

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο: ΚΥΜΑΤΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΚΥΜΑΤΩΝ - ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ - ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 , Π_2 ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια ενός υγρού με το ίδιο πλάτος A , παράγοντας κύματα συχνότητας f και μήκους κύματος λ . Σημείο (Σ) της επιφάνειας του υγρού απέχει κατά $r_1 = 4\lambda$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 = \frac{17}{6}\lambda$ από την πηγή Π_2 . Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου (Σ) αφού συμβάλλουν σε αυτό τα κύματα ισούται με:

α) $u_{\max} = 2\sqrt{3}\pi f A$.

β) $u_{\max} = 4\pi f A$.

γ) $u_{\max} = \pi f A$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση η (α).

Μετά τη συμβολή των κυμάτων, το σημείο (Σ) ταλαντώνεται με πλάτος:

$$A_{\Sigma} = 2A \left| \sin \left(2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right) \right| \Rightarrow$$

$$A_{\Sigma} = 2A \left| \sin \frac{7\pi}{6} \right| \Rightarrow A_{\Sigma} = \sqrt{3}A$$

$$\text{Άρα } u_{\max(\Sigma)} = \omega A_{\Sigma} \Rightarrow u_{\max(\Sigma)} = 2\pi f \cdot \sqrt{3}A$$

Ερώτηση 2.

Κατά μήκος μίας ελαστικής χορδής που ταυτίζεται με τον άξονα $x'Ox$ έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, ως αποτέλεσμα της συμβολής δύο αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων με το ίδιο πλάτος και το ίδιο μήκος κύματος $\lambda = 0,8\text{m}$. Στο σημείο O ($x = 0$) έχει δημιουργηθεί κοιλία. Τα σημεία A ($x_A = 0,4\text{m}$) και B ($x_B = 1,6\text{m}$) παρουσιάζουν διαφορά φάσης:

α) $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$.

β) $\Delta\phi = \pi / 2 \text{ rad}$.

γ) $\Delta\phi = 0 \text{ rad}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

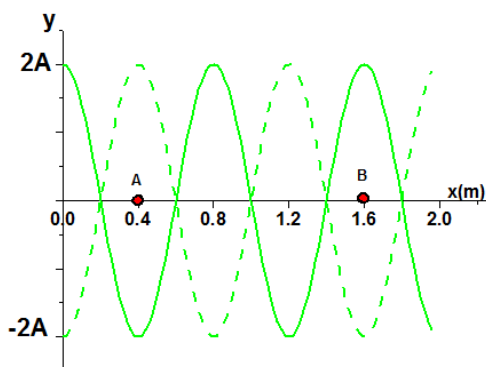
Το A ικανοποιεί τη συνθήκη κοιλιών $x = k\lambda / 2$, για $k = 1$ ενώ το B για $k = 4$. Άρα είναι κοιλίες και μεταξύ τους παρεμβάλλονται άλλες δύο που αντιστοιχούν σε $k = 2$ και $k = 3$. Με δεδομένο ότι οι διαδοχικές κοιλίες βρίσκονται σε αντίθεση φάσης, για τα A, B θα είναι $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$, δηλαδή η πρόταση (α).

Ή

$$\text{Είναι: } y_A = 2A \sin\left(2\pi \frac{x_A}{\lambda}\right) \eta\mu\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = 2A \cdot \sin\pi \cdot \eta\mu\omega t = -2A \eta\mu\omega t = 2A \eta\mu(\omega t + \pi)$$

$$\text{ενώ: } y_B = 2A \sin\left(2\pi \frac{x_B}{\lambda}\right) \eta\mu\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = 2A \cdot \sin 4\pi \cdot \eta\mu\omega t = 2A \eta\mu\omega t$$

Άρα $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$.



Ερώτηση 3.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Α και Β ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια ενός υγρού με το ίδιο πλάτος, παράγοντας κύματα με μήκος κύματος $\lambda = 0,8 \text{ m}$. Σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού απέχει $r_1 = 2,6 \text{ m}$ από την πηγή Α και μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό παραμένει ακίνητο. Η απόσταση r_2 του Σ από την πηγή Β μπορεί να είναι ίση με:

- α) $1,8 \text{ m}$.
- β) $0,6 \text{ m}$.
- γ) 2 m .

Λύση

Σωστή απάντηση: (β)

Το σημείο Σ είναι σημείο απόσβεσης αφού μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό, παραμένει ακίνητο. Άρα θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2,6 - r_2 = (2N + 1) \cdot 0,4 \Rightarrow N = \frac{2,2 - r_2}{0,8}, N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Από τις δοθείσες τιμές μόνο η (β) έχει ακέραια λύση, όπου $N = \frac{2,2 - 0,6}{0,8} \Rightarrow N = 2$

Ερώτηση 4.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Α και Β ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια ενός υγρού με το ίδιο πλάτος, παράγοντας κύματα με μήκος κύματος λ . Αν η απόσταση των πηγών ισούται με λ , τότε μεταξύ των πηγών διέρχονται:

α) δύο υπερβολές ενίσχυσης και δύο υπερβολές απόσβεσης.

β) μία υπερβολή ενίσχυσης και δύο υπερβολές απόσβεσης.

γ) μία υπερβολή ενίσχυσης και καμία υπερβολή απόσβεσης.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (β)

Αν (Σ) σημείο απόσβεσης επί του ΑΒ το οποίο απέχει από τις πηγές x_1 και x_2 αντίστοιχα, τότε τα κύματα αλληλοαναιρούνται οπότε πρέπει να ισχύει η συνθήκη της αναιρετικής ή ακυρωτικής συμβολής: $x_1 - x_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$, $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Επίσης: $x_1 + x_2 = AB$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει:

$$x_1 = \frac{(2N+1)\frac{\lambda}{2} + AB}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{(2N+1)\frac{\lambda}{2} + \lambda}{2}$$

Το σημείο (Σ) βρίσκεται μεταξύ των πηγών άρα:

$$0 < x_1 < AB \Rightarrow 0 < \frac{(2N+1)\frac{\lambda}{2} + \lambda}{2} < \lambda \Rightarrow -\lambda < (2N+1)\frac{\lambda}{2} < \lambda \Rightarrow -1,5 < N < 0,5$$

Άρα ο ακέραιος Ν μπορεί να πάρει τις τιμές $N=0$ και $N=-1$. Συνεπώς υπάρχουν δύο σημεία απόσβεσης επί του ΑΒ, δηλαδή το ΑΒ τέμνεται από δύο υπερβολές απόσβεσης.

Αντίστοιχα αν (Σ) σημείο ενίσχυσης επί του ΑΒ το οποίο απέχει από τις πηγές κατά x_1 και x_2 αντίστοιχα, τότε θα πρέπει να επαληθεύει τη συνθήκη ενισχυτικής συμβολής: $x_1 - x_2 = N\lambda$, $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Επίσης: $x_1 + x_2 = AB$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει:

$$x_1 = \frac{N\lambda + AB}{2} = \frac{N\lambda + \lambda}{2} = \frac{(N+1)\lambda}{2}$$

Το σημείο (Σ) βρίσκεται μεταξύ των πηγών άρα:

$$0 < x_1 < AB \Rightarrow 0 < \frac{(N+1)\lambda}{2} < \lambda \Rightarrow -1 < N < 1$$

Άρα ο ακέραιος N μπορεί να πάρει την τιμή $N = 0$ και το AB τέμνεται από μία υπερβολή ενίσχυσης.

Συνολικά το AB τέμνεται από μία υπερβολή ενίσχυσης και δύο υπερβολές απόσβεσης.

Ερώτηση 5.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 , Π_2 ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια ενός υγρού με το ίδιο πλάτος $A = 0,4 \text{ m}$ και περίοδο $T = 0,1 \text{ s}$. Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος λ . Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει r_1 από την πηγή Π_1 και r_2 από την πηγή Π_2 , με $r_1 - r_2 = \frac{31\lambda}{6}$. Το σημείο (Σ), μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό, έχει μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης μέτρου:

α) $16\pi \text{ m/s}$.

β) $8\pi\sqrt{3} \text{ m/s}$.

γ) $2\pi \text{ m/s}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (β)

Το πλάτος του (Σ) μετά τη συμβολή των κυμάτων ισούται με:

$$A_{\Sigma} = 2A \left| \sin \left(2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right) \right| = 2A \left| \sin \left(\frac{31\pi}{6} \right) \right| = 2A \left| \sin \left(5\pi + \frac{\pi}{6} \right) \right| = \sqrt{3}A = \sqrt{3} \cdot 0,4 \text{ m}$$

$$\text{Άρα: } u_{\max(\Sigma)} = \omega A_{\Sigma} = \frac{2\pi}{T} \cdot A_{\Sigma} = 8\pi\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ερώτηση 6.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1, Π_2 ταλαντώνονται κάθετα στην ελαστική επιφάνεια ενός υγρού με το ίδιο πλάτος A , παράγοντας κύματα με μήκος κύματος λ . Τα κύματα συμβάλλουν στη επιφάνεια του υγρού. Το πλήθος των υπερβολών ενίσχυσης που τέμνουν το τμήμα που συνδέει τις πηγές:

α) είναι άρτιο.

β) είναι περιττό.

γ) είναι άρτιο αν οι πηγές απέχουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του λ και περιττό αν οι πηγές απέχουν περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/2$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (β)

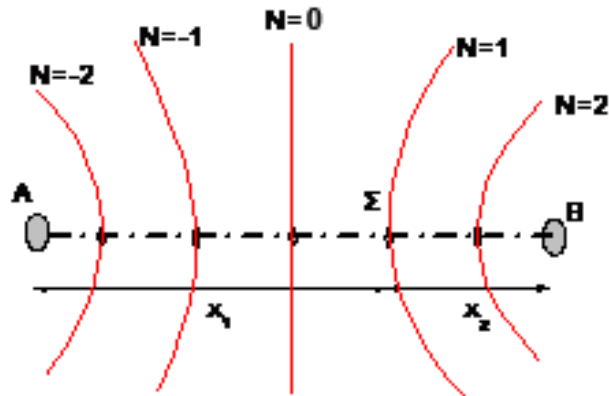
Έστω A και B τα σημεία της επιφάνειας όπου βρίσκονται οι πηγές. Αν (Σ) σημείο ενίσχυσης επί του AB το οποίο απέχει από τις πηγές κατά x_1 και x_2 αντίστοιχα, τότε θα πρέπει να επαληθεύει τη συνθήκη ενισχυτικής συμβολής:

$$x_1 - x_2 = N\lambda, N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Επίσης: $x_1 + x_2 = AB$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει:

$$x_1 = \frac{N\lambda + AB}{2}$$



Το σημείο (Σ) βρίσκεται μεταξύ των πηγών άρα:

$$0 < x_1 < AB \Rightarrow 0 < \frac{N\lambda + AB}{2} < AB \Rightarrow -\frac{AB}{\lambda} < N < \frac{AB}{\lambda}$$

Το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές ο ακέραιος N έχει συμμετρικά άκρα ως προς το 0, άρα το πλήθος των τιμών του N εκατέρωθεν του 0 θα είναι άρτιο. Στο σύνολο ανήκει

όμως και το 0 , άρα το σύνολο των ακεραίων του διαστήματος είναι περιττό. Άρα και το αντίστοιχο πλήθος των υπερβολών ενίσχυσης που τέμνουν το τμήμα AB θα είναι περιττό.

Ερώτηση 7.

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος A και το ίδιο μήκος κύματος λ , με αποτέλεσμα στη χορδή να έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Τα σημεία A και B του μέσου είναι κοιλίες ενώ $AB = 3\lambda$.

Μεταξύ των A και B εμφανίζονται:

α) 6 κοιλίες.

β) 6 δεσμοί.

γ) 5 δεσμοί.

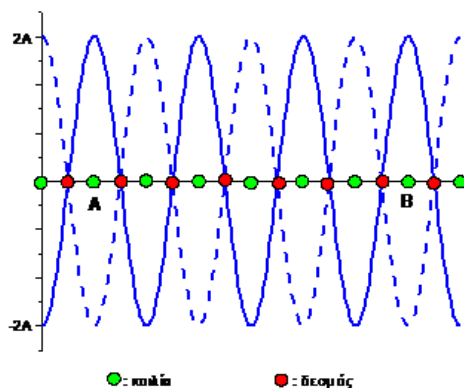
Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (β)

Τα A και B είναι κοιλίες, άρα: $x_A = N \frac{\lambda}{2}$ και $x_B = (N + \kappa) \frac{\lambda}{2}$, όπου κ ο αριθμός των κοιλιών (άρα και των δεσμών που προηγούνται από αυτές) που υπάρχουν μέχρι και το B

Οπότε αφαιρώντας έχουμε: $x_B - x_A = \kappa \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 3\lambda = \kappa \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \kappa = 6$



Ερώτηση 8.

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με πλάτος $A = 0,2 \text{ m}$ και συχνότητα $f = 5 \text{ Hz}$. Τα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα $u = 2 \text{ m/s}$ και δημιουργούν στάσιμο κύμα, με κοιλία στο σημείο $O(x = 0)$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

Το στάσιμο κύμα έχει εξίσωση:

α) $y = 0,4 \sin(5\pi x) \eta\mu(10\pi t)$ (S.I.)

β) $y = 0,4 \sin(10\pi x) \eta\mu(5\pi t)$ (S.I.)

γ) $y = 0,4 \sin(5\pi x) \eta\mu(5\pi t)$ (S.I.)

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (α)

Από την εξίσωση της ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων έχουμε: $u = \lambda f \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \eta\mu\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \Rightarrow y = 0,4 \sin(5\pi x) \eta\mu(10\pi t)$$

Ερώτηση 9.

Κατά μήκος μίας ελαστικής χορδής που ταυτίζεται με τον άξονα $x'Ox$ έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, ως αποτέλεσμα της συμβολής δύο αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα. Τα σημεία A και B της χορδής είναι διαδοχικά σημεία στα οποία εμφανίζονται κοιλίες σε συμφωνία φάσης.

Μεταξύ των A και B υπάρχουν:

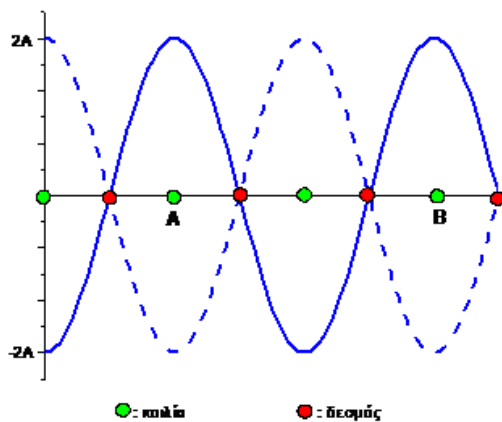
- α) δύο δεσμοί.
- β) ένας δεσμός.
- γ) τρεις δεσμοί.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (α)

Δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν κατά $\lambda / 2$ και ταλαντώνονται σε αντίθεση φάσης. Άρα οι κοιλίες A, B ανήκουν σε ατράκτους μεταξύ των οποίων μεσολαβεί μία ακόμα, η οποία ορίζεται από δύο δεσμούς. Συνεπώς μεταξύ των A και B παρεμβάλλονται δύο δεσμοί.



Ερώτηση 10.

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με ίσα πλάτη και ίσες συχνότητες. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα. Δύο υλικά σημεία Κ, Λ του μέσου απέχουν μεταξύ τους

απόσταση $\frac{\lambda}{4}$. Η διαφορά φάσης με την οποία ταλαντώνονται τα σημεία Κ και Λ μπορεί να είναι ίση με:

- α) 0.
- β) $\pi/4$.
- γ) $\pi/2$.

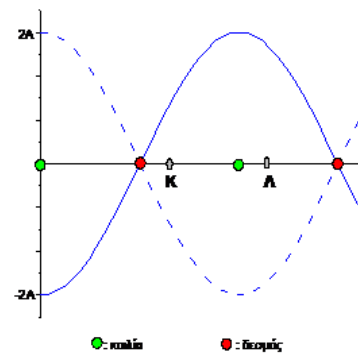
Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (α)

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι $\frac{\lambda}{2}$.

Τα Κ, Λ επειδή απέχουν μεταξύ τους $\frac{\lambda}{4}$, μπορεί είτε να βρίσκονται στην ίδια άτρακτο (μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών) είτε εκατέρωθεν ενός δεσμού. Σε περίπτωση που τα Κ και Λ βρίσκονται εκατέρωθεν ενός δεσμού, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεών τους είναι ίση με π . Η απάντηση αυτή όμως δεν περιλαμβάνεται στις επιλογές μας. Άρα τα Κ, Λ ανήκουν στην ίδια άτρακτο και βρίσκονται σε συμφωνία φάσης.



Ερώτηση 11.

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με πλάτος A και μήκος κύματος $\lambda = 1,2 \text{ m}$. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα, με κοιλία στο σημείο $O(x=0)$. Τα υλικά σημεία O και $A(x_A > 0)$ είναι διαδοχικά σημεία με μέγιστο πλάτος ταλάντωσης που βρίσκονται σε συμφωνία φάσης.

Η συντεταγμένη της θέσης του σημείου A είναι:

α) $x_A = 0,3 \text{ m}$.

β) $x_A = 0,6 \text{ m}$.

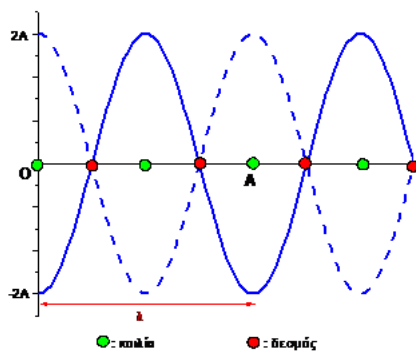
γ) $x_A = 1,2 \text{ m}$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (γ)

Δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν κατά $\lambda/2$ και ταλαντώνονται σε αντίθεση φάσης. Άρα οι κοιλίες O και A ανήκουν σε ατράκτους μεταξύ των οποίων μεσολαβεί μία ακόμα, συνεπώς απέχουν κατά $\lambda = 1,2 \text{ m}$.



Ερώτηση 12.

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με πλάτος A και μήκος κύματος λ . Το σημείο A του μέσου είναι δεσμός ενώ το σημείο B είναι κοιλία. Μεταξύ των A και B εμφανίζονται τρεις κοιλίες.

Η απόσταση μεταξύ των A και B ισούται με:

α) $\frac{5}{4}\lambda$.

β) $\frac{7}{4}\lambda$.

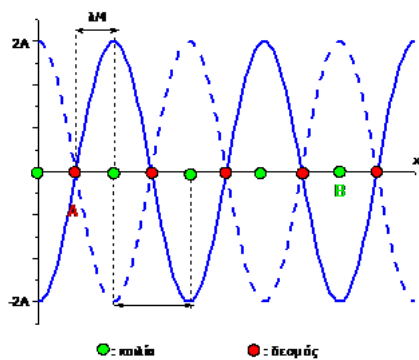
γ) $\frac{7}{2}\lambda$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (β)

Δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν $\lambda/2$, άρα η απόσταση μεταξύ των 4 κοιλιών είναι $\frac{3\lambda}{2}$ (βλέπε και σχήμα). Μία κοιλία από τον πλησιέστερο δεσμό απέχει $\lambda/4$. Μεταξύ των A και B παρεμβάλλονται τρεις κοιλίες, άρα τα A , B απέχουν κατά $\frac{3}{2}\lambda + \frac{\lambda}{4} = \frac{7}{4}\lambda$.



Ερώτηση 13.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1, Π_2 βρίσκονται στα σημεία (Α) και (Β) αντίστοιχα της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού. Οι πηγές ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού με το ίδιο πλάτος Α, παράγοντας κύματα με μήκος κύματος λ . Αν $(AB) = 2,4\lambda$, τότε μεταξύ των (Α) και (Β) και επί του (ΑΒ) το πλήθος των σημείων απόσβεσης είναι:

α) 4.

β) 5.

γ) 6.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (α)

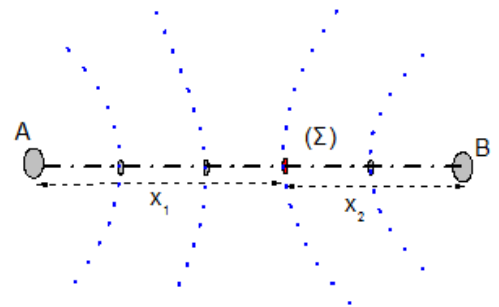
Αν (Σ) σημείο απόσβεσης επί του ΑΒ το οποίο απέχει από τις πηγές κατά x_1 και x_2 αντίστοιχα, τότε θα πρέπει να επαληθεύει τη συνθήκη ακυρωτικής συμβολής:

$$x_1 - x_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}, N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Επίσης: $x_1 + x_2 = AB$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις

$$\text{προκύπτει: } x_1 = \frac{(2N+1)\frac{\lambda}{2} + AB}{2}$$



Το σημείο (Σ) βρίσκεται μεταξύ των πηγών άρα:

$$\begin{aligned}
 0 < x_1 < AB &\Rightarrow 0 < \frac{(2N+1)\frac{\lambda}{2} + AB}{2} < AB \Rightarrow -AB < (2N+1)\frac{\lambda}{2} < AB \Rightarrow -2,4\lambda < (2N+1)\frac{\lambda}{2} < 2,4\lambda \Rightarrow \\
 &\Rightarrow -4,8 < 2N+1 < 4,8 \Rightarrow -2,9 < N < 1,9
 \end{aligned}$$

Άρα ο ακέραιος N μπορεί να πάρει τις τιμές $N = -2, -1, 0, +1$, καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί με μια υπερβολή απόσβεσης. Συνολικά το ΑΒ τέμνεται από 4 υπερβολές απόσβεσης.

Ερώτηση 14.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1, Π_2 βρίσκονται στα σημεία (Α) και (Β) αντίστοιχα της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού. Οι πηγές ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού με το ίδιο πλάτος A , παράγοντας κύματα με μήκος κύματος λ .

Αν $(AB) = 2,4\lambda$, τότε μεταξύ των (Α) και (Β) και επί του (ΑΒ) το πλήθος των σημείων ενίσχυσης είναι:

α) 3.

β) 4.

γ) 5.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (γ)

Αν (Σ) σημείο ενίσχυσης επί του ΑΒ το οποίο απέχει από τις πηγές κατά x_1 και x_2 αντίστοιχα, τότε θα πρέπει να επαληθεύει τη συνθήκη ενισχυτικής συμβολής:

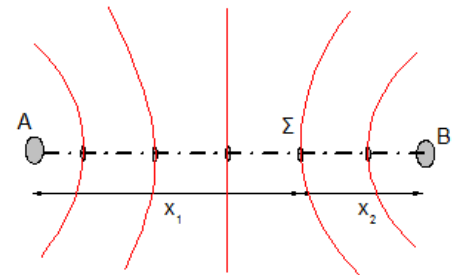
$$x_1 - x_2 = N\lambda, N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Επίσης: $x_1 + x_2 = AB$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει:

$$x_1 = \frac{N\lambda + AB}{2}$$

Το σημείο (Σ) βρίσκεται μεταξύ των πηγών άρα:



$$0 < x_1 < AB \Rightarrow 0 < \frac{N\lambda + AB}{2} < AB \Rightarrow 0 < N\lambda + 2,4\lambda < 4,8\lambda \Rightarrow -2,4\lambda < N\lambda < 2,4\lambda \Rightarrow -2,4 < N < 2,4$$

Άρα ο ακέραιος N μπορεί να πάρει τις τιμές $N = 0, \pm 1, \pm 2$, καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί με μια υπερβολή ενίσχυσης. Συνολικά το ΑΒ τέμνεται από 5 υπερβολές ενίσχυσης.

Ερώτηση 15.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1, Π_2 βρίσκονται στα σημεία (Α) και (Β) αντίστοιχα της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού. Οι πηγές ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού με το ίδιο πλάτος A , παράγοντας κύματα με μήκος κύματος λ . Τα κύματα των πηγών συμβάλλουν σε σημείο (Σ) της επιφάνειας με χρονική διαφορά $\Delta t = T$.

Η μέγιστη ταχύτητα του υλικού σημείου (Σ) μετά τη συμβολή των κυμάτων είναι:

- α) ίση με τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης των πηγών.
- β) διπλάσια από τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης των πηγών.
- γ) τριπλάσια από τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης των πηγών.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (β)

Είναι $\Delta t = T$ άρα $r_2 - r_1 = \lambda$. Άρα:

$$A_{\Sigma}' = 2A \left| \sin \left(\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \right) \right| = 2A \left| \sin \left(\pi \frac{-\lambda}{\lambda} \right) \right| = 2A \left| \sin(-\pi) \right| = 2A$$

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου (Σ) μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό είναι:

$u_{\max(\Sigma)} = \omega A_{\Sigma}' = 2\omega A = 2u_{\max(\Pi)}$ όπου $u_{\max(\Pi)}$ η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των πηγών.

Ερώτηση 16.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1, Π_2 βρίσκονται στα σημεία (Α) και (Β) αντίστοιχα της ήρεμης επιφάνειας ενός υγρού. Οι πηγές ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού με το ίδιο πλάτος A , παράγοντας κύματα με μήκος κύματος λ .

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων απόσβεσης που ανήκουν στο τμήμα (ΑΒ) ισούται με:

α) λ .

β) $\frac{\lambda}{2}$.

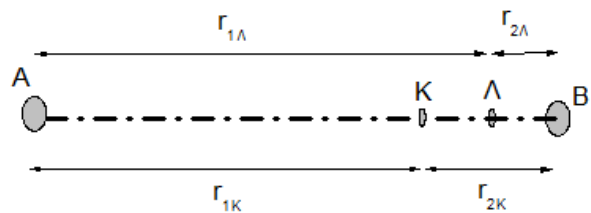
γ) $\frac{\lambda}{4}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (β)

Έστω Κ, Λ δύο διαδοχικά σημεία απόσβεσης του τμήματος ΑΒ που συνδέει τις πηγές. Αν r_{1K}, r_{2K} οι αποστάσεις του σημείου Κ από τις κυματικές πηγές και αντίστοιχα $r_{1\Lambda}, r_{2\Lambda}$ του σημείου Λ, τότε η συνθήκη απόσβεσης για το κάθε σημείο γράφεται:



$$r_{1K} - r_{2K} = (2N + 1) \frac{\lambda}{2}, N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\text{και } r_{1\Lambda} - r_{2\Lambda} = (2N' + 1) \frac{\lambda}{2}, N' = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Τα σημεία Κ, Λ είναι διαδοχικά σημεία απόσβεσης άρα $N' = N + 1$.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω έχουμε:

$$r_{1\Lambda} - r_{1K} - r_{2\Lambda} + r_{2K} = [2(N + 1) + 1] \frac{\lambda}{2} - (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$2(K\Lambda) = \lambda \Rightarrow (K\Lambda) = \frac{\lambda}{2}$$

Ερώτηση 17.

Κατά μήκος μιας οριζόντιας ελαστικής χορδής μήκους $L = 3,6 \text{ m}$ της οποίας τα άκρα είναι ακλόνητα στερεωμένα σε ακίνητα εμπόδια, έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα ως αποτέλεσμα της συμβολής δύο αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα f . Τα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα $7,2 \text{ m/s}$. Αν μεταξύ των άκρων της χορδής εμφανίζονται 4 δεσμοί, τότε η συχνότητα των κυμάτων είναι:

α) $f = 2,5 \text{ Hz}$.

β) $f = 5 \text{ Hz}$.

γ) $f = 7,5 \text{ Hz}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

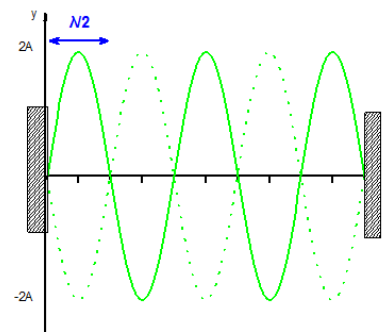
Σωστή απάντηση: (β)

Τα άκρα της χορδής είναι δεσμοί αφού είναι ακίνητα. Η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών ισούται με $\lambda / 2$, άρα:

$$L = \frac{5}{2} \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot 3,6}{5} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 1,44 \text{ m}$$

$$\text{Άρα: } u = \lambda f \Rightarrow f = \frac{u}{\lambda} = \frac{7,2 \text{ m/s}}{1,44 \text{ m}} = 5 \text{ Hz}$$

Συνεπώς σωστή απάντηση είναι η (β).



Ερώτηση 18.

Κατά μήκος μίας ελαστικής χορδής που ταυτίζεται με τον άξονα $x'Ox$ έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, ως αποτέλεσμα της συμβολής δύο αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων με το ίδιο πλάτος $A = 0,4 \text{ m}$ και το ίδιο μήκος κύματος λ . Το στάσιμο κύμα

έχει εξίσωση $y = 2A \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \eta \mu\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$. Η απομάκρυνση του σημείου $A(x_A = \lambda/3)$

τη χρονική στιγμή που το σημείο $B(x_B = 6\lambda/5)$ βρίσκεται σε μέγιστη θετική απομάκρυνση ισούται με:

α) $0,4 \text{ m}$.

β) $-0,4 \text{ m}$.

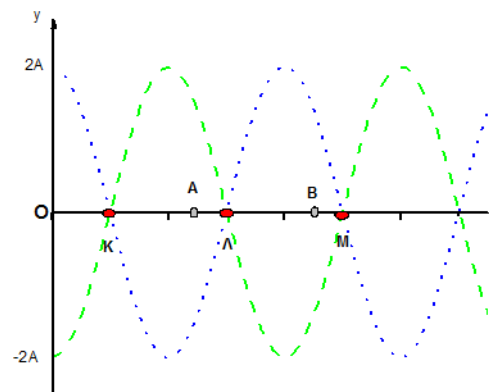
γ) $0,2 \text{ m}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (β)

Το σημείο A ανήκει στην άτρακτο μεταξύ των δεσμών $K(x_K = \lambda/4)$ και $\Lambda(x_\Lambda = 3\lambda/4)$. Αντίστοιχα το σημείο B ανήκει στην άτρακτο μεταξύ των δεσμών $\Lambda(x_\Lambda = 3\lambda/4)$ και $M(x_M = 5\lambda/4)$. Συνεπώς τα A, B βρίσκονται σε αντίθεση φάσης. Άρα όταν το σημείο $B(x_B = 6\lambda/5)$ βρίσκεται σε μέγιστη θετική απομάκρυνση το A θα βρίσκεται στην ακραία αρνητική θέση. Η απομάκρυνση υπολογίζεται ως εξής:



$$y_A = 2A \sin\left(2\pi \frac{x_A}{\lambda}\right) = 2 \cdot 0,4 \sin\left(2\pi \frac{\frac{\lambda}{3}}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y_A = 0,8 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow y_A = -0,4 \text{ m}$$

Ερώτηση 19.

Κατά μήκος μίας ελαστικής χορδής που ταυτίζεται με τον άξονα xOx έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, ως αποτέλεσμα της συμβολής δύο αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων ίδιας συχνότητας και ίδιου πλάτους, έτσι ώστε στο σημείο $O(x=0)$ να δημιουργείται κοιλιά. Τα σημεία $A(x_A = 4,5\lambda)$ και $B(x_B = 6\lambda)$:

α) ταλαντώνονται σε αντίθεση φάσης.

β) ταλαντώνονται σε συμφωνία φάσης.

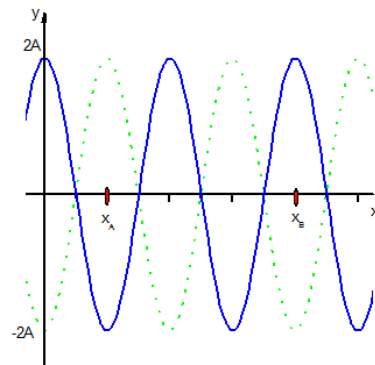
γ) είναι ακίνητα.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (α)

Το σημείο A ικανοποιεί τη συνθήκη κοιλιών $x = k \frac{\lambda}{2}$ για $k=9$. Ομοίως το σημείο B ικανοποιεί τη συνθήκη κοιλιών για $k=12$. Μεταξύ αυτών των κοιλιών παρεμβάλλονται άλλες δύο ($k=10, k=11$) άρα οι κοιλίες A και B ανήκουν σε ατράκτους που ταλαντώνονται σε αντίθεση φάσης.



ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x Όχ διαδίδονται ταυτόχρονα δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με εξισώσεις: $y_1 = 0,25\eta\mu 2\pi(t - x)$ (S.I.) και $y_2 = 0,25\eta\mu 2\pi(t + x)$ (S.I.). Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα.

α) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

β) Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, των σημείων Α ($x_A = 0,5\text{ m}$) και Β ($x_B = 1\text{ m}$).

γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του τμήματος ΑΔ της χορδής, όπου $\Delta(x_\Delta = 1,75\text{ m})$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,25\text{ s}$ σε κατάλληλα βαθμολογημένο σύστημα αξόνων.

δ) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σημείου Ζ ($x_Z = \frac{5}{6}\text{ m}$) όταν η απομάκρυνση του σημείου Α είναι μέγιστη θετική.

Λύση

α) Τα διαδιδόμενα κύματα έχουν πλάτος $A = 0,25\text{ m}$, γωνιακή συχνότητα $\omega = 2\pi\text{ rad/s}$ και μήκος κύματος $\lambda = 1\text{ m}$. Άρα η εξίσωση του στάσιμου κύματος γράφεται:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cdot\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \Rightarrow y = 0,5\sigma\upsilon\nu(2\pi x)\cdot\eta\mu(2\pi t) \text{ (S.I.)}.$$

β) Η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του σημείου Α περιγράφεται από την:

$$y_A = 0,5\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi x_A)\cdot\eta\mu(2\pi t) \Rightarrow y_A = -0,5\eta\mu(2\pi t) \text{ (S.I.)}$$

ή ισοδύναμα

$$y_A = 0,5\eta\mu(2\pi t + \pi) \text{ (S.I.)}.$$

Προφανώς το Α είναι κοιλία σε αντίθετη φάση με αυτή που δημιουργείται στο σημείο Ο ($x = 0$).

Άρα η ταχύτητα του θα περιγράφεται από την:

$$u_A = \omega A_A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow u_A = \pi\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi t + \pi) \text{ (S.I.)}$$

ή ισοδύναμα $u_A = -\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi t) \text{ (S.I.)}.$

Αντίστοιχα, για το σημείο Β είναι:

$$y_B = 0,5 \cdot \sin(2\pi x_B) \cdot \eta\mu(2\pi t) \Rightarrow y_B = 0,5 \cdot \eta\mu(2\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{και } u_B = \pi \cdot \sin(2\pi t) \text{ (S.I.)}.$$

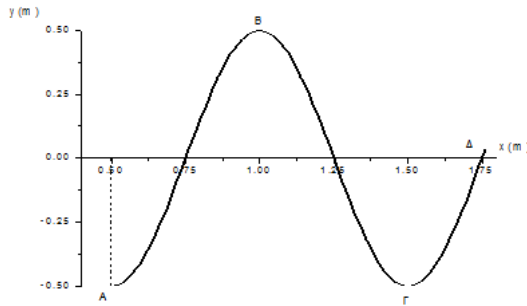
Εναλλακτικά, τα Α, Β είναι διαδοχικές κοιλίες άρα θα έχουν αντίθετες ταχύτητες

$$u_A = -u_B$$

γ) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,25 \text{ s}$ η εξίσωση του στάσιμου γράφεται:

$$y = 0,5 \cdot \sin(2\pi x) \cdot \eta\mu(2\pi \cdot 1,25) \Rightarrow y = 0,5 \cdot \sin(2\pi x) \text{ (S.I.)}.$$

Από τη γραφική παράσταση $y = f(x)$ επιλέγουμε το τμήμα από $x = 0,5 \text{ m}$ έως $x = 1,75 \text{ m}$, άρα το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι:



δ) Τα Α, Ζ θα βρίσκονται σε αντίθεση φάσης αφού ανήκουν σε διαδοχικές ατράκτους. Όταν το Α αποκτά τη μέγιστη θετική απομάκρυνση τότε το Ζ θα αποκτά τη δική του μέγιστη αρνητική απομάκρυνση. Δηλαδή $y_Z = -A_Z$, όπου

$$A_Z = 2A \left| \sin\left(2\pi \frac{x_Z}{\lambda}\right) \right| = 0,25 \text{ m}$$

$$\text{άρα } y_Z = -0,25 \text{ m}.$$

Εναλλακτικά έχουμε ότι για $y_A = 0,5 \Rightarrow \eta\mu(2\pi t + \pi) = 1 \Rightarrow t = \frac{4k-1}{4}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{τότε: } y_Z = 0,5 \cdot \sin(2\pi x_Z) \cdot \eta\mu(2\pi t) \Rightarrow y_Z = 0,5 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left((4k-1)\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$y_Z = 2 \cdot 0,25 \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \text{ m} = 0,5 \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \text{ m} = 0,5 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ m} = 0,5 \cdot \frac{1}{2} \text{ m} \Rightarrow y_Z = 0,25 \text{ m}$$

Άσκηση 2.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία A και B αντίστοιχα, της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $AB = 4,4 \text{ m}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = A\eta\mu(20\pi t)$ (S.I.). Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος $\lambda = 0,4 \text{ m}$. Σημείο (Δ) απέχει κατά $r_1 = 2,8 \text{ m}$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 = 7,2 \text{ m}$ από την πηγή Π_2 . Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου (Δ) μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό ισούται με $A_\Delta = 1 \text{ m}$.

α) Να εξετάσετε εάν στο σημείο (Δ) συμβαίνει ενίσχυση ή απόσβεση των κυμάτων.

β) Να υπολογίσετε το πλάτος A των κυμάτων.

γ) Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου (Δ) σε συνάρτηση με το χρόνο, μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό.

δ) Να σχεδιάσετε σε κατάλληλα βαθμολογημένο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο του σημείου (M), το οποίο είναι το μέσο του AB.

Λύση

α) Είναι $|r_1 - r_2| = |2,8 \text{ m} - 7,2 \text{ m}| = 4,4 \text{ m} = 11\lambda$. Δηλαδή το σημείο (Δ) ικανοποιεί τη συνθήκη ενίσχυσης $|r_1 - r_2| = N \cdot \lambda$ για ακέραιο $N = 11$. Συνεπώς το σημείο (Δ) είναι σημείο ενίσχυσης.

β) Για τα σημεία ενίσχυσης, άρα και το (Δ), ισχύει $A_\Delta = 2A \Rightarrow A = 0,5 \text{ m}$.

γ) Από την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών έχουμε: $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$ άρα $f = 10 \text{ Hz}$ ενώ από τη θεμελιώδη κυματική εξίσωση: $u = \lambda f = 4 \text{ m/s}$

Στο (Δ) φτάνει πρώτο το κύμα από την πλησιέστερη πηγή, την Π_1 , έστω τη χρονική στιγμή t_1 ώστε:

$$t_1 = \frac{r_1}{u} = 0,7 \text{ s}$$

Αντίστοιχα, το κύμα από την απομακρυσμένη πηγή Π_2 φτάνει στο (Δ) τη χρονική στιγμή

$$t_2 = \frac{r_2}{u} = 1,8 \text{ s}$$

Άρα η συμβολή των κυμάτων συμβαίνει για $t \geq t_2 = 1,8 \text{ s}$.

Είναι:

$$y_A = 2A \sin\left(2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right) \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow y_A = 2 \cdot 0,5 \sin\left(\pi \frac{4,4}{0,4}\right) \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,1} - \frac{10}{0,8}\right) \Rightarrow$$

$$y_A = \sin(11\pi) \eta\mu 2\pi(10t - 12,5) \Rightarrow y_A = -\eta\mu\pi(20t - 25) \text{ (S.I.)}$$

δ) Το (M) ισαπέχει από τα A, B άρα τα κύματα φτάνουν ταυτόχρονα σε αυτό τη χρονική στιγμή t_M ώστε:

$$t_M = \frac{\frac{AB}{2}}{u} = 0,55 \text{ s}$$

Συνεπώς για $t \geq t_M = 0,55 \text{ s}$ είναι:

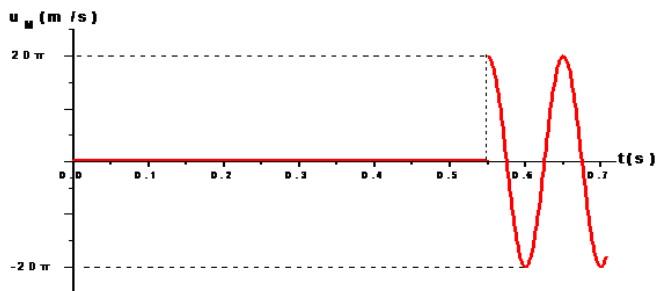
$$y_M = 2A \sin\left(2\pi \frac{r_{1M} - r_{2M}}{2\lambda}\right) \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_{1M} + r_{2M}}{2\lambda}\right) \Rightarrow y_M = \sin 0 \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{AB}{2\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y_M = \eta\mu\pi(20t - 11) \text{ (S.I.)}$$

Άρα η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου M θα περιγράφεται από την:

$$u_M = \omega A_M \sin\pi(20t - 11) \Rightarrow u_M = 20\pi \sin\pi(20t - 11) \text{ (S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής είναι:



Άσκηση 3.

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους $A = 0,2 \text{ m}$ και ίδιου μήκους κύματος $\lambda = 0,4 \text{ m}$ διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις και ταχύτητα 2 m/s σε χορδή η οποία ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα $x'Ox$. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα με κοιλία στο σημείο $O(x = 0)$.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των κυμάτων που δημιουργήσαν το στάσιμο κύμα.

β) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, των σημείων $A(x_A = 1,2 \text{ m})$ και $B(x_B = 1,9 \text{ m})$.

δ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του τμήματος AB της χορδής τις χρονικές στιγμές $t_0 = 0$ και $t_1 = 0,15 \text{ s}$.

Λύση

α) Είναι: $u = \lambda f \Rightarrow f = 5 \text{ Hz}$ και $T = 0,2 \text{ s}$.

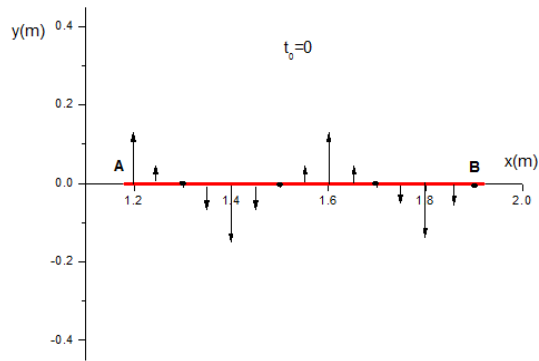
$$\text{Άρα: } \begin{cases} y_1 = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ y_2 = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0,2 \eta \mu 2\pi (5t - 2,5x) \\ y_2 = 0,2 \eta \mu 2\pi (5t + 2,5x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0,2 \eta \mu 5\pi (2t - x) \\ y_2 = 0,2 \eta \mu 5\pi (2t + x) \end{cases} \quad (\text{S.I.})$$

$$\text{β) } y = 2A \sigma \upsilon \nu \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \eta \mu \left(2\pi \frac{t}{T} \right) \Rightarrow y = 0,4 \sigma \upsilon \nu (5\pi x) \eta \mu (10\pi t) \quad (\text{S.I.})$$

γ) Για το σημείο $A(x_A = 1,2 \text{ m})$: $y_A = 0,4 \sigma \upsilon \nu (5\pi \cdot 1,2) \eta \mu (10\pi t) \Rightarrow y_A = 0,4 \eta \mu (10\pi t)$
(κοιλία)

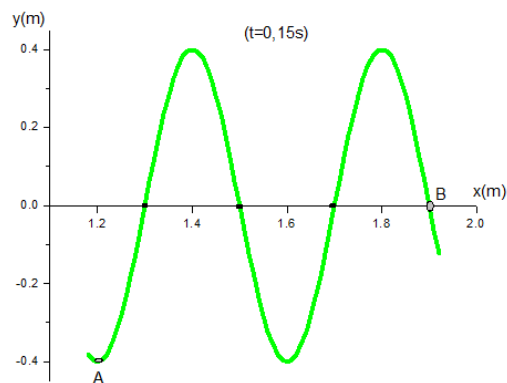
Για το σημείο $B(x_B = 1,9 \text{ m})$: $y_B = 0,4 \sigma \upsilon \nu (5\pi \cdot 1,9) \eta \mu (10\pi t) \Rightarrow y_B = 0$ (δεσμός)

δ) Για $t = 0$ είναι $y = 0$ για κάθε σημείο της χορδής ενώ για την ταχύτητα της κοιλίας A είναι $u_A > 0$. Άρα το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι:



Αντίστοιχα, για $t = 0,15 \text{ s}$, η εξίσωση του στάσιμου είναι: $y = -0,4 \sin(5\pi x)$ (S.I.)

Το τμήμα της γραφικής παράστασης αυτής, για $x_A \leq x \leq x_B$ είναι το ζητούμενο στιγμιότυπο. Η κοιλία $A(x_A = 1,2 \text{ m})$ την χρονική στιγμή $t = 0,15 \text{ s}$ βρίσκεται σε απομάκρυνση: $y_A = -0,4 \sin(5\pi \cdot 1,2) \text{ m} = -0,4 \text{ m}$, δηλαδή στην ακραία αρνητική απομάκρυνση. Με δεδομένο ότι δύο διαδοχικές κοιλίες βρίσκονται σε αντίθεση φάσης, σχεδιάζουμε το ζητούμενο στιγμιότυπο:



ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1, Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα της επιφάνειας ενός υγρού. Οι πηγές απέχουν μεταξύ τους κατά $d = 2 \text{ m}$ και ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, σύμφωνα με την $y_0 = 0,2\eta\mu(3\pi t)$ (S.I.). Τα παραγόμενα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα $u = 1,2 \text{ m/s}$. Σημείο (Γ) της επιφάνειας του υγρού απέχει απόσταση $r_1 = 3 \text{ m}$ από την Π_1 και r_2 ($r_2 < r_1$) από την Π_2 . Στο σημείο (Γ) τα κύματα φτάνουν με χρονική διαφορά $\Delta t = 1 \text{ s}$.

α) Να υπολογίσετε την απόσταση r_2 .

β) Να εξετάσετε αν το σημείο (Γ) είναι σημείο ενίσχυσης ή απόσβεσης.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου (Γ) σε σχέση με το χρόνο και να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση σε κατάλληλα βαθμολογημένο σύστημα αξόνων.

δ) Να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων ενίσχυσης που βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

ε) Αν (Δ) σημείο του τμήματος ΑΒ, το οποίο ανήκει στην ίδια υπερβολή ενίσχυσης ή απόσβεσης με το σημείο (Γ) και (Ζ) σημείο του ΑΒ το οποίο είναι το πλησιέστερο στην πηγή Π_1 σημείο ενίσχυσης, να υπολογίσετε την απόσταση (ΔΖ).

Λύση

α) Αφού $r_2 < r_1$ στο σημείο (Γ) πρώτα φτάνει το κύμα από την πηγή Π_2 , έστω τη χρονική στιγμή t_2 και στη συνέχεια φτάνει το κύμα από την Π_1 , έστω τη χρονική στιγμή t_1 , με $t_1 > t_2$ ώστε $t_1 = t_2 + \Delta t$. Για την ταχύτητα διάδοσης του κύματος από την Π_1 μέχρι το σημείο Γ ισχύει:

$$u = \frac{r_1}{t_1} \Rightarrow t_1 = 2,5 \text{ s}$$

$$\text{Άρα: } t_2 = t_1 - \Delta t \Rightarrow t_2 = 1,5 \text{ s. Συνεπώς } u = \frac{r_2}{t_2} \Rightarrow r_2 = 1,8 \text{ m}.$$

β) Από την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών προκύπτει: $A = 0,2 \text{ m}$ και $\omega = 3\pi \text{ rad/s}$ ή

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1,5 \text{ Hz}.$$

Σύμφωνα με τη θεμελιώδη κυματική εξίσωση: $u = \lambda f$ ή $\lambda = 0,8 \text{ m}$.

Η συμβολή των κυμάτων συμβαίνει στο σημείο (Γ) από τη στιγμή που έχουν φτάσει και τα δύο κύματα, δηλαδή για $t \geq 2,5 \text{ s}$. Τότε

$$A'_r = 2A \left| \sin \left(\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \right) \right| = 2A \left| \sin \left(\pi \frac{1,2}{0,8} \right) \right| = 2A \left| \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right| \Rightarrow A'_r = 0. \text{ Συνεπώς το σημείο (Γ) είναι σημείο απόσβεσης.}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να εξετάσουμε αν υπάρχει ακέραιος αριθμός $N=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, ο οποίος να επαληθεύει τη συνθήκη απόσβεσης ή τη συνθήκη ενίσχυσης. Για να επαληθεύει το σημείο (Γ) τη συνθήκη απόσβεσης θα πρέπει:

$$r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 3\text{m} - 1,8\text{m} = (2N + 1) \frac{0,8\text{m}}{2} \Rightarrow N = 1 \text{ ο οποίος είναι ακέραιος, άρα το σημείο Γ είναι σημείο απόσβεσης.}$$

γ) Μέχρι να φτάσει το πρώτο κύμα (εν προκειμένω από την πηγή Π_2) το (Γ) παραμένει ακίνητο, άρα για $0 \leq t \leq 1,5 \text{ s}$ είναι $y_r = 0$.

Από τη στιγμή που το υλικό σημείο (Γ) ξεκινά να ταλαντώνεται, λόγω της διαταραχής που προέρχεται από την πηγή Π_2 και μέχρι να φτάσει και το δεύτερο κύμα, οπότε θα συμβεί η συμβολή, η απομάκρυνση του (Γ) θα είναι:

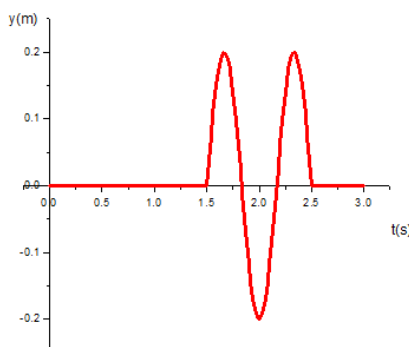
$$y_r = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right) \quad \text{ή} \quad y_r = 0,2 \eta \mu \pi (3t - 4,5) \text{ (S. I.) για } 1,5 \text{ s} < t \leq 2,5 \text{ s}.$$

Στο χρονικό διάστημα αυτό το σημείο (Γ) εκτελεί $\nu = \frac{\Delta t}{T} = 1,5$ ταλαντώσεις.

Από τη στιγμή που συμβαίνει η συμβολή δείξαμε ότι καθίσταται σημείο απόσβεσης, άρα για $t > 2,5 \text{ s}$ θα είναι $y_r = 0$.

Συνοψίζοντας:

$$y_r = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1,5 \text{ s} \\ 0,2 \eta \mu \pi (3t - 4,5), & 1,5 \text{ s} < t \leq 2,5 \text{ s} \\ 0, & t > 2,5 \text{ s} \end{cases}$$



δ) Αν (Σ) σημείο ενίσχυσης επί του AB το οποίο απέχει από τις πηγές x_1 και x_2 αντίστοιχα, τότε είναι:

$$x_1 - x_2 = N\lambda, N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ ενώ } x_1 + x_2 = d.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει: $x_1 = \frac{N\lambda + d}{2}$.

Το σημείο (Σ) βρίσκεται μεταξύ των πηγών άρα:

$$0 < x_1 < d \Rightarrow 0 < \frac{N\lambda + d}{2} < d \Rightarrow -\frac{d}{\lambda} < N < \frac{d}{\lambda} \Rightarrow -2,5 < N < 2,5$$

Άρα ο ακέραιος N μπορεί να πάρει τις τιμές $N = 0, \pm 1, \pm 2$, καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί με μια υπερβολή ενίσχυσης. Συνολικά το AB τέμνεται από 5 υπερβολές ενίσχυσης.

ε) Το (Δ) ανήκει στην ίδια υπερβολή με το (Γ), άρα η διαφορά των αποστάσεων του (Δ) από τις κυματικές πηγές ταυτίζεται με την αντίστοιχη του Γ. Δηλαδή, αν $x_{1\Delta}$ και $x_{2\Delta}$ οι αποστάσεις του Δ από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα, τότε:

$$x_{1\Delta} - x_{2\Delta} = r_1 - r_2 = 1,2 \text{ m. Συγχρόνως:}$$

$$x_{1\Delta} + x_{2\Delta} = d = 2 \text{ m.}$$

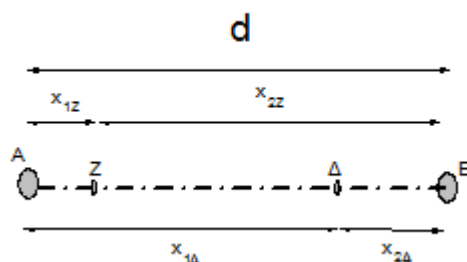
Προσθέτοντας κατά μέλη:

$$2x_{1\Delta} = 3,2 \text{ m} \Rightarrow x_{1\Delta} = 1,6 \text{ m.}$$

Για το σημείο (Z) του (AB) το οποίο είναι σημείο ενίσχυσης και απέχει x_{1Z} και x_{2Z} από τις Π_1, Π_2 αντίστοιχα, θα ισχύει: $x_{1Z} = \frac{N\lambda + d}{2}$ με $N = 0, \pm 1, \pm 2$.

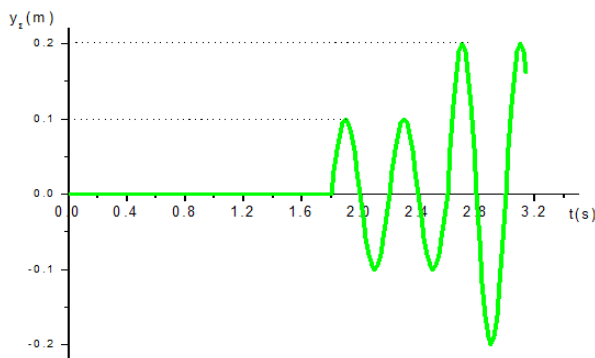
Αν το (Z) είναι το πλησιέστερο προς την Π_1 σημείο ενίσχυσης τότε πρέπει η τιμή της x_{1Z} να είναι η μικρότερη επιτρεπτή, άρα $N = -2$ και $x_{1Z} = 0,2 \text{ m}$.

Άρα η ζητούμενη απόσταση θα είναι: $D = x_{1\Delta} - x_{1Z} = 1,4 \text{ m}$.



Πρόβλημα 2.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της ήρεμης επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $d=0,65\text{ m}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y=A\eta\mu\omega t$. Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος $\lambda=0,2\text{ m}$. Στο ακόλουθο διάγραμμα παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη της απομάκρυνσης ενός σημείου (Σ) της επιφάνειας, το οποίο απέχει κατά r_1 από την πηγή Π_1 και κατά r_2 από την πηγή Π_2 , με $r_1 > r_2$.



α) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις r_1 και r_2 .

β) Ένας σημειακός φελλός, μάζας $m=1\text{ g}$, βρίσκεται στο σημείο Σ της επιφάνειας. Να γράψετε την εξίσωση της δυναμικής ενέργειας του φελλού εξαιτίας της ταλάντωσής του σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ) Να υπολογίσετε τον αριθμό υπερβολών ενίσχυσης που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

δ) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σημείου (Σ) από τη θέση ισορροπίας του, τη χρονική στιγμή t' κατά την οποία το σημείο Μ, το οποίο είναι το μέσο του ΑΒ, βρίσκεται σε ακραία αρνητική απομάκρυνση για τέταρτη φορά.

(Θεωρήστε ότι $\pi^2=10$).

Λύση

α) Από το δοθέν διάγραμμα διαπιστώνουμε ότι στο σημείο (Σ) το κύμα από την πλησιέστερη πηγή (την Π_2) φτάνει τη χρονική στιγμή $t_2=1,8\text{ s}$, οπότε και το (Σ) ξεκινά να ταλαντώνεται με πλάτος $A=0,1\text{ m}$ και περίοδο $T=0,4\text{ s}$. Τη χρονική στιγμή $t_1=2,6\text{ s}$ στο (Σ) φτάνει και το δεύτερο κύμα (από την Π_1) και τα κύματα συμβάλλοντας αναγκάζουν το (Σ) να ταλαντωθεί με πλάτος $A_\Sigma=0,2\text{ m}=2A$. Άρα το (Σ) είναι σημείο ενίσχυσης.

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι: $u = \frac{\lambda}{T} = 0,5 \text{ m/s}$

Συνεπώς: $r_2 = ut_2 = 0,9 \text{ m}$ και $r_1 = ut_1 = 1,3 \text{ m}$

β) Η απομάκρυνση του σημείου (Σ) σε συνάρτηση με το χρόνο περιγράφεται στο S.I. από την:

$$y_{\Sigma} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1,8 \text{ s} \\ A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right), & 1,8 \text{ s} \leq t < 2,6 \text{ s} \\ 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right), & t \geq 2,6 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_{\Sigma} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1,8 \text{ s} \\ 0,1\eta\mu\pi(5t - 9), & 1,8 \text{ s} \leq t < 2,6 \text{ s} \\ 0,2\eta\mu\pi(5t - 11), & t \geq 2,6 \text{ s} \end{cases}$$

Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του υλικού σημείου είναι:

$$U_{\Sigma} = \frac{1}{2}Dy_{\Sigma}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2y_{\Sigma}^2 \Rightarrow U_{\Sigma} = \frac{1}{2}10^{-3}(5\pi)^2 \cdot \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1,8 \text{ s} \\ (0,1\eta\mu\pi(5t - 9))^2, & 1,8 \text{ s} \leq t < 2,6 \text{ s} \\ (0,2\eta\mu\pi(5t - 11))^2, & t \geq 2,6 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow$$

$$U_{\Sigma} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1,8 \text{ s} \\ 1,25 \cdot 10^{-3} \eta\mu^2[\pi(5t - 9)], & 1,8 \text{ s} \leq t < 2,6 \text{ s (S.I.)} \\ 5 \cdot 10^{-3} \eta\mu^2[\pi(5t - 11)], & t \geq 2,6 \text{ s} \end{cases}$$

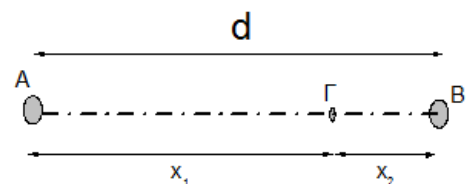
γ) Αν Γ σημείο ενίσχυσης του ΑΒ, το οποίο απέχει κατά x_1 από το Α και κατά x_2 από το Β τότε:

$$x_1 - x_2 = k \cdot \lambda$$

Συγχρόνως: $x_1 + x_2 = d = 0,65 \text{ m}$

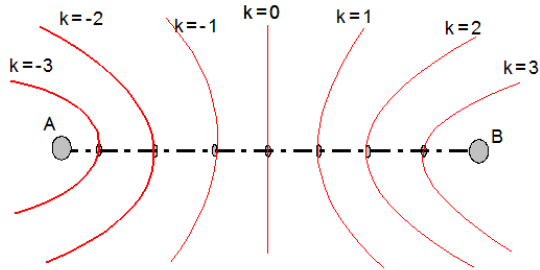
$$\text{Προσθέτοντας κατά μέλη: } x_1 = \frac{k\lambda + d}{2}$$

Επίσης:



$$0 \leq x_1 \leq d \Rightarrow 0 \leq \frac{k\lambda + d}{2} \leq d \Rightarrow -\frac{d}{\lambda} \leq k \leq \frac{d}{\lambda} \Rightarrow -3,25 \leq k \leq 3,25. \text{ Άρα: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

Κάθε ακέραιος αντιστοιχεί σε μία υπερβολή ενίσχυσης, άρα υπάρχουν 7 υπερβολές ενίσχυσης που τέμνουν το AB.



δ) Το (M) ισαπέχει από τα A, B άρα τα κύματα φτάνουν ταυτόχρονα σε αυτό τη χρονική στιγμή t_M ώστε:

$$t_M = \frac{\frac{AB}{2}}{u} = 0,65 \text{ s}$$

Το M φτάνει σε ακραία αρνητική απομάκρυνση για τέταρτη φορά τη χρονική στιγμή

$$t' = t_M + 3T + \frac{3}{4}T = 2,15 \text{ s}$$

Από τον κλάδο της $y_\Sigma = f(t)$ για αυτή τη χρονική στιγμή έχουμε:

$$y_\Sigma = 0,1\mu\pi(5 \cdot 2,15 - 9) \text{ m} \Rightarrow y_\Sigma = 0,1\mu \frac{7\pi}{4} \text{ m} \Rightarrow y_\Sigma = -0,05\sqrt{2} \text{ m}$$

Πρόβλημα 3.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $d = 0,4 \text{ m}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = 0,4\eta\mu 10\pi t$ (S.I.). Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος $\lambda = 0,1 \text{ m}$. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά r_1 από την πηγή Π_1 και κατά r_2 από την πηγή Π_2 , με $r_1 > r_2$. Τα κύματα φτάνουν στο (Σ) με χρονική διαφορά $\Delta t = 0,7 \text{ s}$.

α) Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης του σημείου (Σ) μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό.

β) Η υπερβολή σταθερής διαφοράς αποστάσεων στην οποία ανήκει το (Σ) τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που συνδέει τις πηγές σε σημείο (Γ). Να υπολογίσετε την απόσταση του (Γ) από το σημείο (Μ) το οποίο είναι το μέσο του ΑΒ.

γ) Να υπολογίσετε το πλήθος σημείων ενίσχυσης του τμήματος ΜΓ.

δ) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μέσο Μ φτάνει σε απομάκρυνση $0,4 \text{ m}$ για πρώτη φορά.

Λύση

Από την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών είναι: $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$ άρα $f = 5 \text{ Hz}$ και $T = 0,2 \text{ s}$.

α) Τα κύματα φτάνουν στο (Σ) με χρονική διαφορά $\Delta t = 0,7 \text{ s}$. Οι χρονικές στιγμές άφιξης είναι: $t_1 = \frac{r_1}{u}$ και $t_2 = \frac{r_2}{u}$ όπου $u = \frac{\lambda}{T}$

Συνεπώς $r_1 - r_2 = ut_1 - ut_2 = \frac{\lambda}{T} \Delta t \Rightarrow r_1 - r_2 = 0,35 \text{ m}$. Άρα $r_1 - r_2 = 3,5\lambda$

Προφανώς το (Σ) είναι σημείο απόσβεσης καθώς ικανοποιείται η συνθήκη απόσβεσης, αφού η διαφορά των αποστάσεων του (Σ) από τις πηγές ισούται με περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/2$.

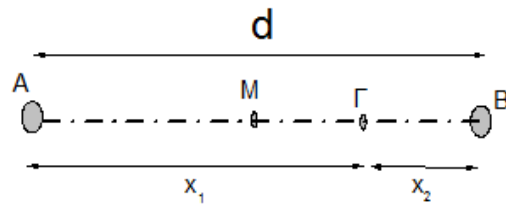
β) Το (Γ) θα είναι και αυτό σημείο απόσβεσης. Αν απέχει κατά x_1 από το Α και κατά x_2 από το Β τότε: $x_1 - x_2 = r_1 - r_2 = 0,35 \text{ m}$

Συγχρόνως: $x_1 + x_2 = d = 0,4 \text{ m}$

Προσθέτοντας κατά μέλη: $x_1 = 0,375 \text{ m}$

ενώ $x_2 = 0,025 \text{ m}$

Άρα $MG = x_1 - d/2 = 0,175 \text{ m}$



γ) Αν Δ σημείο ενίσχυσης του AB, το οποίο απέχει κατά x_1' από το A και κατά x_2' από το B τότε: $x_1' - x_2' = N\lambda$

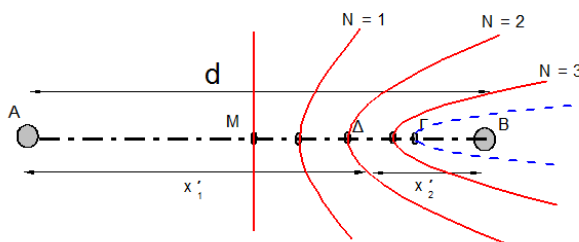
Συγχρόνως: $x_1' + x_2' = d$

Προσθέτοντας κατά μέλη: $x_1' = \frac{N\lambda + d}{2}$

Επίσης το (Δ) βρίσκεται μεταξύ των (M) και (Γ) άρα:

$$0,2 \text{ m} < x_1' < 0,375 \text{ m} \Rightarrow 0,2 \text{ m} < \frac{N\lambda + d}{2} < 0,375 \text{ m} \Rightarrow 0 < N < 3,5 . \text{ Άρα: } N = 1, 2, 3$$

Κάθε ακέραιος αντιστοιχεί σε μία υπερβολή ενίσχυσης, άρα υπάρχουν 3 υπερβολές ενίσχυσης που τέμνουν το ΜΓ.



δ) Το M ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_M ώστε $t_M = \frac{d/2}{u} = 0,4 \text{ s}$ και επειδή ισαπέχει από τα A και B προφανώς είναι σημείο ενίσχυσης, άρα ταλαντώνεται με πλάτος $A_M = 2A$. Για $t \geq t_M$ η απομάκρυνση του σημείου M σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$$y_M = 2A \sin\left(\pi \frac{r_{1M} - r_{2M}}{\lambda}\right) \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_{1M} + r_{2M}}{2\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y_M = 0,8 \eta \mu 2\pi (5t - 2) \text{ (S.I.)}$$

Όταν το σημείο M φτάνει σε απομάκρυνση $y = 0,4 \text{ m}$ για πρώτη φορά θα πρέπει:

$$y_M = 0,4 \Rightarrow 0,8\eta\mu 2\pi(5t - 2) = 0,4 \Rightarrow \eta\mu 2\pi(5t - 2) = 0,5 \Rightarrow \begin{cases} 2\pi(5t - 2) = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2\pi(5t - 2) = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t = \frac{12k + 25}{60} \text{ s} \\ t = \frac{12k + 29}{60} \text{ s} \end{cases}$$

Από τις άπειρες αυτές λύσεις ζητάμε τη μικρότερη για την οποία $t \geq t_M$. Άρα η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι για $k = 0$:

$$t = \frac{5}{12} \text{ s}$$

Πρόβλημα 4.

Σε μία οριζόντια ελαστική χορδή (ΟΛ) μήκους L , έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, ως αποτέλεσμα της συμβολής δύο εγκάρσιων αρμονικών κυμάτων με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα, που διαδίδονται όμως σε αντίθετες κατευθύνσεις στη χορδή. Το δεξί άκρο (Λ) της χορδής είναι στερεωμένο σε ακλόνητο εμπόδιο, ενώ το αριστερό άκρο $O(x_0 = 0)$ είναι ελεύθερο και ταλαντώνεται με πλάτος $0,2 \text{ m}$. Μεταξύ των σημείων (Ο) και (Λ) εμφανίζονται 3 ακίνητα σημεία, ενώ η μέγιστη οριζόντια απόσταση μεταξύ δύο κοιλιών της χορδής ισούται με $1,2 \text{ m}$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος L της χορδής.

β) Να προσδιορίσετε τις θέσεις των ακίνητων σημείων.

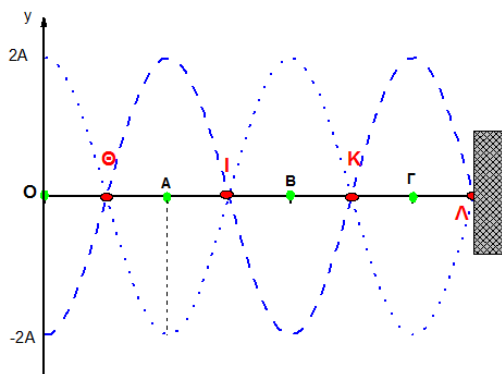
γ) Να υπολογίσετε την ελάχιστη οριζόντια απόσταση μεταξύ δύο σημείων της χορδής, τα οποία ταλαντώνονται με πλάτος $0,1 \text{ m}$.

δ) Έστω ότι μεταβάλλουμε τη συχνότητα ταλάντωσης του Ο, με αποτέλεσμα μεταξύ των (Ο) και (Λ) να εμφανίζονται 6 ακίνητα σημεία. Να υπολογίσετε το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας.

Λύση

α) Το σημείο (Λ) θα είναι δεσμός, άρα συνολικά εμφανίζονται 4 δεσμοί. Μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών εμφανίζεται μία κοιλία η οποία ισαπέχει από τους δεσμούς. Άρα στη χορδή εμφανίζονται 4 κοιλίες και η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο κοιλιών της χορδής θα είναι ίση με $3\frac{\lambda}{2}$.

$$\text{Άρα } 3\frac{\lambda}{2} = 1,2 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 0,8 \text{ m}$$



Δύο διαδοχικοί δεσμοί απέχουν κατά $\lambda/2$ άρα η απόσταση μεταξύ του πλησιέστερου στο Ο δεσμού (σημείο Θ) και του δεσμού (Λ) θα ισούται με $3\frac{\lambda}{2}$. Η απόσταση του Ο από

τον πλησιέστερο δεσμό (σημείο Θ) ισούται με $\lambda/4$. Συνεπώς $L = 3\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{7\lambda}{4} = 1,4 \text{ m}$.

β) Ο πρώτος δεσμός βρίσκεται σε απόσταση $\lambda/4$ από το Ο, ο δεύτερος σε απόσταση $\lambda/2 + \lambda/4$ κ.ο.κ.

$$\text{Άρα: } \begin{cases} x_{\Theta} = \frac{\lambda}{4} = 0,2 \text{ m} \\ x_I = 3\frac{\lambda}{4} = 0,6 \text{ m} \\ x_K = 5\frac{\lambda}{4} = 1 \text{ m} \\ x_{\Lambda} = 7\frac{\lambda}{4} = 1,4 \text{ m} \end{cases}$$

$$\gamma) \text{ Πρέπει: } A' = A \Rightarrow 2A \left| \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \right| = A \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Από τις λύσεις των εξισώσεων δεκτές γίνονται όσες ικανοποιούν τη σχέση $0 < x < L = 1,4 \text{ m}$

$$\text{Άρα: } \begin{cases} x = \frac{2}{15} \text{ m} \\ x = \frac{4}{15} \text{ m} \\ x = \frac{8}{15} \text{ m} \\ x = \frac{10}{15} \text{ m} \\ x = \frac{14}{15} \text{ m} \\ x = \frac{16}{15} \text{ m} \\ x = \frac{20}{15} \text{ m} \end{cases} \text{ . Συνεπώς η ζητούμενη απόσταση ισούται με } d = \frac{2}{15} \text{ m}$$

δ) Θα πρέπει:

$$L = 6\frac{\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{4} = \frac{13\lambda'}{4} \Rightarrow \lambda' = \frac{4L}{13}$$

Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι

$$\Pi \% = \frac{f' - f}{f} 100\% = \frac{\frac{u}{\lambda'} - \frac{u}{\lambda}}{\frac{u}{\lambda}} 100\% = \frac{\frac{4L}{7} - \frac{4L}{13}}{\frac{4L}{13}} 100\% = \frac{6}{7} 100\% \Rightarrow \Pi \% = \frac{6}{7} \cdot 100\% = 85,71\%$$

Πρόβλημα 5.

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα πλάτους A και μήκους κύματος λ διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα $x'Ox$. Το κάθε κύμα αναγκάζει το σημείο $O(x=0)$ σε ταλάντωση της μορφής $y=A\eta\mu\omega t$. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα με εξίσωση $y=0,4\sigma\upsilon\nu(10\pi x)\eta\mu(40\pi t)$.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο.

β) Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας του υλικού σημείου $\Delta(x_\Delta > 0)$ της χορδής σε συνάρτηση με το χρόνο, αν το Δ είναι κοιλία και μεταξύ του O και του Δ παρεμβάλλονται τρεις δεσμοί.

γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του τμήματος $ΟΔ$ της χορδής, τη χρονική στιγμή $t=0$.

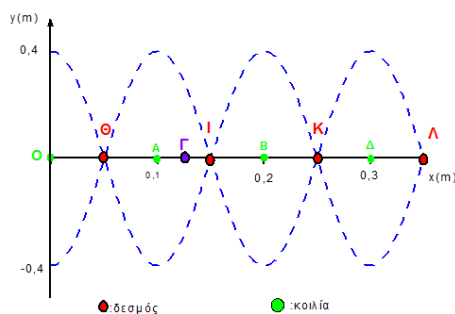
δ) Να εξετάσετε αν το σημείο Δ και το υλικό σημείο $\Gamma(x_\Gamma=0,125\text{ m})$ βρίσκονται σε συμφωνία ή αντίθεση φάσης.

Λύση

α) Από την εξίσωση του στάσιμου κύματος $y=0,4\sigma\upsilon\nu(10\pi x)\eta\mu(40\pi t)$ έχουμε: $A=0,2\text{ m}$, $\lambda=0,2\text{ m}$ και $T=0,05\text{ s}$. Άρα οι εξισώσεις των κυμάτων είναι:

$$\begin{cases} y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \\ y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi(20t - 5x) \\ y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi(20t + 5x) \end{cases} \text{ (S.I.)}$$

β) Δύο διαδοχικοί δεσμοί απέχουν κατά $\lambda/2=0,1\text{ m}$ ενώ ένας δεσμός απέχει από την πλησιέστερη κοιλία κατά $\lambda/4=0,05\text{ m}$. Άρα: $x_\Delta = 3\frac{\lambda}{2} = 0,3\text{ m}$



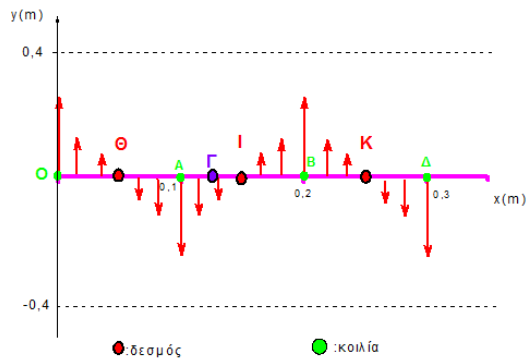
Η απομάκρυνση του Δ από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο περιγράφεται από την:

$$y_{\Delta} = 0,4 \sin(3\pi) \eta\mu(40\pi t) \Rightarrow y_{\Delta} = -0,4 \eta\mu(40\pi t) \Rightarrow y_{\Delta} = 0,4 \eta\mu(40\pi t + \pi) \text{ (S.I.)}$$

Η ταχύτητα ταλάντωσης είναι ίση με:

$$u_{\Delta} = \omega A_{\Delta} \sin(40\pi t + \pi) \Rightarrow u_{\Delta} = -16\pi \sin(40\pi t) \text{ (S.I.)}$$

γ) Την χρονική στιγμή $t=0$ είναι $y=0$ για κάθε σημείο, δηλαδή η χορδή είναι οριζόντια. Στο σημείο Δ αντιστοιχεί κοιλία, η οποία είναι η τρίτη στη σειρά από το Ο, στο οποίο σχηματίζεται κοιλία και το οποίο για $t=0$ έχει θετική ταχύτητα. Τα ζητούμενο στιγμιότυπο είναι:



δ) Είναι:

$$y_{\Gamma} = 0,4 \sin(1,25\pi) \eta\mu(40\pi t) \Rightarrow y_{\Gamma} = -0,2\sqrt{2} \eta\mu(40\pi t) \Rightarrow y_{\Gamma} = 0,2\sqrt{2} \eta\mu(40\pi t + \pi) \text{ (S.I.)}$$

ενώ:

$$u_{\Gamma} = 8\pi\sqrt{2} \sin(40\pi t + \pi) \Rightarrow u_{\Gamma} = -8\pi\sqrt{2} \sin(40\pi t) \text{ (S.I.)}$$

Συγκρίνοντας με τις αντίστοιχες εξισώσεις του Δ, τα σημεία Γ, Δ βρίσκονται σε συμφωνία φάσης.

Ισοδύναμα: Τα Γ, Δ ανήκουν σε ατράκτους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται άλλη μία. Άρα βρίσκονται σε συμφωνία φάσης.

Ημερομηνία τροποποίησης: 19/10/2018

Επιμέλεια: Ιωάννης Αλεξόπουλος
Επιστημονικός έλεγχος: Γεώργιος Ζησιμόπουλος, Βασίλειος Ραυτόπουλος