

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x - 1$.

γ) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 0$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + \alpha$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - ax^2 + 7x - \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$ είναι $v = -16$, τότε:

α) Να υπολογισθούν οι τιμές των α, β .

Αν είναι $\alpha = 5$, $\beta = 3$,

β) να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$.

δ) Αν $P(\ln k) < 0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού k .

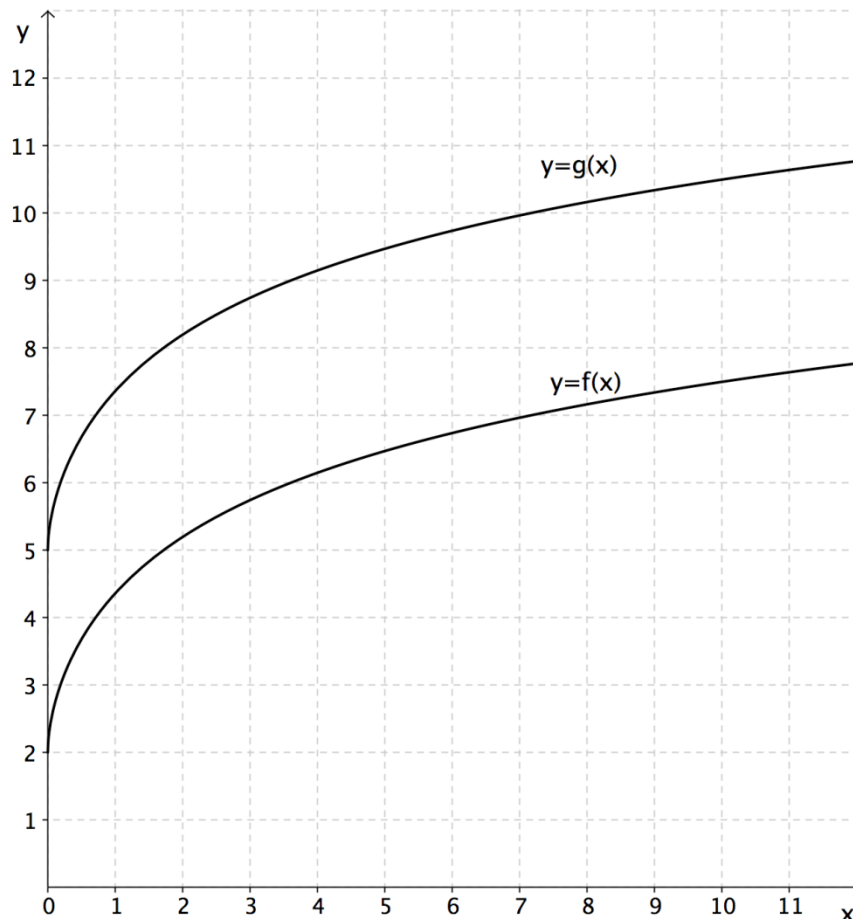
ΘΕΜΑ 4

Ένας ερευνητής πραγματοποίησε μια στατιστική μελέτη για την μεταβολή του βάρους των Ελληνοπαίδων. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όπου παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g . Στον οριζόντιο άξονα $x'x$ καταγράφεται η ηλικία σε μήνες και στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ το βάρος σε κιλά. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τις ελάχιστες φυσιολογικές τιμές και η γραφική παράσταση της g τις μέγιστες φυσιολογικές τιμές που μπορεί να έχει ένα παιδί κατά την διάρκεια του πρώτου έτους της ηλικίας του.

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = a\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + \beta, \quad x \geq 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

και ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(e^2 - 1, 2\sqrt{2} + 4)$ ενώ για την γραφική παράσταση της g , γνωρίζουμε ότι προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.



α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 2$. Στην συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

β) Να προσδιορίσετε γραφικά (κατά προσέγγιση) την ηλικία κατά την οποία η ελάχιστη φυσιολογική τιμή του βάρους ενός παιδιού είναι τα 5 κιλά. Στη συνέχεια, με αλγεβρικό τρόπο, να βρείτε με ακρίβεια την ηλικία.

γ) Το βάρος ενός παιδιού στο τέλος του 12^ο μήνα βρέθηκε 13 κιλά. Πως θα το χαρακτηρίζατε:

υπέρβαρο, φυσιολογικό ή λιποβαρές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με αλγεβρικό τρόπο.