

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

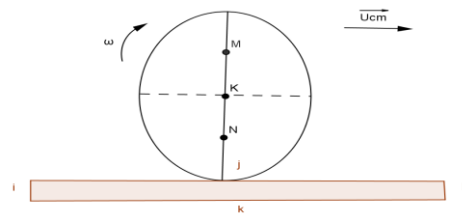
Ο δίσκος του σχήματος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση με σταθερή ταχύτητα u_{cm} . Δύο σημεία, Μ και Ν, απέχουν ίδια απόσταση από το κέντρο Κ και έχουν ταχύτητες που ικανοποιούν τη σχέση $u_M = 5 \cdot u_N$.

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι:

α) $u_{cm} = \frac{u_M}{2}$

β) $u_{cm} = 3u_N$

γ) $u_{cm} = \frac{u_M + u_N}{5}$



Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση η β.

Από την αρχή της επαλληλίας για τις ταχύτητες των δυο μορίων έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} u_M &= u_{cm} + u_{\sigma\tau\rho} = u_{cm} + \omega r \\ u_N &= u_{cm} - u_{\sigma\tau\rho} = u_{cm} - \omega r \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2u_{cm} = u_N + u_M \Rightarrow u_{cm} = \frac{u_M + u_N}{2}$$

$$u_{cm} = \frac{5u_N + u_N}{2} = \frac{6u_N}{2} \Rightarrow u_{cm} = 3u_N$$

Ερώτηση 2.

Μία οριζόντια ράβδος AB μήκους l εκτελεί στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ίση με ω γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το άκρο της A. Το μέσο M της ράβδου έχει κεντρομόλο επιτάχυνση ίση με:

α) $\alpha_{\kappa} = \omega^2 l$.

β) $\alpha_{\kappa} = \omega^2 \frac{l}{2}$.

γ) $\alpha_{\kappa} = \omega^2 \frac{l}{4}$.

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

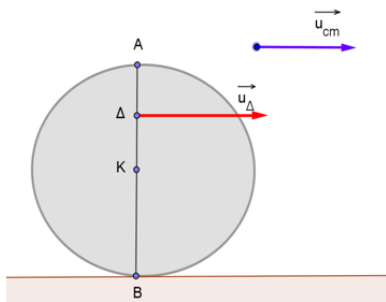
Σωστή απάντηση η β.

Στην παρακάτω λύση η ταχύτητα λόγω περιστροφής του μέσου της ράβδου (δηλ η γραμμική ταχύτητα του M) συμβολίζεται με $u_{\gamma\rho}$.

$$\alpha_{\kappa} = \frac{u_{\gamma\rho}^2}{R} = \frac{\left(\omega \frac{l}{2}\right)^2}{\frac{l}{2}} = \frac{\omega^2 l}{2}$$

Ερώτηση 3.

Τροχός κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Κάποια χρονική στιγμή το σημείο Δ βρίσκεται στην κατακόρυφη διάμετρο και απέχει από το κέντρο Κ απόσταση $x=R/2$ (βρίσκεται πάνω από το Κ)



Εάν η ταχύτητα του Δ είναι u_{Δ} , η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι:

α) $u_{cm} = \frac{3}{2} u_{\Delta}$

β) $u_{cm} = \frac{2}{3} u_{\Delta}$

γ) $u_{cm} = \frac{u_{\Delta}}{2}$

Ποιο από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

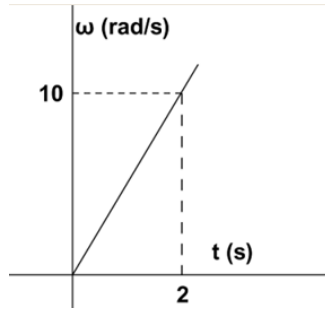
Σωστή απάντηση η β.

Από την αρχή της επαλληλίας για την ταχύτητα του Δ έχουμε.

$$u_{\Delta} = u_{cm} + u_{\sigma\tau\rho} \Rightarrow u_{\Delta} = u_{cm} + \omega \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow u_{\Delta} = u_{cm} + \frac{u_{cm}}{2} \Rightarrow u_{\Delta} = \frac{3}{2} u_{cm} \Rightarrow u_{cm} = \frac{2}{3} u_{\Delta}$$

Ερώτηση 4.

Δίσκος ακτίνας $R=0,2\text{m}$ κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και η γωνιακή του ταχύτητα μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα.



A) η ταχύτητα του κέντρου μάζας την χρονική στιγμή $t = 2\text{s}$ είναι:

α) $v_{\text{cm}} = 50\text{m/s}$.

β) $v_{\text{cm}} = 2\text{m/s}$.

γ) $v_{\text{cm}} = 5\text{m/s}$.

B) Η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος είναι:

α) $\alpha_{\gamma} = 1\text{r/s}^2$

β) $\alpha_{\gamma} = 5\text{r/s}^2$

γ) $\alpha_{\gamma} = 2\text{r/s}^2$

Γ) Το διάστημα που έχει διανύσει ο δίσκος μέχρι την χρονική στιγμή $t = 2\text{s}$ είναι:

α) $S = 2\text{m}$.

β) $S = 4\text{m}$.

γ) $S = 50\text{m}$.

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστές απαντήσεις:

A. β.

B. β.

Γ. α.

Α) Αφού ο τροχός κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει έχουμε:

$$v_{cm} = \omega \cdot R \Rightarrow v_{cm} = 0,2 \cdot 10 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s} . \text{ Επομένως η σωστή απάντηση είναι η β.}$$

Β) Από την κλίση στο διάγραμμα ω - t βρίσκουμε ότι:

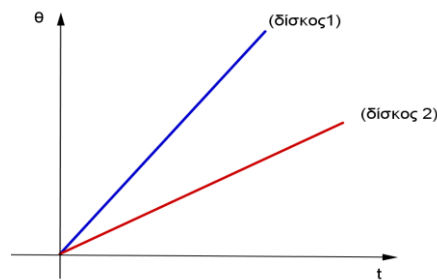
$$a_{\gamma} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \Rightarrow a_{\gamma} = \frac{10 - 0 \text{ rad}}{2 - 0} \frac{1}{s^2} \Rightarrow a_{\gamma} = 5 \frac{\text{rad}}{s^2} . \text{ Επομένως σωστή απάντηση είναι η β.}$$

Γ) Επειδή ο τροχός εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (και μεταφορικά αλλά και περιστροφικά) ισχύει: $s = \frac{1}{2} \cdot a_{cm} \cdot t^2$.

$$\text{Επομένως } s = \frac{1}{2} \cdot a_{\gamma} \cdot R \cdot t^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} 5 \cdot 0,2 \cdot 2^2 \text{ m} = 2 \text{ m} , \text{ δηλαδή σωστή απάντηση είναι η α.}$$

Ερώτηση 5.

Δυο ομογενείς δίσκοι στρέφονται γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής που περνά από το κέντρο τους. Στο διάγραμμα φαίνεται πώς μεταβάλλεται η γωνία που διαγράφει κάθε



δίσκος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

- α) οι δυο δίσκοι έχουν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση (μη μηδενική).
- β) οι δίσκοι εκτελούν επιταχυνόμενη κίνηση με διαφορετικές γωνιακές επιταχύνσεις.
- γ) οι δυο δίσκοι εκτελούν ομαλή στροφική κίνηση και η γωνιακή ταχύτητα του πρώτου κάθε χρονική στιγμή είναι μεγαλύτερη από την γωνιακή ταχύτητα του δεύτερου την ίδια χρονική στιγμή.
- δ) σε ίσους χρόνους ο δίσκος 2 θα εκτελέσει περισσότερες περιστροφές από τον δίσκο 1.

Να χαρακτηριστεί κάθε πρόταση σαν σωστή ή λανθασμένη και να δικαιολογηθεί ο χαρακτηρισμός της κάθε πρότασης.

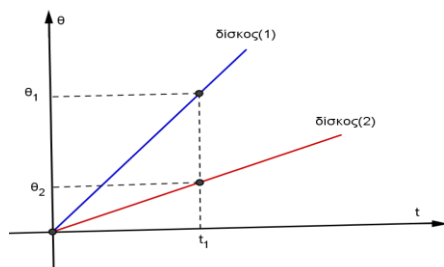
Λύση

Σωστή είναι η απάντηση γ.

Επειδή η γωνία θ μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο και οι δυο δίσκοι εκτελούν ομαλή περιστροφική κίνηση.

Θα έχουν λοιπόν σταθερές γωνιακές ταχύτητες και μηδενικές γωνιακές επιταχύνσεις.

(Επομένως οι δυο πρώτες προτάσεις είναι λανθασμένες.)



Θα ισχύει επίσης ότι: $\omega = \theta/t$

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι κάποια χρονική στιγμή t_1 οι δίσκοι έχει διαγράψει γωνίες θ_1 και θ_2

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι $\theta_1 > \theta_2$ (1) (επομένως και η πρόταση δ είναι και αυτή λανθασμένη).

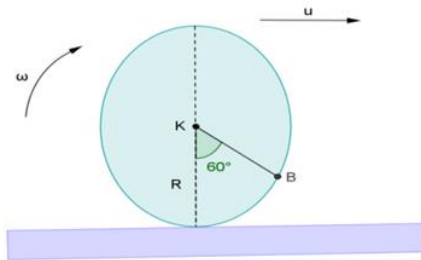
Ας συγκρίνουμε τώρα τις γωνιακές ταχύτητες

$$\omega_1 = \frac{\theta_1}{t_1} \text{ και } \omega_2 = \frac{\theta_2}{t_1}. \text{ Από την (1) έχουμε ότι } \omega_1 > \omega_2.$$

Άρα σωστή είναι μόνο η πρόταση γ.

Ερώτηση 6.

Τροχός κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα u_{cm} . Το Β βρίσκεται στην περιφέρεια του τροχού και η επιβατική του ακτίνα σχηματίζει με την κατακόρυφη διάμετρο γωνία 60° (όπως στο σχήμα).



Το μέτρο της ταχύτητας του Β είναι:

α) $u_B = u_{cm}$.

β) $u_B = u_{cm} \sqrt{2}$.

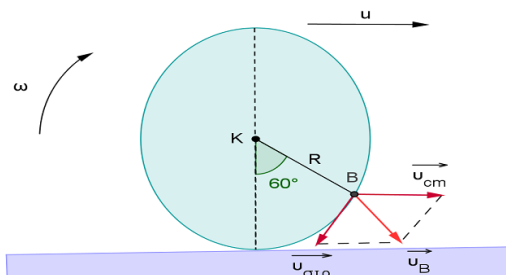
γ) $u_B = \frac{u_{cm}}{2}$.

δ) $u_B = \frac{3u_{cm}}{2}$.

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή είναι η απάντηση α.



Για να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας οποιουδήποτε σημείου Σ του τροχού, εφαρμόζεται ο τύπος:

$$v_{(B)} = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\sigma\tau\rho}^2 + 2 \cdot v_{cm} \cdot v_{\sigma\tau\rho} \cdot \cos\varphi}$$

όπου φ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}_{\sigma\tau\rho}$.

Οπότε για το σημείο Β έχουμε (η γωνία φ για το σημείο Β είναι $\varphi=120^\circ$)

$$v_{(B)} = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{στρ}^2 + 2 \cdot v_{cm} \cdot v_{στρ} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

$$v_{(B)} = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{cm}^2 + 2 \cdot v_{cm} \cdot v_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

$$v_{(B)} = \sqrt{2v_{cm}^2 + 2 \cdot v_{cm}^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

$$v_{(B)} = \sqrt{2v_{cm}^2 + 2 \cdot v_{cm}^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$v_{(B)} = \sqrt{v_{cm}^2} \Rightarrow v_{(B)} = v_{cm}$$

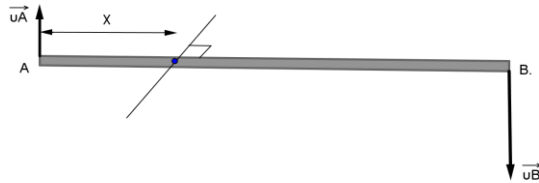
Άρα σωστή είναι η απάντηση α.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Μια ράβδος AB περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από έναν σταθερό οριζόντιο άξονα που περνάει από ένα σημείο πάνω στη ράβδο.

Το άκρο Α έχει γραμμική ταχύτητα που έχει μέτρο $u_A = 10\text{m/s}$ ενώ το άκρο Β έχει γραμμική ταχύτητα μέτρου $u_B = 30\text{m/s}$.



Αν το μήκος της ράβδου είναι $l = 40\text{cm}$ να βρεθούν:

- Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου.
- Η απόσταση που απέχει το άκρο Α της ράβδου από τον άξονα περιστροφής.
- Η γωνία στροφής της ράβδου σε χρόνο $\Delta t = 2\text{ s}$.
- Ο αριθμός των περιστροφών της ράβδου στον παραπάνω χρόνο.

Λύση

α) Αν ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου γύρω από τον συγκεκριμένο άξονα έχουμε

$$u_A = \omega \cdot r_A = \omega \cdot x \quad (1)$$

$$u_B = \omega \cdot r_B = \omega \cdot (L - x) \quad (2)$$

με πρόσθεση κατά μέλη καταλήγουμε

$$u_A + u_B = \omega \cdot L \Rightarrow \omega = 100 \text{ rad/s}$$

β) Στη σχέση (1) αντικαθιστώντας την τιμή του ω προκύπτει:

$$10 = 100 \cdot x \Rightarrow x = 0,1\text{m}$$

γ) Η ράβδος εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση και θα ισχύει: $\theta = \omega \cdot t$, άρα $\theta = 200 \text{ rad}$

δ) Ο αριθμός των περιστροφών της ράβδου δίνεται από την σχέση

$$N = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{100}{\pi} \text{ στροφές.}$$

Άσκηση 2.

Ένας τροχός που αρχικά ηρεμεί αρχίζει να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση γύρω από σταθερό άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και διέρχεται από το κέντρο του. Μετά από $t=10\text{s}$ ο τροχός έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega=40\text{ rad/s}$.



- Να βρεθεί η γωνιακή του επιτάχυνση.
- Να γίνει το διάγραμμα $\omega-t$ για τον τροχό έως την $t=10\text{ s}$.
- Να βρεθεί η γωνία που διαγράφει ο τροχός από το 3° έως το 7° s της κίνησης του.
- Να βρεθεί ο αριθμός των περιστροφών του τροχού από την $t=0$ έως την $t=10\text{ s}$.

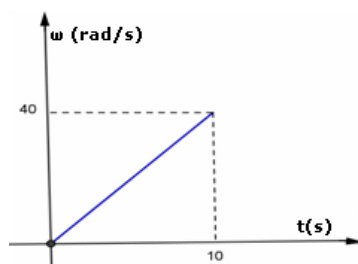
Λύση

α) Ο τροχός εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση οπότε θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\omega = a_\gamma \cdot t \quad (1) \quad \text{και} \quad \theta = \frac{1}{2} \cdot a_\gamma \cdot t^2 \quad (2).$$

$$\text{Λύνοντας την (1) έχουμε } a_\gamma = \frac{\omega}{t} \Rightarrow a_\gamma = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

β) Η γωνιακή ταχύτητα στην ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση είναι ανάλογη με τον χρόνο οπότε το διάγραμμα θα είναι το επόμενο.



γ) Από τη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$\text{Για } t=3\text{s}: \theta_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3^2 \text{ rad} = 18 \text{ rad}$$

$$\text{Για } t=7\text{s}: \theta_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7^2 \text{ rad} = 98 \text{ rad}$$

Αφαιρώντας βρίσκουμε ότι η ζητούμενη γωνία είναι $\theta = (98 - 18) \text{ rad} = 80 \text{ rad}$.

δ) Βρίσκουμε από τη σχέση (2) την συνολική γωνία που διαγράφηκε στα 10 s:

$$\theta_{\text{ολ}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^2 \text{ rad} = 200 \text{ rad}$$

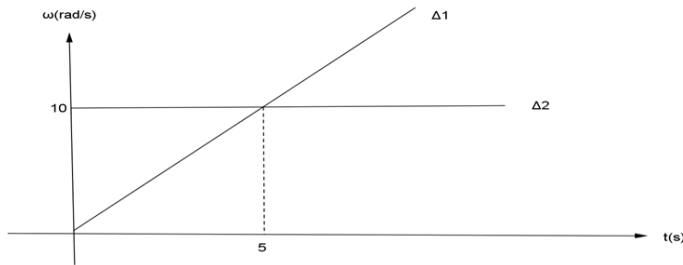
Οι στροφές υπολογίζονται από τη σχέση:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{200}{2\pi} \text{ στροφές} \Rightarrow N = \frac{100}{\pi} \text{ στροφές}$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Δύο δίσκοι οριζόντιοι Δ_1 και Δ_2 εκτελούν περιστροφική κίνηση γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας τους. Οι δίσκοι περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα που μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ζητείται:

- Η γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά κάθε δίσκος.
- Την $t=5s$ πόσες περιστροφές έχει κάνει ο δίσκος Δ_2 περισσότερες από τον δίσκο Δ_1 ;
- Ποιά χρονική στιγμή οι 2 δίσκοι έχουν κάνει τον ίδιο αριθμό περιστροφών;
- Αν οι 2 τροχοί έχουν ακτίνες $R_2=R$, $R_1=2R$, να βρεθεί ποια στιγμή τα σημεία της περιφέρειάς τους θα έχουν ίσες κατά μέτρο ταχύτητες.

Λύση

α) Από το διάγραμμα παρατηρώ ότι ο δίσκος 1 εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση (η γωνιακή του ταχύτητα μεταβάλλεται γραμμικά) ενώ ο δίσκος 2 εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση.

$$\text{Επομένως } a_{\gamma(1)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_{\text{τελ}} - \omega_{\text{αρχ}}}{t_{\text{τελ}} - t_{\text{αρχ}}} = \left(\frac{10-0}{5-0} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\text{Ενώ } a_{\gamma(2)} = 0$$

β) Από το εμβαδόν υπολογίζω τη γωνία που διαγράφει κάθε δίσκος σε χρόνο 5 s:

$$\theta_1 = \text{εμβαδον τριγώνου} = \frac{5 \cdot 10}{2} \text{ rad} = 25 \text{ rad}$$

$$\theta_2 = \text{εμβαδον ορθογωνίου} = 5 \cdot 10 \text{ rad} = 50 \text{ rad}$$

$$\text{και } N_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} = \frac{25 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad/στροφή}} = \frac{12,5}{\pi} \text{ στροφές και}$$

$$N_2 = \frac{\theta_2}{2\pi} = \frac{50 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad/στροφή}} = \frac{25}{\pi} \text{ στροφές}$$

Άρα ο δίσκος Δ₂ έχει κάνει 12,5/π περισσότερες περιστροφές από τον Δ₁.

γ) Για να έχουν κάνει τον ίδιο αριθμό περιστροφών, θα πρέπει να έχουν περιστραφεί κατά την ίδια γωνία

$$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \omega t = \frac{1}{2} a_\gamma \cdot t^2 \Rightarrow t = \frac{2\omega}{a_\gamma} = \frac{2 \cdot 10}{2} \text{ s} = 10 \text{ s} \quad \text{δηλαδή μετά από χρόνο } 10 \text{ s θα έχουν}$$

διαγράψει τον ίδιο αριθμό στροφών.

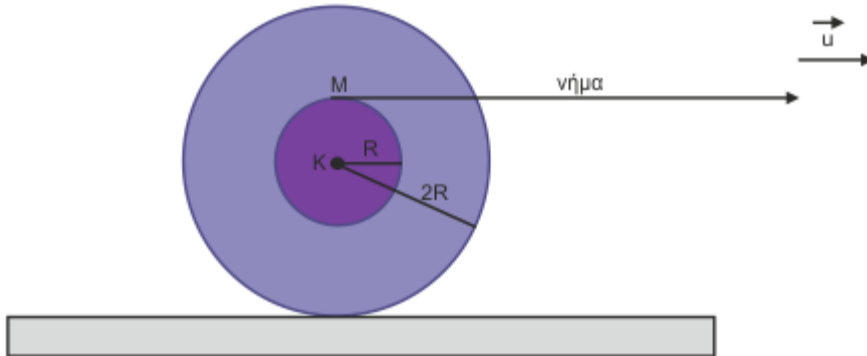
δ) Τα σημεία της περιφέρειας έχουν ταχύτητες που δίνονται από την σχέση $v_{\text{στρ}} = \omega \cdot R$ οπότε για τις ταχύτητες των σημείων της περιφέρειας των δίσκων ισχύει $v_1 = v_2$ άρα

$$\omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2 \Rightarrow \omega_1 \cdot 2R = \omega_2 \cdot R \Rightarrow 2\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow 2 \cdot a_\gamma \cdot t = \omega_2 \Rightarrow$$

$$t = \frac{\omega_2}{2 \cdot a_\gamma} \Rightarrow t = 2,5 \text{ s}$$

Πρόβλημα 2.

Ένα στερεό αποτελείται από 2 κατακόρυφους ομοαξονικούς κυλίνδρους κολλημένους μεταξύ τους που έχουν ακτίνες R και $2R$. Το στερεό μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον κοινό οριζόντιο άξονα των 2 κυλίνδρων σαν ένα σώμα. Στην περιφέρεια του κυλίνδρου ακτίνας R έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα. Τραβάμε το νήμα οριζόντια με επιτάχυνση $a=3 \text{ m/s}^2$ ώστε το νήμα να ξετυλίγεται και το στερεό να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.



Ζητείται:

- Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του στερεού.
- Όταν έχει ξετυλιχθεί μήκος νήματος $l=5\text{m}$, πόσο έχει μετακινηθεί το κέντρο μάζας του στερεού.
- Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα του στερεού εκείνη τη στιγμή (αν δίνεται ότι η ακτίνα του μικρού κυλίνδρου είναι $R=0,1\text{m}$).
- Να βρεθεί η ταχύτητα του υψηλότερου σημείου του στερεού εκείνη τη στιγμή.

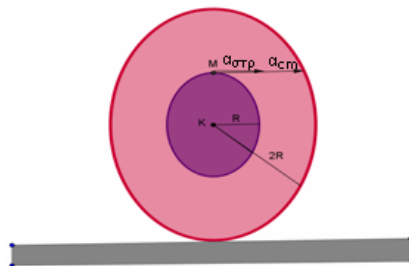
Λύση

α) Το σημείο M του κυλίνδρου ακτίνας R είναι σε επαφή με το νήμα οπότε κάθε στιγμή το M θα έχει ίδια επιτάχυνση και ίδια ταχύτητα με τα σημεία του νήματος τα οποία έχουν επιτάχυνση $a=3 \text{ m/s}^2$.

Το M έχει δυο εφαπτομενικές επιταχύνσεις. Την επιτάχυνση a_{cm} (λόγω μεταφορικής κίνησης) και την επιτάχυνση $a_{στρ}$ (λόγω στροφικής κίνησης).

(Η κεντρομόλος επιτάχυνση του M , παρόλο που υπάρχει δεν έχει σχεδιαστεί)

Από την αρχή της επαλληλίας για τις επιταχύνσεις έχουμε:



$$\alpha_M = \alpha_{\sigma\tau\rho} + \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_M = \alpha_\gamma \cdot R + \alpha_\gamma \cdot 2R \Rightarrow \alpha_M = 3\alpha_\gamma \cdot R$$

Αλλά επειδή ισχύει η σχέση $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma \cdot 2R$ έχουμε (το στερεό κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει):

$$\alpha_M = \frac{3}{2} \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2}{3} \alpha_M$$

Επομένως $\alpha_{cm} = 2 \text{ m/s}^2$.

β) Από την αρχή επαλληλίας για την ταχύτητα του Μ έχουμε:

$$v_M = v_{\sigma\tau\rho} + v_{cm} \Rightarrow v_M = \omega \cdot R + \omega \cdot 2R \Rightarrow v_M = 3\omega \cdot R$$

Επειδή ισχύει η σχέση $v_{cm} = \omega \cdot 2R$ θα έχουμε (το στερεό κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει)

$$v_M = \frac{3}{2} v_{cm}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε στιγμή η ταχύτητα του Μ άρα και του νήματος είναι 1,5 φορά μεγαλύτερη από την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. Επομένως το άκρο του νήματος θα διαγράφει απόσταση κατά 1,5 φορά μεγαλύτερη από το κέντρο μάζας του κυλίνδρου.

$$S_m = \frac{3}{2} S_{cm}$$

Όμως η μετατόπιση του άκρου του νήματος είναι το άθροισμα της μετατόπισης του κέντρου μάζας (S_{cm}) και του μήκους του σχοινιού που έχει ξετυλιχθεί (l):

$$S_m = S_{cm} + l$$

Οπότε:

$$\frac{3}{2} S_{cm} = S_{cm} + l \Rightarrow \frac{1}{2} S_{cm} = l \Rightarrow S_{cm} = 2l \Rightarrow S_{cm} = 10\text{m}$$

γ) Το στερεό εκτελεί ομαλά μεταβαλλόμενη μεταφορική κίνηση και ομαλά μεταβαλλόμενη περιστροφική κίνηση και από την σχέση $S_{cm} = \frac{1}{2} \alpha_{cm} \cdot t^2$ βρίσκουμε ότι ο χρόνος που χρειάστηκε για να κάνει το κέντρο μάζας απόσταση 10m είναι $t = \sqrt{10}\text{s}$ άρα η ταχύτητα του κέντρου μάζας εκείνη την στιγμή είναι:

$$u_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t \Rightarrow u_{cm} = 2 \cdot \sqrt{10} \text{ m/s}$$

Από τη σχέση $u_{cm} = \omega \cdot 2R$ βρίσκουμε ότι $\omega = \frac{2\sqrt{10} \text{ m/s}}{2 \cdot 0,1 \text{ m}} = 10\sqrt{10} \text{ rad/s}$

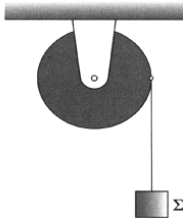
δ) το ψηλότερο σημείο του στερεού έχει ταχύτητα διπλάσια από την ταχύτητα του κέντρου μάζας άρα:

$$u = 4\sqrt{10} \text{ m/s}.$$

Πρόβλημα 3.

Η τροχαλία του σχήματος έχει ακτίνα $R=20\text{cm}$ και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα χωρίς τριβές. Από το αυλάκι της τροχαλίας είναι δεμένο με αβαρές μη εκτατό νήμα ένα σώμα Σ. Αφήνουμε ελεύθερο το σώμα και αυτό κατεβαίνοντας αποκτά επιτάχυνση $a=1\text{m/s}^2$ ενώ η τροχαλία εκτελεί στροφική κίνηση.

Θεωρούμε ότι το νήμα δεν γλιστράει στο αυλάκι της τροχαλίας.

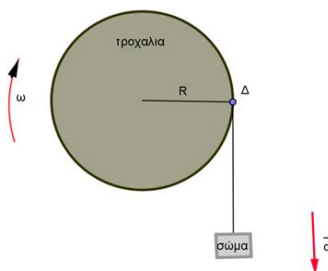


Ζητείται:

- Να συγκριθούν η ταχύτητα πτώσης του Σ και η ταχύτητα λόγω στροφικής κίνησης των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας.
- Η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας 2s αφού αφήσουμε το σώμα ελεύθερο.
- Όταν το σώμα έχει κατέβει κατά $h=8\text{m}$, πόσες στροφές θα έχει εκτελέσει η τροχαλία.
- Τη χρονική στιγμή $t=4\text{s}$ κόβουμε το νήμα και το σώμα πλέον πέφτει με επιτάχυνση $g=10\text{m/s}^2$. Να βρεθεί η γωνία που διέγραψε η τροχαλία από τη στιγμή που κόψαμε το νήμα έως τη στιγμή που το σώμα απέχει από το σημείο ελευθέρωσης $\Delta x=36\text{m}$.

Λύση

α) Το σημείο Δ είναι το σημείο επαφής μεταξύ του σχοινιού και της τροχαλίας (θεωρούμε ότι ανήκει στην τροχαλία) και επειδή το νήμα δε γλιστρά θα έχει ίδια ταχύτητα με το σώμα. Οπότε η ταχύτητα του σώματος Σ κάθε στιγμή θα είναι ίση με την ταχύτητα λόγω στροφικής κίνησης των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας.



$$v_{\text{σώματος}} = v_{\Delta} = \omega \cdot R$$

β) Παίρνοντας το ρυθμό μεταβολής της παραπάνω σχέσης έχουμε:

$$\frac{dv_{\text{σώματος}}}{dt} = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt} \Rightarrow \frac{dv_{\text{σώματος}}}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_{\text{σώματος}} = R \cdot a_{\gamma\omega\nu}$$

$$\text{Επομένως } a_{\gamma\omega\nu} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Η τροχαλία εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση επομένως

$$\omega = a_{\gamma\omega\nu} \cdot t \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

γ) Επειδή το σώμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση βρίσκουμε το χρονικό διάστημα που χρειάστηκε να περάσει για να πέσει το σώμα κατά $h = 8\text{m}$

$$h = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \Rightarrow t = 4\text{s}$$

Η γωνία που έχει διαγράψει η τροχαλία έως τότε είναι

$$\theta = \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} \cdot t^2 \Rightarrow \theta = 40\text{rad}$$

Και οι στροφές είναι:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{20}{\pi} \text{ στροφές}$$

δ) Από το προηγούμενο ερώτημα βλέπουμε ότι την $t=4\text{s}$ το σώμα έχει κατέβει κατά 8m και έχει αποκτήσει ταχύτητα $u = a \cdot t = 4\text{m/s}$. Στη συνέχεια και αφού κόψουμε το νήμα το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με $a=g$ και $u_0=4\text{m/s}$ μετατοπιζόμενο κατακόρυφα κατά $h_2 = (36-8)\text{m} = 28\text{m}$.

Στο ίδιο χρονικό διάστημα t_2 η τροχαλία εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση.

Το ύψος που διανύει στην κατακόρυφη κίνηση του το σώμα δίνεται από την σχέση:

$$h_2 = u_0 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \text{ και λύνοντας το τριώνυμο (αποκλείοντας αρνητικές ρίζες)}$$

βρίσκουμε ότι $t_2=2\text{ s}$.

Ο χρόνος που βρήκαμε είναι ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να διανύσει τα επιπλέον 28 m αφού κόψαμε το νήμα και μετά.

Η γωνιακή ταχύτητα που έχει αποκτήσει η τροχαλία την στιγμή που κόψαμε το νήμα είναι:

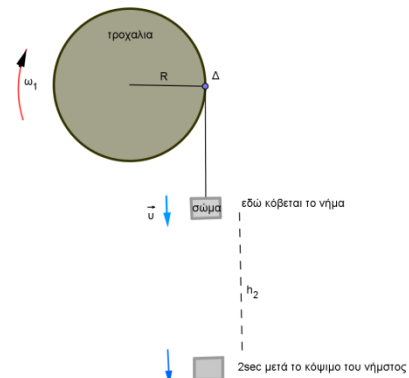
$$\omega_1 = a_{\gamma\omega\nu} \cdot t_1 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η γωνία που έχει διαγράψει η τροχαλία από την στιγμή που κόψαμε το νήμα και μετά είναι

$$\theta_2 = \omega_1 \cdot t_2 \Rightarrow \theta = 40\text{rad}$$

Οι στροφές που έκανε η τροχαλία είναι:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{20}{\pi} \text{ στροφές}$$



Ημερομηνία τροποποίησης: 01/09/2022

Επιμέλεια: Μιχαήλ Γλύπτης
 Επιστημονικός έλεγχος: Βασίλειος Ραυτόπουλος