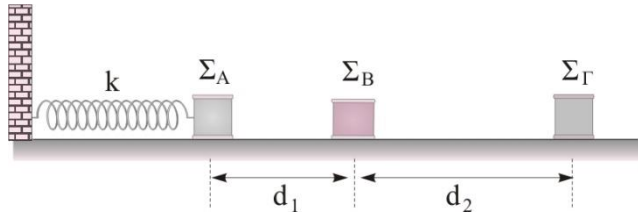
$$Q_{ολ} = \left[\frac{1}{2} \cdot 4\text{kg} \cdot \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + 4\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,8\text{m} + \frac{1}{2} \cdot 200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,4\text{m})^2 + \frac{1}{2} \cdot 1\text{kg} \cdot \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right] -$$

$$\left[17\text{J} + \frac{1}{2} \cdot 200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,4\text{m} - 0,2\text{m})^2 \right] \Rightarrow Q_{ολ} = (8\text{J} + 72\text{J} + 16\text{J} + 2\text{J}) - (17\text{J} + 4\text{J}) \Rightarrow Q_{ολ} = 77\text{J}.$$

Πρόβλημα 6.



Ένα σώμα Σ_A , μάζας $m_A=2\text{kg}$, ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=1000\text{N/m}$, το οποίο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ένα δεύτερο σώμα, Σ_B , μάζας m_B , βρίσκεται ακίνητο σε απόσταση $d_1=60\text{cm}$ από το σώμα Σ_A , όπως φαίνεται στο σχήμα. Συμπιέζουμε το ελατήριο κατά $x_1=40\text{cm}$ και από τη θέση αυτή εκτοξεύουμε το σώμα Σ_A με αρχική ταχύτητα $u_0=12\text{m/s}$ προς το σώμα Σ_B . Όταν το σώμα Σ_A , φτάσει στο σώμα Σ_B συγκρούεται κεντρικά ελαστικά μαζί του. Μετά την κρούση το σώμα Σ_A επιστρέφει προς τα πίσω και διέρχεται από τη θέση που το εκτοξεύσαμε με κινητική ενέργεια $K_1=96\text{J}$. Το σώμα Σ_B κινείται προς τα δεξιά και αφού διανύσει απόσταση d_2 συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα, Σ_Γ , μάζας $m_\Gamma=4\text{kg}$. Το δημιουργούμενο συσσωμάτωμα, αφού διανύσει απόσταση $d_3=0,125\text{m}$, σταματά. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων και του δαπέδου είναι $\mu=0,4$. Να υπολογίσετε:

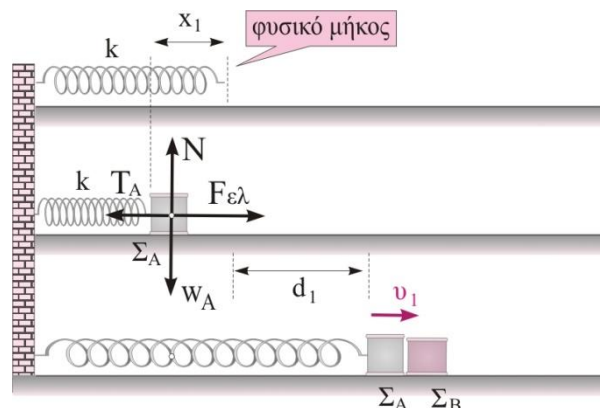


- A) την ταχύτητα του σώματος Σ_A ελάχιστα πριν τη σύγκρουσή του με το σώμα Σ_B .
- B) τη μάζα m_B του σώματος Σ_B .
- Γ) την απόσταση d_2 μεταξύ των σωμάτων Σ_B και Σ_Γ .
- Δ) τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση που το σώμα Σ_A έχει τη μέγιστη κινητική ενέργεια.
Δίνεται ότι το $g=10\text{ m/s}^2$.

Λύση

A) Για να βρούμε την ταχύτητα u_1 του σώματος Σ_A ελάχιστα πριν την κρούση, εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας, μεταξύ της θέσης εκτόξευσης και της θέσης ελάχιστα πριν την κρούση.

Το σώμα Σ_A στην κίνησή του δέχεται τριβή ολίσθησης. Βρίσκουμε την κάθετη δύναμη στήριξης του δαπέδου



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_A = m_A g \Rightarrow$$

$$N = 2\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow N = 20\text{N}.$$

Η τριβή ολίσθησης είναι

$$T_A = \mu N = 0,4 \cdot 20\text{N} \Rightarrow T_A = 8\text{N}.$$

Το θεώρημα έργου - ενέργειας δίνει:

$$W_{T_A} + W_{F_{ελ}} = \Delta K = K_{(τελ)} - K_{(αρχ)} \Rightarrow -T_A (x_1 + d_1) + U_{ελ,αρχ} - U_{ελ,τελ} = \frac{1}{2} m_A v_1^2 - \frac{1}{2} m_A v_0^2 \Rightarrow$$

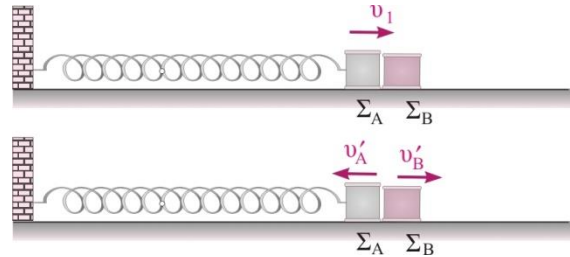
$$-T_A (x_1 + d_1) + \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k d_1^2 = \frac{1}{2} m_A v_1^2 - \frac{1}{2} m_A v_0^2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot \frac{T_A}{m_A} (x_1 + d_1) + \frac{k}{m_A} (x_1^2 - d_1^2)} \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{8\text{N}}{2\text{kg}} (0,4\text{m} + 0,6\text{m}) + \frac{1000 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{2\text{kg}} [(0,4\text{m})^2 - (0,6\text{m})^2]} \Rightarrow v_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Β) Η κρούση των δύο σωμάτων είναι μετωπική ελαστική. Το σώμα Σ_A μετά την κρούση θα κινηθεί στην ίδια διεύθυνση με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση

$$v'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_1 \quad (1)$$



Η μάζα m_B υπολογίζεται από τη σχέση (1) αφού πρώτα βρούμε την ταχύτητα v'_A την οποία αποκτά το σώμα Σ_A αμέσως μετά την κρούση.

Μετά την κρούση το σώμα Σ_A επιστρέφει προς τα πίσω και διέρχεται από τη θέση που το εκτοξεύσαμε με κινητική ενέργεια $K_1=96\text{J}$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας, μεταξύ των δύο θέσεων του σώματος Σ_A για να βρούμε την ταχύτητα του, v'_A , ελάχιστα μετά την κρούση.

$$W_{T_A} + W_{F_{ελ}} = \Delta K = K_{(τελ)} - K_{(αρχ)} \Rightarrow -T_A (x_1 + d_1) + U_{ελ,αρχ} - U_{ελ,τελ} = K_{(τελ)} - \frac{1}{2} m_A v'_A{}^2 \Rightarrow$$

$$-T_A (x_1 + d_1) + \frac{1}{2} k d_1^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 = K_{(τελ)} - \frac{1}{2} m_A v'_A{}^2 \Rightarrow$$

$$|v'_A| = \sqrt{\frac{1}{m_A} [2K_{(τελ)} + 2 \cdot T_A (x_1 + d_1) + k(x_1^2 - d_1^2)]} \Rightarrow$$

$$|v'_A| = \sqrt{\frac{1}{2\text{kg}} [2 \cdot 96\text{J} + 2 \cdot 8\text{N} (0,4\text{m} + 0,6\text{m}) + 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}} [(0,4\text{m})^2 - (0,6\text{m})^2]]} \Rightarrow |v'_A| = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

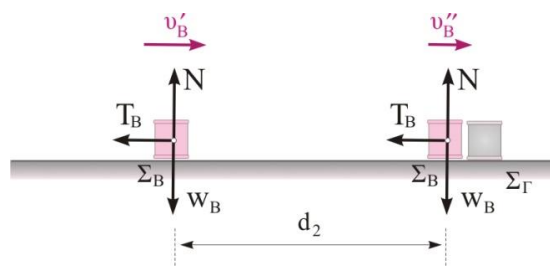
Από τη σχέση (1) υπολογίζουμε τη μάζα m_B του σώματος Σ_B , θέτοντας $v'_A = -2 \frac{m}{s}$, αφού το σώμα Σ_A μετά την κρούση κινείται προς τα πίσω

$$v'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_1 \Rightarrow -2 \frac{m}{s} = \frac{2\text{kg} - m_B}{2\text{kg} + m_B} \cdot 6 \frac{m}{s} \Rightarrow m_B = 4\text{kg}.$$

Γ) Το σώμα Σ_B μετά την κρούση θα κινηθεί στην ίδια διεύθυνση με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση

$$v'_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_1 \Rightarrow v'_B = \frac{2 \cdot 2\text{kg}}{2\text{kg} + 4\text{kg}} \cdot 6 \frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$v'_B = 4 \frac{m}{s}.$$



Έπειτα, θα επιβραδυνθεί λόγω τριβών και θα φτάσει με ταχύτητα v''_B στο σώμα Σ_Γ με το οποίο συγκρούεται πλαστικά. Η ζητούμενη απόσταση d_2 θα βρεθεί με εφαρμογή του θεωρήματος έργου - ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_B μέχρι να φτάσει στο σώμα Σ_Γ .

$$W_{T_B} = \Delta K = K_{(τελ)} - K_{(αρχ)} \Rightarrow -T_B d_2 = \frac{1}{2} m_B v''_B{}^2 - \frac{1}{2} m_B v'_B{}^2 \quad (2)$$

Μας λείπουν η δύναμη T_B και η ταχύτητα v''_B .

Βρίσκουμε την κάθετη δύναμη στήριξης του δαπέδου

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_B = m_B g \Rightarrow N = 4\text{kg} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \Rightarrow N = 40\text{N}.$$

Η τριβή ολίσθησης είναι

$$T_B = \mu N = 0,4 \cdot 40\text{N} \Rightarrow T_B = 16\text{N}.$$

Αν με V συμβολίσουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, η αρχή διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση δίνει

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \Rightarrow m_B v''_B = (m_B + m_\Gamma) V \quad (3)$$

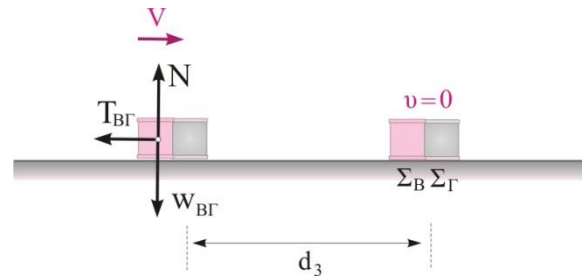
Για να μελετήσουμε την κίνηση του συσσωματώματος θα υπολογίσουμε την τριβή ολίσθησης που δέχεται. Βρίσκουμε την κάθετη δύναμη στήριξης του δαπέδου

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_{B\Gamma} = (m_B + m_\Gamma)g \Rightarrow$$

$$N = 8\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow N = 80\text{N}.$$

Η τριβή ολίσθησης είναι

$$T_{B\Gamma} = \mu N = 0,4 \cdot 80\text{N} \Rightarrow T_{B\Gamma} = 32\text{N}.$$



Το συσσωμάτωμα αφού διανύσει απόσταση $d_3 = 0,125\text{ m}$ σταματά. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για το συσσωμάτωμα

$$W_{T_{B\Gamma}} = \Delta K = K_{(\text{τελ})} - K_{(\text{αρχ})} \Rightarrow -T_\Gamma d_3 = 0 - \frac{1}{2}(m_B + m_\Gamma)V^2 \Rightarrow$$

$$V = \sqrt{\frac{2T_\Gamma d_3}{m_B + m_\Gamma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 32\text{N} \cdot 0,125\text{m}}{4\text{kg} + 4\text{kg}}} \Rightarrow V = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Από τη σχέση (3) βρίσκουμε την ταχύτητα v_B'' .

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \Rightarrow m_B v_B'' = (m_B + m_\Gamma)V \Rightarrow 4\text{kg} \cdot v_B'' = (4\text{kg} + 4\text{kg}) \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$v_B'' = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Τέλος από τη σχέση (2) υπολογίζουμε την απόσταση d_2 μεταξύ των σωμάτων Σ_B και Σ_Γ

$$W_{T_B} = \Delta K = K_{(\text{τελ})} - K_{(\text{αρχ})} \Rightarrow -T_B d_2 = \frac{1}{2}m_B v_B''^2 - \frac{1}{2}m_B v_B'^2 \Rightarrow$$

$$d_2 = \frac{m_B (v_B''^2 - v_B'^2)}{2T_B} = \frac{4\text{kg} \left(\left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right)}{2 \cdot 16\text{N}} \Rightarrow d_2 = 1,5\text{m}.$$

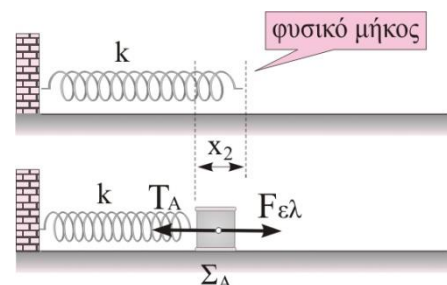
Δ) Το σώμα Σ_A μετά την εκτόξευσή του στον άξονα της κίνησής του δέχεται δύο δυνάμεις:

- την $F_{ελ}$ με μέτρο

$$F_{ελ} = kx = 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,4\text{m} \Rightarrow$$

$$F_{ελ} = 400\text{N}.$$

- την τριβή ολίσθησης με μέτρο $T_A = 8\text{N}$.



Έτσι επιταχύνεται μέχρι τη θέση που η συνισταμένη δύναμη γίνει μηδέν και τότε έχει τη μέγιστη κινητική ενέργεια

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = T_A \Rightarrow kx_2 = T_A \Rightarrow 1000 \frac{N}{m} \cdot x_2 = 8N \Rightarrow x_2 = 0,008m.$$

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση αυτή είναι

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} kx_2^2 \Rightarrow U_{ελ} = \frac{1}{2} \cdot 1000 \frac{N}{m} \cdot (0,008m)^2 \Rightarrow U_{ελ} = 32 \cdot 10^{-3} J.$$

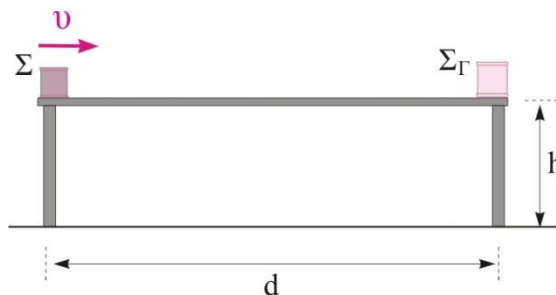
Πρόβλημα 7. **Νέο**

Ένα σώμα Σ, μάζας $m=0,6\text{kg}$, εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή $t=0$ από την άκρη λείου

τραπεζιού, με ταχύτητα $v = \frac{1\text{ m}}{3\text{ s}}$, όπως

φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το μήκος του τραπεζιού είναι $d=2,5\text{m}$ και το ύψος του $h=0,8\text{ m}$. Τη χρονική στιγμή $t_1=4,5\text{s}$ το σώμα Σ

διασπάται με εσωτερικό μηχανισμό σε δύο σώματα Σ_A και Σ_B, με μάζες $m_A=0,4\text{kg}$ και $m_B=0,2\text{kg}$, αντίστοιχα. Το σώμα Σ_A κινείται προς τα δεξιά, ενώ το σώμα Σ_B κινείται προς τα αριστερά και φτάνουν ταυτόχρονα στις δύο άκρες του τραπεζιού. Το σώμα Σ_A, μόλις φτάσει στη δεξιά άκρη του τραπεζιού, συγκρούεται στιγμιαία κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα Σ_Γ, μάζας $m_\Gamma=1,2\text{kg}$. Να υπολογίσετε:



Α) ποια χρονική στιγμή t_2 , θα φτάσουν τα σώματα Σ_A και Σ_B στις άκρες του τραπεζιού.

Β) τις ταχύτητες u_1 και u_2 των δύο σωμάτων μετά τη διάσπαση και πόση ενέργεια απελευθερώθηκε από τον εσωτερικό μηχανισμό, αν γνωρίζουμε ότι μετατράπηκε όλη σε κινητική ενέργεια των δύο σωμάτων.

Γ) την απόσταση των σημείων πτώσης των σωμάτων Σ_B και Σ_Γ στο έδαφος.

Δ) τη χρονική στιγμή t_3 που φθάνει το σώμα Σ_A στο έδαφος.

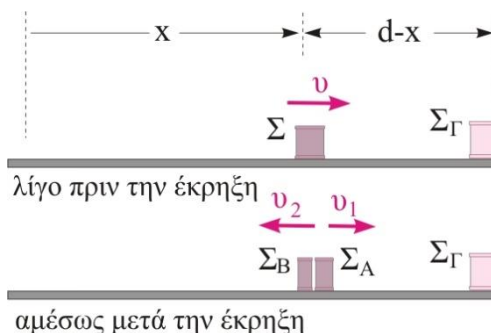
Ε) την κινητική ενέργεια του σώματος Σ_A, όταν φτάσει στο έδαφος.
Δίνεται ότι το $g=10\text{ m/s}^2$.

Λύση

Α) Το σώμα Σ κινείται ευθύγραμμα ομαλά και τη χρονική στιγμή $t_1=4,5\text{s}$ έχει μετατοπιστεί κατά

$$x = v \Delta t_1 \Rightarrow x = \frac{1\text{ m}}{3\text{ s}} \cdot 4,5\text{s} \Rightarrow x = 1,5\text{m}.$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής, για τη διάσπαση του σώματος Σ, κατά την οποία δημιουργούνται τα σώματα Σ_A και Σ_B με ταχύτητες u_1 και u_2 μετά τη διάσπαση. Θεωρούμε θετική φορά τη φορά προς τα δεξιά. Το σώμα Σ_A κινείται προς τα δεξιά και έχει θετική ορμή, ενώ το σώμα Σ_B κινείται προς τα αριστερά, με αρνητική ορμή



$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \Rightarrow mv = m_A v_1 - m_B v_2 \Rightarrow$$

$$0,6\text{kg} \cdot \frac{1}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,4\text{kg} \cdot v_1 - 0,2\text{kg} \cdot v_2 \Rightarrow$$

$$2v_1 - v_2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1)$$

Τα σώματα Σ_A και Σ_B , μετά τη διάσπαση κινούνται αντίρροπα για χρονικό διάστημα Δt_2 και φτάνουν ταυτόχρονα στις δύο άκρες του τραπεζιού, κινούμενα ευθύγραμμα ομαλά. Άρα

$$x = v_2 \Delta t_2 \Rightarrow v_2 = \frac{x}{\Delta t_2} \quad (2) \text{ και}$$

$$d - x = v_1 \Delta t_2 \Rightarrow v_1 = \frac{d - x}{\Delta t_2} \quad (3)$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (2) και (3) στη σχέση (1) και βρίσκουμε το χρονικό διάστημα Δt_2

$$2v_1 - v_2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow 2 \frac{d - x}{\Delta t_2} - \frac{x}{\Delta t_2} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow 2 \frac{2,5\text{m} - 1,5\text{m}}{\Delta t_2} - \frac{1,5\text{m}}{\Delta t_2} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta t_2 = 0,5\text{s}.$$

Η χρονική στιγμή t_2 , που τα σώματα Σ_A και Σ_B θα φτάσουν στις άκρες του τραπεζιού είναι

$$t_2 = (t_1 - 0) + \Delta t_2 \Rightarrow t_2 = 4,5\text{s} + 0,5\text{s} \Rightarrow t_2 = 5\text{s}.$$

Β) Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε

$$v_2 = \frac{x}{\Delta t_2} \Rightarrow v_2 = \frac{1,5\text{m}}{0,5\text{s}} \Rightarrow v_2 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_1 = \frac{d - x}{\Delta t_2} \Rightarrow v_1 = \frac{2,5\text{m} - 1,5\text{m}}{0,5\text{s}} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η ενέργεια που απελευθερώθηκε από τον εσωτερικό μηχανισμό είναι

$$E = K_{(\text{τελ})} - K_{(\text{αρχ})} \Rightarrow E = \frac{1}{2} m_A v_1^2 + \frac{1}{2} m_B v_2^2 - \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$$

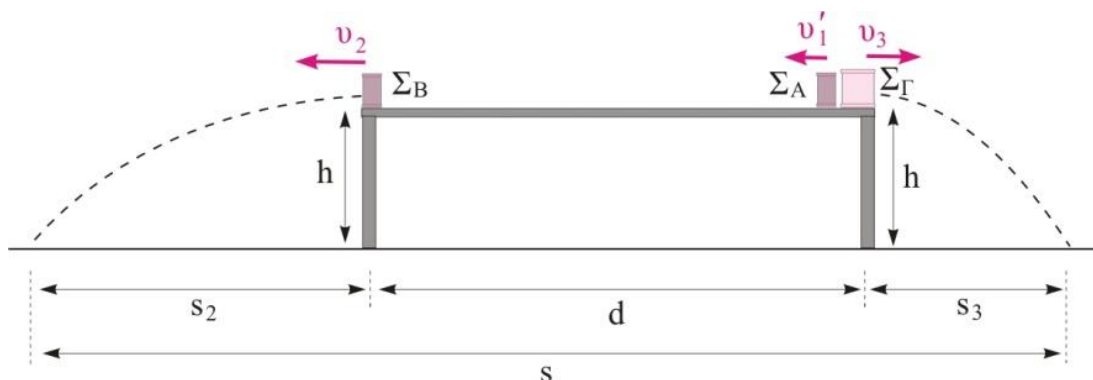
$$E = \frac{1}{2} 0,4\text{kg} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + \frac{1}{2} 0,2\text{kg} \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \frac{1}{2} 0,6\text{kg} \left(\frac{1}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow E = \frac{5}{3} \text{J}.$$

Γ) Το σώμα Σ_Γ μετά την ελαστική κρούση θα κινηθεί στην ίδια διεύθυνση με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση



$$v_3 = \frac{2m_A}{m_A + m_\Gamma} v_1 \Rightarrow v_3 = \frac{2 \cdot 0,4\text{kg}}{0,4\text{kg} + 1,2\text{kg}} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow v_3 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Τα σώματα Σ_B και Σ_Γ όταν αφήνουν το τραπέζι, κάνουν οριζόντια βολή. Σύμφωνα με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων, η χρονική διάρκεια της πτώσης τους, μέχρι να φθάσουν στο έδαφος, εξαρτάται από το ύψος που εκτοξεύονται

$$h = \frac{1}{2} g \Delta t_3^2 \Rightarrow \Delta t_3 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8\text{m}}{10\text{m/s}^2}} \Rightarrow \Delta t_3 = 0,4\text{s}.$$

Η οριζόντια μετατόπισή τους στο χρονικό αυτό διάστημα είναι

$$s_2 = v_2 \Delta t_3 \Rightarrow s_2 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,4\text{s} \Rightarrow s_2 = 1,2\text{m}$$

$$s_3 = v_3 \Delta t_3 \Rightarrow s_3 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,4\text{s} \Rightarrow s_3 = 0,4\text{m}.$$

Άρα η απόσταση των σημείων πτώσης των σωμάτων Σ_B και Σ_Γ στο έδαφος είναι

$$s = s_2 + s_3 + d \Rightarrow s = 1,2\text{m} + 0,4\text{m} + 2,5\text{m} \Rightarrow s = 4,1\text{m}.$$

Δ) Το σώμα Σ_A , μετά την ελαστική κρούση με το σώμα Σ_Γ , θα κινηθεί στην ίδια διεύθυνση, με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση

$$v'_1 = \frac{m_A - m_\Gamma}{m_A + m_\Gamma} v_1 \Rightarrow v'_1 = \frac{0,4\text{kg} - 1,2\text{kg}}{0,4\text{kg} + 1,2\text{kg}} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_1 = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Θα διανύσει ευθύγραμμα ομαλά το μήκος του τραπεζιού σε χρονικό διάστημα Δt_4

$$d = |v'_1| \Delta t_4 \Rightarrow \Delta t_4 = \frac{d}{|v'_1|} \Rightarrow \Delta t_4 = \frac{2,5\text{m}}{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow \Delta t_4 = 2,5\text{s}.$$

Έπειτα το σώμα Σ_A κάνει οριζόντια βολή. Η χρονική διάρκεια της πτώσης του, μέχρι να φθάσουν στο έδαφος είναι

$$h = \frac{1}{2} g \Delta t_5^2 \Rightarrow \Delta t_5 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8\text{m}}{10\text{m/s}^2}} \Rightarrow \Delta t_5 = 0,4\text{s}.$$

Η χρονική στιγμή t_3 που το σώμα Σ_A θα φτάσει στο έδαφος είναι

$$t_3 = (t_1 - 0) + \Delta t_2 + \Delta t_4 + \Delta t_5 \Rightarrow t_3 = 4,5\text{s} + 0,5\text{s} + 2,5\text{s} + 0,4\text{s} \Rightarrow t_3 = 7,9\text{s}.$$

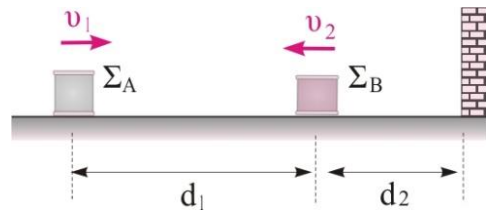
Ε) Για την οριζόντια βολή του σώματος Σ_A , εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας και βρίσκουμε την κινητική του ενέργεια όταν φτάσει στο έδαφος. Θεωρούμε ότι το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας είναι το δάπεδο

$$E_{\text{MHX}(\alpha\rho\chi)} = E_{\text{MHX}(\tau\epsilon\lambda)} \Rightarrow U_{(\alpha\rho\chi)} + K_{(\alpha\rho\chi)} = U_{(\tau\epsilon\lambda)} + K_{(\tau\epsilon\lambda)} \Rightarrow m_A g h + \frac{1}{2} m_A v_1'^2 = 0 + K_{(\tau\epsilon\lambda)} \Rightarrow$$

$$K_{(\tau\epsilon\lambda)} = 0,4\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,8\text{m} + \frac{1}{2} 0,4\text{kg} \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow K_{(\tau\epsilon\lambda)} = 3,4\text{J}.$$

Πρόβλημα 8.

Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο μεγάλης έκτασης βρίσκονται δύο σώματα Σ_A και Σ_B , με μάζες m_A και m_B αντίστοιχα, με $m_A = 3m_B$. Τα σώματα απέχουν μεταξύ τους $d_1 = 4\text{m}$ και το σώμα Σ_B βρίσκεται σε απόσταση $d_2 = 2\text{m}$ από λείο κατακόρυφο τοίχο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εκτοξεύουμε τα δύο σώματα το ένα προς το άλλο με ταχύτητες u_1 και u_2 , ίσων μέτρων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Κατά την κρούση η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_A είναι $\Delta p_1 = -3\text{Kg}\cdot\text{m/s}$, ενώ το σώμα Σ_B αποκτά ταχύτητα $u_2' = 4\text{m/s}$ και κινούμενο αντίθετα στην αρχική του κατεύθυνση προσπίπτει κάθετα στον τοίχο και συγκρούεται ελαστικά με αυτόν.



Να υπολογίσετε:

- A) τις ταχύτητες u_1 και u_2 των δύο σωμάτων πριν την κρούση.
- B) τις μάζες των δύο σωμάτων.
- Γ) τις ταχύτητες u_1'' και u_2'' των δύο σωμάτων μετά τη δεύτερη κρούση.
- Δ) τη χρονική στιγμή της τελευταίας κρούσης του σώματος Σ_B με τον τοίχο και την τελική απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων.

Λύση

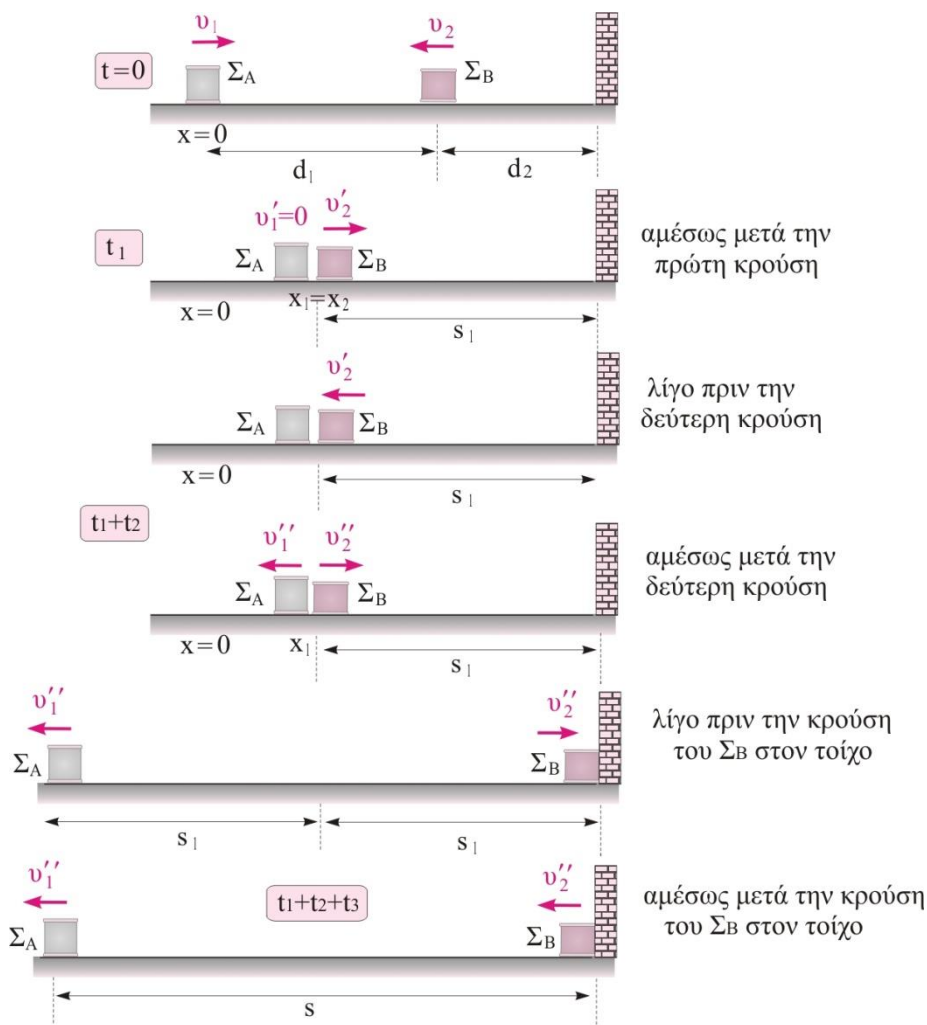
A) Η κρούση των δύο σωμάτων είναι μετωπική ελαστική. Το σώμα Σ_B μετά την κρούση θα κινηθεί στην ίδια διεύθυνση με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση

$$u_2' = \frac{2m_A}{m_A + m_B} u_1 + \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} u_2 \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) υπολογίζουμε τις ταχύτητες u_1 και u_2 των δύο σωμάτων πριν την κρούση, που είναι ίσου μέτρου, αλλά αντίθετης φοράς, άρα στην αντικατάσταση θέτουμε $u_2 = -u_1$

$$4 \frac{m}{s} = \frac{2 \cdot 3m_B}{3m_B + m_B} u_1 + \frac{m_B - 3m_B}{3m_B + m_B} (-u_1) \Rightarrow 4 \frac{m}{s} = \frac{6m_B}{4m_B} u_1 + \frac{-2m_B}{4m_B} (-u_1) \Rightarrow$$

$$4 \frac{m}{s} = \frac{8}{4} u_1 \Rightarrow u_1 = 2 \frac{m}{s} \quad \text{και} \quad u_2 = -2 \frac{m}{s}.$$



Β) Το σώμα Σ_A μετά την κρούση θα κινηθεί στην ίδια διεύθυνση με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση

$$v'_1 = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_1 + \frac{2m_B}{m_A + m_B} v_2 \Rightarrow v'_1 = \frac{3m_B - m_B}{3m_B + m_B} \cdot 2 \frac{m}{s} + \frac{2m_B}{3m_B + m_B} \cdot \left(-2 \frac{m}{s} \right) \Rightarrow v'_1 = 0$$

Κατά την κρούση, η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_A είναι $\Delta p_1 = -3\text{Kg} \cdot \text{m/s}$, άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta p_1 = m_A v'_1 - m_A v_1 \Rightarrow m_A = -\frac{\Delta p_1}{v_1} = -\frac{\left(-3 \frac{\text{kgm}}{\text{s}} \right)}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow m_A = 1,5\text{kg} \text{ και}$$

$$m_B = \frac{m_A}{3} = 0,5\text{kg}.$$

Γ) Το σώμα Σ_B κινούμενο αντίθετα στην αρχική του κατεύθυνση προσπίπτει κάθετα στον τοίχο, συγκρούεται ελαστικά με αυτόν και κινείται πάλι προς τα αριστερά με ταχύτητα ίδιου μέτρου, 4m/s . Έπειτα, συγκρούεται ξανά με το ακίνητο σώμα Σ_A . Οι ταχύτητες u_1'' και u_2'' των δύο σωμάτων μετά τη δεύτερη κρούση, αν θέσουμε $u_2' = -4\text{m/s}$ είναι

$$u_1'' = \frac{2m_B}{m_A + m_B} u_2' \Rightarrow u_1'' = \frac{2 \cdot 0,5\text{kg}}{1,5\text{kg} + 0,5\text{kg}} \cdot (-4) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$u_1'' = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$u_2'' = \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} u_2' \Rightarrow u_2'' = \frac{0,5\text{kg} - 1,5\text{kg}}{1,5\text{kg} + 0,5\text{kg}} \cdot (-4) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$u_2'' = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ) Θεωρούμε σημείο αναφοράς τη θέση του σώματος Σ_A τη χρονική στιγμή $t=0$. Οι εξισώσεις που δίνουν τη θέση των δύο σωμάτων σε σχέση με το χρόνο είναι:

$$x_1 = v_1 t \Rightarrow x_1 = 2t \quad (\text{SI})$$

$$x_2 = d_1 + v_2 t \Rightarrow x_2 = 4 - 2t \quad (\text{SI})$$

Όταν τα δύο σώματα συναντηθούν για την πρώτη τους κρούση ισχύει $x_1 = x_2$, οπότε παίρνουμε

$$4\text{m} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} t_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} t_1 \Rightarrow t_1 = 1\text{s}.$$

Η πρώτη κρούση γίνεται στη θέση

$$x_1 = v_1 t \Rightarrow x_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1\text{s} \Rightarrow x_1 = 2\text{m}.$$

Το σώμα Σ_A μετά την κρούση μένει ακίνητο, ενώ το σώμα Σ_B αποκτά ταχύτητα $u_2' = 4\text{m/s}$ και προσπίπτει κάθετα στον τοίχο, που απέχει

$$S_1 = d_2 + (d_1 - x_1) = 2\text{m} + 2\text{m} = 4\text{m}.$$

Το σώμα Σ_B καλύπτει την απόσταση S_1 δυο φορές μέχρι την επόμενη κρούση με το σώμα Σ_A σε χρονικό διάστημα Δt_2 για το οποίο ισχύει

$$2S_1 = v_2' \Delta t_2 \Rightarrow 2 \cdot 4\text{m} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = 2\text{s}.$$

Μετά τη δεύτερη κρούση τους, τα δύο σώματα κινούνται με ταχύτητες $v_1'' = -2 \frac{m}{s}$

και $v_2'' = 2 \frac{m}{s}$.

Το σώμα Σ_B μετά την δεύτερη κρούση του με το Σ_A καλύπτει την απόσταση S_1 μέχρι τον τοίχο σε χρονικό διάστημα Δt_3

$$S_1 = v_2'' \Delta t_3 \Rightarrow 4m = 2 \frac{m}{s} \cdot \Delta t_3 \Rightarrow \Delta t_3 = 2s.$$

Στο χρονικό διάστημα Δt_3 το σώμα Σ_A κινήθηκε προς τα αριστερά απόσταση επίσης S_1 , αφού έχει ίδιου μέτρου ταχύτητα με το σώμα Σ_B .

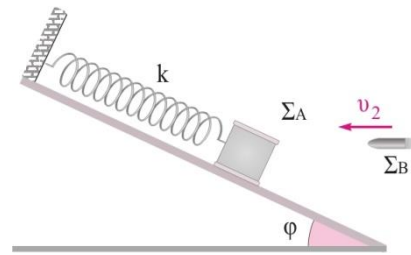
Η χρονική στιγμή της τελευταίας κρούσης του σώματος Σ_B με τον τοίχο είναι η

$$t = (t_1 - 0) + \Delta t_2 + \Delta t_3 \Rightarrow t = 5s.$$

Η τελική απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων είναι $S = 2S_1 = 8m$ γιατί μετά την τελευταία κρούση του σώματος Σ_B με τον τοίχο, τα δύο σώματα κινούνται με ίσες ταχύτητες και η απόστασή τους παραμένει σταθερή.

Πρόβλημα 9. **Νέο**

Ένα σώμα Σ_A , μάζας $m_1=2\text{kg}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\varphi=30^\circ$, δεμένο στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 είναι $x = \frac{1}{40} \eta \mu(10t + \frac{\pi}{6})$ (S.I.), λαμβάνοντας ως θετική



φορά τη φορά προς τη βάση του πλάγιου επιπέδου. Τη χρονική στιγμή $t = \frac{3\pi}{5}\text{s}$ ένα δεύτερο σώμα, Σ_B , μάζας $m_2=0,5\text{ kg}$, κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα $u_2=2\text{ m/s}$, συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Σ_A . Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Να υπολογίσετε:

- Α) την ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_A πριν την κρούση.
- Β) την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- Γ) τη θερμότητα που απελευθερώθηκε κατά την κρούση.
- Δ) την εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος σε σχέση με το χρόνο, αν λάβουμε νέα αρχή του χρόνου τη χρονική στιγμή της κρούσης.
- Ε) τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση που ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος είναι $-7,5 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$.

Δίνονται: $g=10\text{ m/s}^2$, $\eta \mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sigma \upsilon \nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Λύση

Α) Η ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \quad (1)$$

Από την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_A ,

$$x = \frac{1}{40} \eta \mu(10t + \frac{\pi}{6}) \quad (\text{S.I.})$$

προκύπτει

$$\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ και } A = \frac{1}{40} \text{ m.}$$

Η σταθερά k του ελατηρίου προκύπτει από τη σχέση

$$k = m_1 \omega^2 \Rightarrow k = 2 \text{ kg} \cdot \left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow k = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) υπολογίζουμε την ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_A πριν την κρούση

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} 200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \left(\frac{1}{40} \text{ m} \right)^2 \Rightarrow E = \frac{1}{16} \text{ J}.$$

Β) Τη χρονική στιγμή $t = \frac{3\pi}{5} \text{ s}$, που γίνεται η κρούση, το σώμα Σ_A βρίσκεται στη θέση

$$x = \frac{1}{40} \eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = \frac{1}{40} \text{ m} \cdot \eta\mu(10 \cdot \frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = \frac{1}{40} \text{ m} \cdot \eta\mu(\frac{37\pi}{6}) \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{40} \text{ m} \cdot \eta\mu(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = \frac{1}{40} \text{ m} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{80} \text{ m}.$$

Η εξίσωση της ταχύτητας της ταλάντωσης του σώματος δίνεται από τη σχέση

$$v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(10t + \frac{\pi}{6}) \quad (\text{SI}), \text{ με}$$

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{40} \text{ m} \Rightarrow v_{\max} = 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Άρα, τη χρονική στιγμή $t = \frac{3\pi}{5} \text{ s}$, η ταχύτητα του σώματος Σ_A είναι

$$v_1 = 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sigma\upsilon\nu(10 \cdot \frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow v_1 = 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sigma\upsilon\nu(\frac{37\pi}{6}) \Rightarrow$$

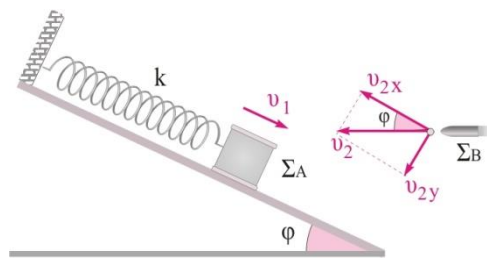
$$v_1 = 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Κατά την πλαστική κρούση των δύο σωμάτων, το σύστημα θεωρείται μονωμένο μόνο στον άξονα του πλάγιου επιπέδου, αφού στον κάθετο άξονα της κίνησης ασκείται εξωτερική δύναμη, η κάθετη αντίδραση του επιπέδου. Θα εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής, αφού πρώτα αναλύσουμε την οριζόντια ταχύτητα του σώματος Σ_B . Είναι

$$v_{2x} = v_2 \sigma\upsilon\nu\varphi = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ \Rightarrow v_{2x} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$v_{2x} = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον άξονα x , θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά προς τη βάση του πλάγιου επιπέδου και υπολογίζουμε την ταχύτητα V του συσσωματώματος



$$\vec{p}_{x, \text{πριν}} = \vec{p}_{x, \text{μετά}} \Rightarrow m_1 v_1 - m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) V \Rightarrow$$

$$V = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2} = \frac{2\text{kg} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,5\text{kg} \cdot \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{kg} + 0,5\text{kg}} \Rightarrow V = -\frac{\sqrt{3}}{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Γ) Η θερμότητα που ελευθερώθηκε κατά την κρούση είναι

$$Q = |\Delta K| = K_{(\alpha\rho\chi)} - K_{(\tau\epsilon\lambda)} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 \Rightarrow$$

$$Q = \frac{1}{2} 2\text{kg} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{8} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + \frac{1}{2} 0,5\text{kg} \cdot \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \frac{1}{2} (2\text{kg} + 0,5\text{kg}) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{10} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow$$

$$Q = \frac{323}{320} \text{J}.$$

Δ) Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται

$$\text{από τη σχέση: } U = \frac{1}{2} k x'^2.$$

Πρέπει να βρούμε πρώτα την εξίσωση της απομάκρυνσης της νέας ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο.

$$x' = A' \eta \mu(\omega' t' + \phi_0) \quad (2)$$

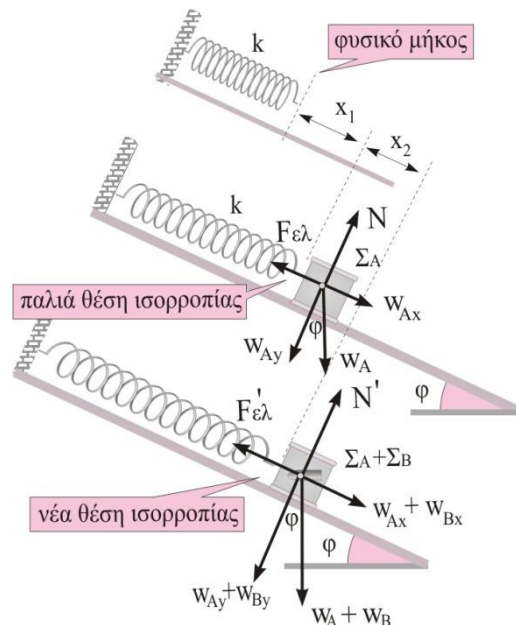
Πρέπει να υπολογίσουμε τα A' , ω' , ϕ_0 .

Στην θέση ισορροπίας της αρχικής ταλάντωσης το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά x_1 για το οποίο ισχύει

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow w_{Ax} = F_{ελ} \Rightarrow m_1 g \cdot \eta \mu \phi = k x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{m_1 g \cdot \eta \mu \phi}{k} \Rightarrow x_1 = \frac{2\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5}{200 \frac{\text{N}}{\text{m}}}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0,05\text{m}.$$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας μετατοπισμένη κατά x_2 από την αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_A



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow w_{AB,x} = F_{ελ} \Rightarrow (m_1 + m_2)g \cdot \eta \mu \varphi = k(x_1 + x_2) \Rightarrow$$

$$(2\text{kg} + 0,5\text{kg}) \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5 = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}} (0,1\text{m} + x_2) \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{1}{80} \text{m}.$$

Κατά συνέπεια, η θέση της κρούσης που ήταν η $x = \frac{1}{80} \text{m}$, αποτελεί τη θέση ισορροπίας

της νέας ταλάντωσης και το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος, $V = -\frac{\sqrt{3}}{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

αποτελεί το πλάτος ταχύτητας της νέας ταλάντωσης. Άρα, τη χρονική στιγμή $t' = 0$ το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση $x' = 0$ με αρνητική ταχύτητα, δηλαδή έχει αρχική φάση $\varphi_0 = \pi \text{rad}$.

Η κυκλική συχνότητα της νέας ταλάντωσης είναι:

$$k = (m_1 + m_2) \omega'^2 \Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{200 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{2\text{kg} + 0,5\text{kg}}} \Rightarrow \omega' = 4\sqrt{5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Από το πλάτος της ταχύτητας βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης

$$v_{\max} = |V| = \omega' A' \Rightarrow A' = \frac{v_{\max}}{\omega'} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\sqrt{5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \Rightarrow A' = \frac{1}{40} \sqrt{\frac{3}{5}} \text{m}.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) για την εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος προκύπτει:

$$x' = A' \eta \mu(\omega' t + \varphi_0) \Rightarrow x' = \frac{1}{40} \sqrt{\frac{3}{5}} \eta \mu(4\sqrt{5}t + \pi) \quad (\text{S.I.})$$

Άρα, η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος σε σχέση με το χρόνο είναι

$$U = \frac{1}{2} k x'^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot 200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \left(\frac{1}{40} \sqrt{\frac{3}{5}} \eta \mu(4\sqrt{5}t + \pi) \right)^2 \Rightarrow U = \frac{3}{80} \cdot \eta \mu^2(4\sqrt{5}t + \pi) \quad (\text{S.I.})$$

Ε) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται το συσσωμάτωμα, δηλαδή με τη δύναμη επαναφοράς. Άρα

$$\frac{dp}{dt} = F_{\varepsilon\pi} = -kx \Rightarrow -7,5 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} = -200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x \Rightarrow$$

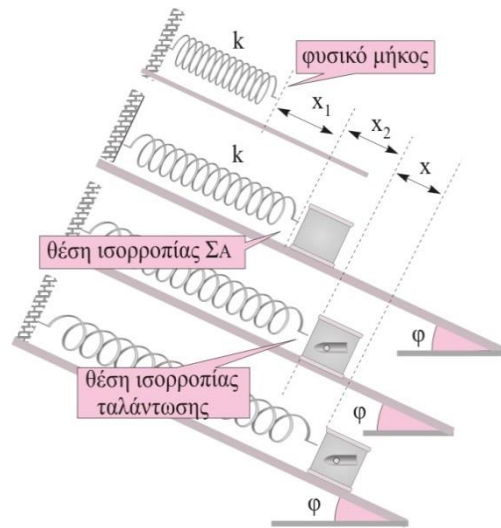
$$x = \frac{3}{80} \text{ m}.$$

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση αυτή είναι

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} k (x_1 + x_2 + x)^2 \Rightarrow$$

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} \cdot 200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \left(\frac{1}{20} \text{ m} + \frac{1}{80} \text{ m} + \frac{3}{80} \text{ m} \right)^2 \Rightarrow$$

$$U_{\varepsilon\lambda} = 1 \text{ J}.$$



Πρόβλημα 10. **Νέο**

Δύο σώματα, Σ_B , μάζας $m_B=2\text{kg}$ και Σ_Γ , μάζας $m_\Gamma=4\text{kg}$, βρίσκονται ακίνητα πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένα στα δύο άκρα οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=4800\text{N/m}$, το οποίο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Ένα τρίτο σώμα, Σ_A , μάζας $m_A=1\text{kg}$, κινούμενο στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου με ταχύτητα $v_A=9\text{m/s}$, συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το σώμα Σ_B .

Να υπολογίσετε:

- τις ταχύτητες των σωμάτων Σ_A και Σ_B αμέσως μετά τη στιγμή της σύγκρουσής τους.
- τις ταχύτητες των σωμάτων Σ_B και Σ_Γ τη στιγμή της μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου.
- το ποσοστό % της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_A που μεταφέρθηκε στο ελατήριο τη στιγμή της μέγιστης συσπείρωσής του.
- το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_Γ , όταν το σώμα Σ_B έχει ταχύτητα $v'_2=4\text{m/s}$.

Λύση

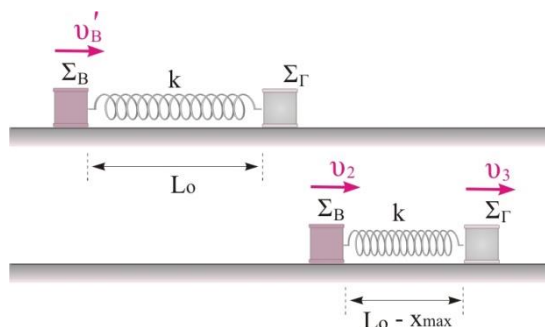
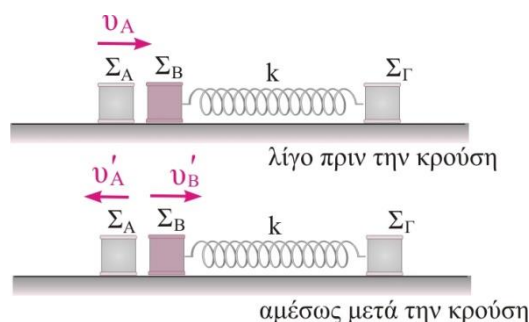
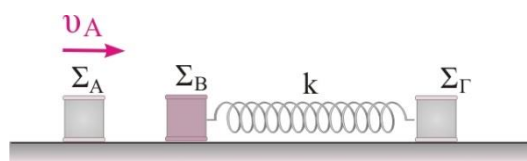
A) Η κρούση των δύο σωμάτων είναι μετωπική ελαστική. Τα σώματα μετά την κρούση θα κινηθούν στην ίδια διεύθυνση με ταχύτητες που δίνονται από τις σχέσεις:

$$v'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_1 \Rightarrow v'_A = \frac{1\text{kg} - 2\text{kg}}{1\text{kg} + 2\text{kg}} \cdot 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow v'_A = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$v'_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_1 \Rightarrow v'_B = \frac{2 \cdot 1\text{kg}}{1\text{kg} + 2\text{kg}} \cdot 9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_B = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

B) Μετά την κρούση το ελατήριο αρχίζει να συμπιέζεται και ασκεί δυνάμεις στα σώματα Σ_B και Σ_Γ , οπότε το σώμα Σ_B αρχίζει να κάνει επιβραδυνόμενη κίνηση, ενώ το σώμα Σ_Γ επιταχυνόμενη κίνηση. Τα δύο σώματα αποκτούν ίσες ταχύτητες $v_2=v_3$, τη χρονική



στιγμή της μέγιστης συσπίρωσης του ελατηρίου.

Το σύστημα των σωμάτων Σ_B - Σ_Γ και του ελατηρίου είναι μονωμένο. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για να υπολογίσουμε την ταχύτητα των δύο σωμάτων τη στιγμή της μέγιστης συσπίρωσης του ελατηρίου

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \Rightarrow m_B v'_B = m_B v_2 + m_\Gamma v_3 \Rightarrow 2\text{kg} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2\text{kg} \cdot v_2 + 4\text{kg} \cdot v_3 \Rightarrow 12 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6v_2 \Rightarrow v_2 = v_3 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Γ) Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας όλη η κινητική ενέργεια που απέκτησε το σώμα Σ_B μετά την κρούση, στη θέση της μέγιστης συσπίρωσης, x_{max} , του ελατηρίου θα μετατραπεί σε δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και σε κινητική ενέργεια των σωμάτων Σ_B , Σ_Γ . Άρα

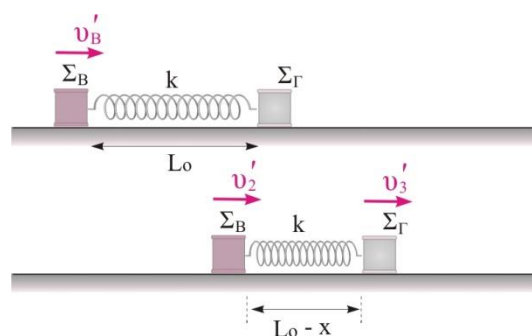
$$K_B' = U_{\text{ελ}} + K_2 + K_3 \Rightarrow U_{\text{ελ(max)}} = \frac{1}{2} m_B v'^2_B - \frac{1}{2} (m_B v_2^2 + m_\Gamma v_3^2) \Rightarrow U_{\text{ελ(max)}} = \frac{1}{2} 2\text{kg} \cdot \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{1}{2} (2\text{kg} + 4\text{kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow U_{\text{ελ(max)}} = 24\text{J}$$

Το ποσοστό % της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_A που μεταφέρθηκε στο ελατήριο τη στιγμή της μέγιστης συσπίρωσής του είναι

$$\frac{U_{\text{ελ(max)}}}{K_A} 100\% = \frac{U_{\text{ελ(max)}}}{\frac{1}{2} m_A v_A^2} \cdot 100\% = \frac{24\text{J}}{\frac{1}{2} \cdot 1\text{kg} \cdot \left(9 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \cdot 100\% = \frac{48}{81} \cdot 100\% \Rightarrow \frac{U_{\text{ελ(max)}}}{K_A} 100\% = \frac{4800}{81} \% = \frac{1600}{27} \%.$$

Δ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_Γ σε μια χρονική στιγμή βρίσκεται από τη σχέση

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F \frac{dx}{dt} = kxv'_3 \quad (1)$$



Πρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα v'_3 του σώματος Σ_Γ , όταν το σώμα Σ_B έχει ταχύτητα $v'_2 = 4\text{m/s}$ και την παραμόρφωση, x , του ελατηρίου την ίδια χρονική στιγμή.

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \Rightarrow m_B v_B' = m_B v_2' + m_{\Gamma} v_3' \Rightarrow 2\text{kg} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2\text{kg} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 4\text{kg} \cdot v_3' \Rightarrow$$

$$v_3' = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε

$$K_B' = U_{\varepsilon\lambda} + K_2' + K_3' \Rightarrow \frac{1}{2} m_B v_B'^2 = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m_B (v_2')^2 + \frac{1}{2} m_{\Gamma} (v_3')^2 \Rightarrow$$

$$2\text{kg} \cdot \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 4800 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x^2 + 2\text{kg} \cdot \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 4\text{kg} \cdot \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{4800}} \text{m}.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) βρίσκουμε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος ΣΓ

$$\left| \frac{dK}{dt} \right| = kx v_3' \Rightarrow \left| \frac{dK}{dt} \right| = 4800 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{6}{\sqrt{4800}} \text{m} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dK}{dt} \right| = 240\sqrt{3} \frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 29/7/2020

Επιμέλεια: Παναγιώτης Μπετσάκος, Αθανάσιος Παπαδημητρίου, Γεώργιος Παπαλεξίου

Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης