Ένας Διεθνής Δορυφορικός Σταθμός (ΔΔΣ) διαγράφει κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη σε ύψος $h = \frac{R_{Γης}}{16}$.

Α. Ένα διαστημικό όχημα μάζας m ξεκινά από την επιφάνεια της Γης με προορισμό τον ΔΔΣ.

$Α_1$. Να βρεθεί η ταχύτητα περιστροφής του ΔΔΣ.

$Α_2$. Να βρεθεί η ταχύτητα που πρέπει να έχει το διαστημικό όχημα όταν προσεγγίσει τον ΔΔΣ για να γίνει ομαλά η πρόσδεση σε αυτόν.

$Α_3$. Να βρεθεί το έργο της προωθητικής δύναμης των μηχανών του διαστημικού οχήματος για να ανέβει αυτό από την επιφάνεια της Γης στον ΔΔΣ.

Β. Ένα διαστημικό όχημα ξεκινά από τον ΔΔΣ με προορισμό έναν κομήτη που βρίσκεται έξω από το Γήινο βαρυτικό πεδίο. Να βρεθεί το έργο της προωθητικής δύναμης των μηχανών του διαστημικού οχήματος για να ξεφύγει οριστικά από τη Γήινη έλξη.

Θα αγνοήσουμε, ότι η Γη περιστρέφεται, την δύναμη αντίστασης από την ατμόσφαιρα, την δύναμη που ασκούν τα άλλα ουράνια σώματα στον ΔΔΣ, την δύναμη που ασκεί ο ΔΔΣ στο διαστημικό όχημα.

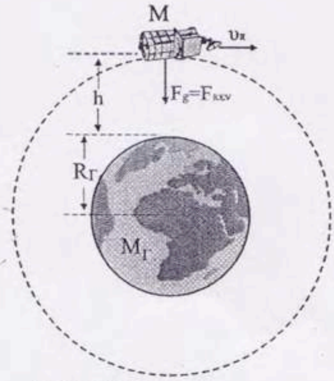
Τα αποτελέσματα να δοθούν σε συνάρτηση με τα g_0, $R_{Γης}$, m.

Απάντηση

$Α_1$. Κάθε Γήινος διαστημικός σταθμός (ή δορυφόρος) εκτελεί κυκλική τροχιά λόγω της ελκτικής δύναμης που του ασκεί η Γη. Η βαρυτική αυτή δύναμη παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$F_g = F_{κεν} \text{ ή } G\frac{M_Γ M}{(R_Γ + h)^2} = \frac{M υ_π^2}{(R_Γ + h)} \text{ ή}$$

$$υ_π^2 = \frac{GM_Γ}{(R_Γ + h)} \qquad (2.23)$$



Σχήμα 2.16

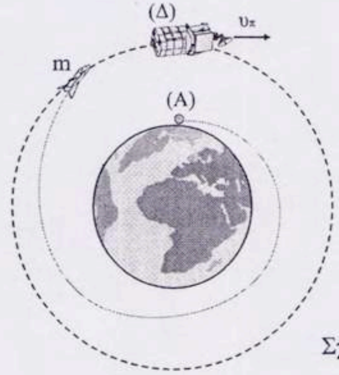
Γράφοντας τον τύπο της έντασης του πεδίου βαρύτητας για την επιφάνεια της Γης παίρνουμε:

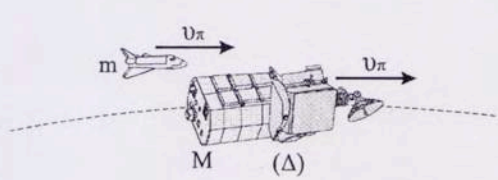
$$g_0 = G\frac{M_Γ}{R_Γ^{\,2}} \text{ ή } GM_Γ = g_0 R_Γ^{\,2}$$

Με αντικατάσταση στην (2.23) παίρνουμε:

$$υ_π = \sqrt{\frac{g_0 R_Γ^{\,2}}{(R_Γ + R_Γ/16)}} \text{ ή } υ_π = \sqrt{\frac{16}{17} g_0 R_Γ}$$

$Α_2$. Η ταχύτητα του διαστημικού οχήματος όταν προσεγγίζει τον δορυφορικό σταθμό πρέπει να είναι ίδια, σε κατεύθυνση και μέτρο, με την ταχύτητα περιστροφής του δορυφορικού σταθμού. Σε διαφορετική περίπτωση, λόγω της διατήρησης της Ορμής θα μεταβληθεί η ταχύτητα του δορυφορικού σταθμού, κάτι που δεν είναι επιθυμητό.





Σχήμα 2.17 Για ομαλή πρόσδεση θα πρέπει η ταχύτητα του διαστημόπλοιου να είναι ίδια με αυτήν του σταθμού

Άρα το διαστημικό όχημα πλησιάζει τον σταθμό εφαπτομενικά και με ταχύτητα που έχει μέτρο

$$\upsilon_\pi = \sqrt{\frac{16}{17} g_0 R_\Gamma} \qquad (2.24)$$

A_3. Κατά την άνοδο του διαστημικού οχήματος εκτός από τη βαρυτική δύναμη ασκείται και η προωθητική δύναμη των πυραύλων του, οπότε δεν ισχύει η Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας.

$$K_\Delta - K_A = W_{Fg(A\to\Delta)} + W_{F\pi\rho(A\to\Delta)} \ \text{ ή } \ W_{F\pi\rho(A\to\Delta)} = K_\Delta - K_A - W_{Fg(A\to\Delta)} \qquad (2.25)$$

Η κινητική ενέργεια του διαστημικού οχήματος στην επιφάνεια της Γης είναι μηδέν,

$$K_A = 0.$$

Η κινητική ενέργεια του διαστημικού οχήματος στο ύψος h είναι $K_\Delta = \frac{1}{2} m \upsilon_\pi^2$

$$W_{Fg(A\to\Delta)} = U_A - U_\Delta = m(V_A - V_\Delta) \ \text{ ή } \ W_{Fg(A\to\Delta)} = m\left(-\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} + \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}\right)$$

Παίρνοντας υπόψη ότι $GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma{}^2$ και ότι $h = \frac{R_{\Gamma\eta\varsigma}}{16}$ η τελευταία σχέση δίνει:

$$W_{Fg(A\to\Delta)} = -\frac{1}{17} m g_0 R_\Gamma$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2.25) παίρνουμε:

$$W_{F\pi\rho(A\to\Delta)} = \frac{1}{2} m \upsilon_\pi^2 + 0 - \left(-\frac{1}{17} m g_0 R_\Gamma\right) \ \text{ ή } \ W_{F\pi\rho(A\to\Delta)} = \frac{1}{2} m \frac{16}{17} g_0 R_\Gamma + \frac{1}{17} m g_0 R_\Gamma \ \text{ ή}$$

$$W_{F\pi\rho(A\to\Delta)} = \frac{9}{17} m g_0 R_\Gamma$$

Β. Το διαστημικό όχημα ξεκινά από ύψος $h=\frac{R_{\Gamma\eta\varsigma}}{16}$ και έχει λόγω περιστροφής αρχική κινητική ενέργεια

$$K_{\Delta}=\frac{1}{2}m\upsilon_{\pi}^{2}=\frac{1}{2}m\frac{16}{17}g_0R_{\Gamma} \qquad (2.26)$$

Για την κίνηση του μέχρι το άπειρο μπορούμε να εφαρμόσουμε μόνο το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας καθώς ασκείται και η προωστική δύναμη των πυραύλων του.

$$K_{\infty}-K_{\Delta}=W_{Fg(\Delta\to\infty)}+W_{F\pi\rho(\Delta\to\infty)} \text{ ή } W_{F\pi\rho(\Delta\to\infty)}=K_{\infty}-K_{\Delta}-W_{Fg(\Delta\to\infty)} \qquad (2.27)$$

Η κινητική ενέργεια του διαστημικού οχήματος έξω από το βαρυτικό πεδίο της Γης είναι μηδέν, $K_{\infty}=0$.

$$W_{Fg(\Delta\to\infty)}=U_{\Delta}=mV_{\Delta} \text{ ή } W_{Fg(A\to\Delta)}=-\frac{GM_{\Gamma}m}{R_{\Gamma}+h}$$

Παίρνοντας υπόψη ότι $GM_{\Gamma}=g_0R_{\Gamma}{}^2$ και ότι $h=\frac{R_{\Gamma\eta\varsigma}}{16}$ η τελευταία σχέση δίνει:

$$W_{Fg(A\to\Delta)}=-\frac{16}{17}mg_0R_{\Gamma}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2.27) παίρνουμε:

$$W_{F\pi\rho(\Delta\to\infty)}=0-\frac{1}{2}m\frac{16}{17}g_0R_{\Gamma}-\left(-\frac{16}{17}mg_0R_{\Gamma}\right) \text{ ή } W_{F\pi\rho(\Delta\to\infty)}=\frac{8}{17}mg_0R_{\Gamma}$$

Ένας δορυφόρος μάζας $m=200kg$ διαγράφει κυκλική τροχιά σε ύψος $h=23R_Γ/9$ πάνω από την επιφάνεια της της Γης. Με εσωτερική διάταξη ο δορυφόρος διασπάται σε δύο τμήματα $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες αντίστοιχα m_1 και m_2. Το τμήμα $Σ_2$ αποκτά την απαραίτητη ταχύτητα για να φύγει από την γήινη έλξη, ενώ το τμήμα $Σ_1$ συνεχίζει να διαγράφει την ίδια κυκλική τροχιά που βρισκόταν πριν την έκρηξη. Να βρεθούν:

α. η ταχύτητα περιστροφής του δορυφόρου.

β. η ταχύτητα που απέκτησε το τμήμα $Σ_2$ αμέσως μετά την έκρηξη.

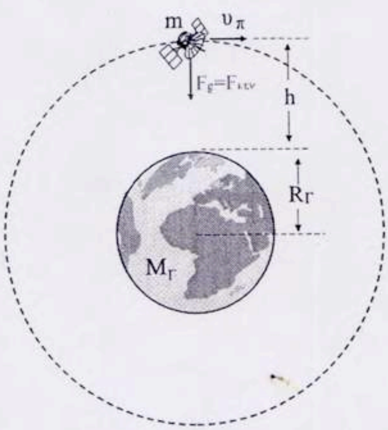
γ. ο λόγος m_1/m_2 των μαζών των δύο σωμάτων.

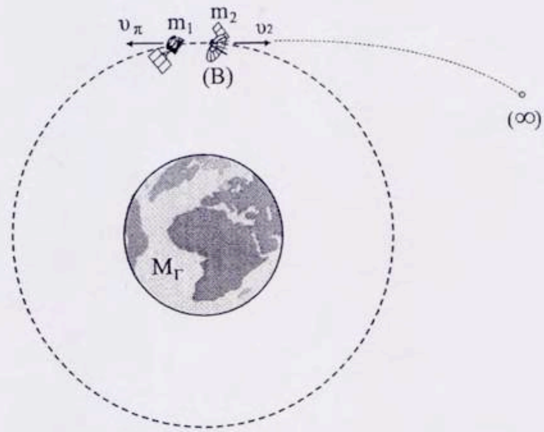
δ. η ενέργεια που ελευθερώθηκε κατά την έκρηξη.

Απάντηση

α. Ο δορυφόρος εκτελεί κυκλική τροχιά λόγω της ελκτικής δύναμης που του ασκεί η Γη. Η βαρυτική αυτή δύναμη παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$F_g = F_{κεν} \quad ή \quad G\frac{M_Γ m}{(R_Γ + h)^2} = \frac{m\upsilon_π^2}{(R_Γ + h)} \quad ή \quad \upsilon_π^2 = \frac{GM_Γ}{(R_Γ + h)} \qquad (2.34)$$





Από τον τύπο της έντασης του πεδίου βαρύτητας για την επιφάνεια της Γης παίρνουμε

$$GM_{\Gamma} = g_0 R_{\Gamma}^{\,2}$$

Με αντικατάσταση στην (2.34) έχουμε :

$$\upsilon_{\pi} = \sqrt{\frac{g_0 R_{\Gamma}^{\,2}}{\left(R_{\Gamma} + \frac{23}{9}R_{\Gamma}\right)}} \quad \text{ή} \quad \upsilon_{\pi} = \sqrt{\frac{9}{32}g_0 R_{\Gamma}} = \sqrt{\frac{9}{32}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 6{,}4\cdot 10^6 m} \quad \text{ή}$$

$$\upsilon_{\pi} = 3\sqrt{2}\cdot 10^3 m/s$$

β. Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας για το σύστημα Γη – σώμα Σ_2 μεταξύ του σημείου, (B), που έγινε η διάσπαση και του σημείου που βρίσκεται στο άπειρο και στο οποίο άπειρο το σώμα δεν έχει κινητική ενέργεια.

$$E_{MHX(B)} = E_{MHX(\infty)} \quad \text{ή} \quad U_B + K_B = U_{\infty} + K_{\infty} \quad \text{ή} \quad -G\frac{M_{\Gamma}m_2}{R_{\Gamma}+h} + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = 0$$

Κάνουμε χρήση της σχέσης $GM_{\Gamma} = g_0 R_{\Gamma}^{\,2}$, λύνουμε ως προς υ_2 και κάνοντας αριθμητική αντικατάσταση, παίρνουμε:

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2g_0 R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma} + \frac{23}{9}R_{\Gamma}}} = \sqrt{2\cdot\frac{9}{32}g_0 R_{\Gamma}} \quad \text{ή} \quad \upsilon_2 = \sqrt{2}\,\upsilon_{\pi} \quad \text{ή} \quad \upsilon_2 = 6\cdot 10^3 m/s$$

γ. Για την έκρηξη ισχύει η Διατήρηση της Ορμής. Το τμήμα Σ_1 παραμένει σε κυκλική τροχιά ακτίνας ίση με την αρχική, άρα το μέτρο της ταχύτητας παραμένει το ίδιο αλλά κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση. Αν δεν αντιστραφεί η κατεύθυνση κίνησης , τότε δεν υπάρχει μεταβολή ορμής στο τμήμα Σ_1, οπότε δεν υπάρχει μεταβολή ορμής ούτε στο τμήμα Σ_2, δηλαδή δεν έχουμε έκρηξη.

$$\mathbf{p}_{\alpha\rho\chi} = \mathbf{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή } (m_1 + m_2)\upsilon_\pi = -m_1\upsilon_\pi + m_2\upsilon_2 \text{ ή}$$

$$(m_1 + m_2)\upsilon_\pi = -m_1\upsilon_\pi + m_2\sqrt{2}\upsilon_\pi \text{ ή}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \qquad (2.35)$$

δ. Η ενέργεια που ελευθερώθηκε πήγε σε αύξηση της κινητικής ενέργειας των σωμάτων.

$$\Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \left(\frac{1}{2}m_1\upsilon_\pi^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2\right) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\pi^2 \qquad (2.36)$$

Στη σχέση (2.36) έχουμε αγνώστους τις μάζες. Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (2.35), $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ και $m_1+m_2=m$ παίρνουμε:

$$m_1 = m\left(3-2\sqrt{2}\right) = 200\text{kg}\left(3-2\sqrt{2}\right) \text{ ή } m_1 = 34\text{kg}$$

$$m_2 = 2m\left(\sqrt{2}-1\right) = 2\cdot 200\text{kg}\left(\sqrt{2}-1\right) \text{ ή } m_2 = 166\text{kg}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση στη σχέση (2.36) παίρνουμε:

$$\Delta K = \left(\frac{1}{2}34\text{kg}\cdot\left(3\sqrt{2}\cdot 10^3\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{1}{2}166\text{kg}\cdot\left(6\cdot 10^3\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\right) - \frac{1}{2}(200\text{kg})\cdot\left(3\sqrt{2}\cdot 10^3\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \text{ ή}$$

$$\Delta K = 1{,}49\cdot 10^9\,\text{J}$$

Ένας δορυφόρος μάζας m διαγράφει κυκλική τροχιά αρχικά σε ύψος h. Λόγω της αραιής ατμόσφαιρας που υπάρχει αναπτύσσεται σταθερή δύναμη αντίστασης, που έχει ως αποτέλεσμα ο δορυφόρος να χάνει πολύ αργά ύψος. Ο δορυφόρος διαγράφει κυκλικές τροχιές με διαρκώς μειούμενη ακτίνα διαγράφοντας μια σπειροειδή τροχιά μέχρι τελικά να πέσει στην επιφάνεια Γης.

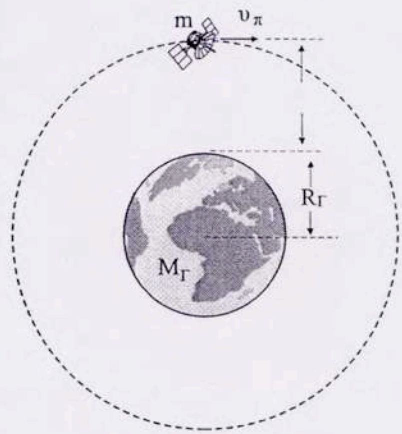
α. Να βρεθεί η ταχύτητα περιστροφής του δορυφόρου σε συνάρτηση με το ύψος h. Να σχολιασθεί το αποτέλεσμα.

β. Να υπολογιστεί η περίοδος του δορυφόρου σε συνάρτηση με το ύψος h. Να σχολιασθεί το αποτέλεσμα

γ. Να σχεδιαστούν οι συναρτήσεις που δείχνουν πως μεταβάλλονται η κινητική, η δυναμική και η μηχανική ενέργεια ενός δορυφόρου καθώς χάνει ύψος, σε συνάρτηση με την ακτίνα περιφοράς τους.

Απάντηση

α. Ο δορυφόρος εκτελεί κυκλική τροχιά λόγω της ελκτικής δύναμης που του ασκεί η Γη. Η βαρυτική αυτή δύναμη παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, οπότε μπορούμε να γράψουμε:



$$F_g = F_{κεν} \quad ή \quad G\frac{M_Γ m}{(R_Γ+h)^2} = \frac{m υ_π^2}{(R_Γ+h)} \quad ή$$

$$υ_π = \sqrt{\frac{G M_Γ}{(R_Γ+h)}}$$

Παρατηρούμε ότι το ύψος h βρίσκεται στον παρονομαστή, δηλαδή καθώς το h μικραίνει η ταχύτητας περιφοράς του δορυφόρου αυξάνεται.

β. Περίοδο ,T, της κυκλικής τροχιάς, ακτίνας r, ενός δορυφόρου ονομάζουμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να διαγράψει ο δορυφόρος μια πλήρη κυκλική τροχιά.

$$T = \frac{s}{υ_π} = \frac{2πr}{υ_π} \quad ή \quad T = \frac{2π(R_Γ+h)}{\sqrt{\frac{GM_Γ}{(R_Γ+h)}}} \quad ή \quad T = \frac{2π\sqrt{(R_Γ+h)^3}}{\sqrt{GM_Γ}}$$

Παρατηρούμε ότι το ύψος h βρίσκεται στον αριθμητή, δηλαδή καθώς το h μικραίνει η περίοδος περιφοράς του δορυφόρου μειώνεται. Άρα, **όταν οι δορυφόροι χάνουν ύψος αυτό έχει ως συνέπεια να μειώνεται η περίοδός τους και να αυξάνεται η ταχύτητα περιφοράς τους.**

γ. Η κινητική ενέργεια βρίσκεται από τη σχέση: $K = \frac{1}{2} m υ_π^2 \quad ή \quad K = \frac{1}{2}\frac{GM_Γ m}{(R_Γ+h)}$

Παρατηρούμε ότι καθώς ο δορυφόρος χάνει ύψος αυξάνεται η κινητική του ενέργεια.

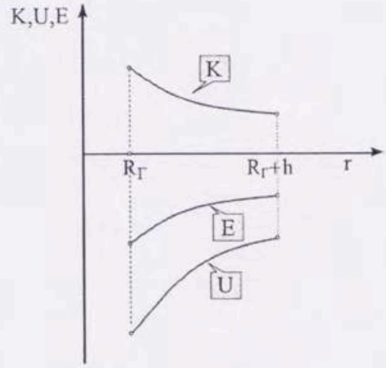
Η δυναμική ενέργεια βρίσκεται από τη σχέση: $U = -\frac{GM_Γ m}{(R_Γ+h)}$

Παρατηρούμε ότι έχει το h στον παρονομαστή και αρνητικό πρόσημο, δηλαδή καθώς ο δορυφόρος χάνει ύψος η δυναμική του ενέργεια ελαττώνεται. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι σε έναν δορυφόρο η τιμή της δυναμικής είναι διπλάσια της κινητικής ενέργειας.

Η μηχανική ενέργεια βρίσκεται από τη σχέση:

$$E_{ΜΗΧ} = U + K = -\frac{GM_Γ m}{(R_Γ+h)} + \frac{1}{2}\frac{GM_Γ m}{(R_Γ+h)} \quad ή \quad E_{ΜΗΧ} = -\frac{1}{2}\frac{GM_Γ m}{(R_Γ+h)}$$

Άρα, όταν οι δορυφόροι χάνουν ύψος αυξάνεται η κινητική τους ενέργεια και μειώνεται η δυναμική τους ενέργεια στο διπλάσιο. Αυτό έχει ως συνέπεια να μειώνεται η μηχανική τους ενέργεια. Στο σχήμα που ακολουθεί δείχνονται οι τρεις συναρτήσεις σε σχέση με την ακτίνα περιστροφής.



Ένας δορυφόρος μάζας $m=2000kg$ διαγράφει αρχικά κυκλική τροχιά σε ύψος $h_A=7R_\Gamma/9$. Λόγω της αραιής ατμόσφαιρας που υπάρχει στο ύψος αυτό αναπτύσσεται σταθερή δύναμη αντίστασης $A=0,01N$, που έχει ως αποτέλεσμα ο δορυφόρος να χάνει πολύ αργά ύψος και αφού διαγράψει μια σπειροειδή τροχιά, να σταθεροποιηθεί σε μια κυκλική τροχιά σε ύψος $h_B=9R_\Gamma/16$ πάνω από την επιφάνεια της Γης. Να βρεθούν:

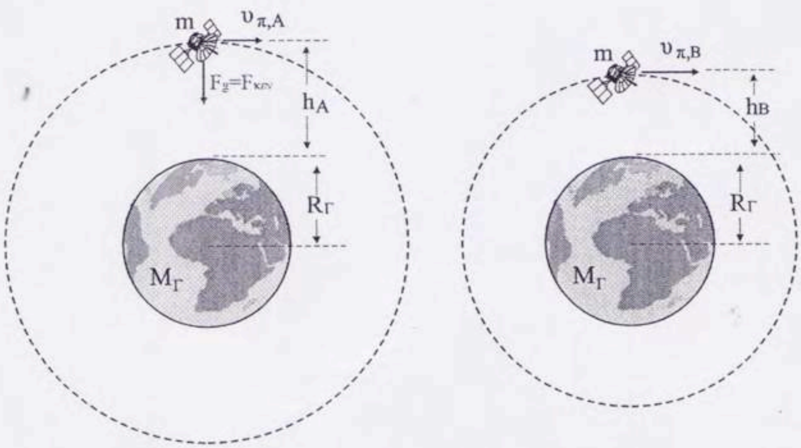
α. Η αρχική και τελική ταχύτητα περιστροφής του δορυφόρου.

β. Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του δορυφόρου κατά την μετάπτωσή του από την αρχική στην τελική τροχιά, σε συνάρτηση με τα m, g_o, R_Γ.

γ. Το έργο της βαρυτικής δύναμης κατά την μετάπτωσή του δορυφόρου από την αρχική στην τελική τροχιά, σε συνάρτηση με τα m, g_o, R_Γ..

δ. Το συνολικό μήκος της σπειροειδούς τροχιάς που διέγραψε ο δορυφόρος για να φτάσει από την αρχική στην τελική τροχιά.

Απάντηση



α. Ο δορυφόρος εκτελεί κυκλική τροχιά λόγω της ελκτικής δύναμης που του ασκεί η Γη. Η βαρυτική αυτή δύναμη παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$F_g = F_{κεν} \text{ ή } G\frac{M_\Gamma m}{(R_\Gamma + h)^2} = \frac{m\upsilon_\pi^2}{(R_\Gamma + h)} \text{ ή } \upsilon_\pi^2 = \frac{GM_\Gamma}{(R_\Gamma + h)} \text{ ή } \upsilon_\pi^2 = \frac{g_0 R_\Gamma^{\ 2}}{R_\Gamma + h}$$

Με αντικατάσταση $h_A = \frac{7}{9}R_\Gamma$ παίρνουμε:

$$\upsilon_{\pi,A} = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma^{\ 2}}{\left(R_\Gamma + \frac{7}{9}R_\Gamma\right)}} = \sqrt{\frac{9}{16}g_0 R_\Gamma} \text{ ή } \upsilon_{\pi,A} = \frac{3}{4}\sqrt{g_0 R_\Gamma} \text{ ή}$$

$$\upsilon_{\pi,A} = \frac{3}{4}\sqrt{10\frac{m}{s^2}\cdot 6{,}4\cdot 10^6 m} \text{ ή } \upsilon_{\pi,A} = 6\cdot 10^3 m/s$$

Με αντικατάσταση $h_B = \frac{9}{16}R_\Gamma$ παίρνουμε:

$$\upsilon_{\pi,B} = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma^{\ 2}}{\left(R_\Gamma + \frac{9}{16}R_\Gamma\right)}} = \sqrt{\frac{16}{25}g_0 R_\Gamma} \text{ ή } \upsilon_{\pi,B} = \frac{4}{5}\sqrt{g_0 R_\Gamma} \text{ ή}$$

$$\upsilon_{\pi,B} = \frac{4}{5}\sqrt{10\frac{m}{s^2}\cdot 6{,}4\cdot 10^6 m} \text{ ή } \upsilon_{\pi,B} = 6{,}4\cdot 10^3 m/s$$

β. $\Delta K = K_B - K_A = \frac{1}{2}m\upsilon_{\pi,B}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{\pi,A}^2$ ή $\Delta K = \frac{1}{2}m\left(\frac{4}{5}\sqrt{g_0 R_\Gamma}\right)^2 - \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{4}\sqrt{g_0 R_\Gamma}\right)^2$ ή

$$\Delta K = \frac{1}{2}mg_0 R_\Gamma\left(\frac{16}{25} - \frac{9}{16}\right) \text{ ή } \Delta K = \frac{1}{2}\frac{31}{400}mg_0 R_\Gamma$$

Παρατηρούμε ότι η ύπαρξη της δύναμης αντίστασης είχε ως συνέπεια ο δορυφόρος να αυξήσει την κινητική του ενέργεια.

γ. Το έργο της βαρυτικής δύναμης κατά την μετάπτωσή του δορυφόρου από την αρχική στην τελική τροχιά είναι ίσο με

$$W_{Fg(A\to B)} = m(V_A - V_B) = m\left(-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + \frac{7}{9}R_\Gamma} + G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + \frac{9}{16}R_\Gamma}\right) \text{ ή}$$

$$W_{Fg(A\to B)} = mg_0 R_\Gamma\left(-\frac{9}{16} + \frac{16}{25}\right) \text{ ή } W_{Fg}(A\to B) = \frac{31}{400}mg_0 R_\Gamma$$

Παρατηρούμε ότι το έργο της βαρυτικής δύναμης είναι διπλάσιο από την αύξηση της κινητικής ενέργειας.

δ. Για την μετάπτωση από την αρχική στην τελική τροχιά **δεν** ισχύει η διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας καθώς υπάρχει δύναμη αντίστασης. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Έργου – Ενέργειας.

$$K_B - K_A = W_{Fg(A\to B)} + W_{F\alpha\nu\tau(A\to B)} \quad ή \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{31}{400}mg_0R_\Gamma = \frac{31}{400}mg_0R_\Gamma - F_{\alpha\nu\tau}s \quad ή$$

$$s = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{31}{400}mg_0R_\Gamma}{F_{\alpha\nu\tau}} = \frac{31}{800}\cdot\frac{2\cdot10^3\cdot10\frac{m}{s^2}\cdot6,4\cdot10^6 m}{10^{-2}N} \quad ή \quad s = 496\cdot10^9 m$$

Δύο σφαιρικοί πλανήτες έχουν ο πρώτος ακτίνα R_1, μάζα m_1 και ο δεύτερος μάζα $m_2=9m_1$. Τα κέντρα των πλανητών απέχουν $d=32R_1$ και οι πλανήτες περιστρέφονται σε κυκλικές τροχιές γύρω από το κοινό κέντρο μάζας, εξαιτίας μόνο των δικών τους βαρυτικών δυνάμεων.

α. Να βρεθούν οι ακτίνες των κυκλικών τους τροχιών.

β. Να βρεθεί η θέση που μηδενίζεται η ένταση του βαρυτικού πεδίου .

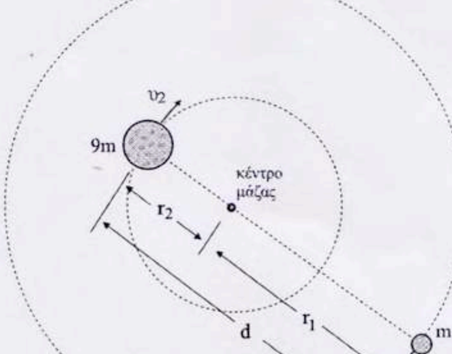
γ. Να βρεθεί η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να βληθεί ένα βλήμα από την επιφάνεια του πρώτου πλανήτη ώστε να φτάσει στον δεύτερο πλανήτη.

Απάντηση

α. Οι πλανήτες έχουν κοινή γωνιακή ταχύτητα, σε διαφορετική περίπτωση το κέντρο μάζας τους θα μετακινείτο και οι τροχιές δεν θα ήταν κυκλικές. Για τις ταχύτητες περιστροφής ισχύουν:

$$\upsilon_1 = \omega r_1, \quad \upsilon_2 = \omega r_2, \quad (2.37\alpha)\ (2.37\beta)$$

Η ελκτική δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ των δύο σωμάτων, $F_g = G\frac{m_1m_2}{d^2}$, παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης για κάθε σώμα. Οπότε μπορούμε να γράψουμε:



$$F_g = F_{K1} \quad ή \quad G\frac{m_1m_2}{d^2} = \frac{m_1\upsilon_1^2}{r_1} \quad ή \quad \upsilon_1^2 = \frac{Gm_2r_1}{d^2}$$

$$F_g = F_{K2} \quad ή \quad G\frac{m_1m_2}{d^2} = \frac{m_2\upsilon_2^2}{r_2} \quad ή \quad \upsilon_2^2 = \frac{Gm_1r_2}{d^2}$$

Με διαίρεση κατά μέλη των δύο τελευταίων σχέσεων και αντικατάσταση των ταχυτήτων από τις σχέσεις (2.37) παίρνουμε:

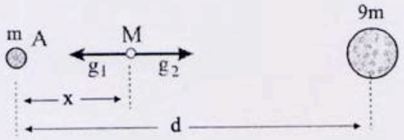
$$\frac{\upsilon_1^2}{\upsilon_2^2} = \frac{m_2r_1}{m_1r_2} \quad ή \quad \frac{(\omega r_1)^2}{(\omega r_2)^2} = \frac{9m_1r_1}{m_1r_2} \quad ή \quad \frac{r_1}{r_2} = 9 \qquad (2.38)$$

Επιπλέον έχουμε $r_1+r_2=32R_1$ (2.39)

Η λύση του συστήματος των (2.38),(2.39) δίνει

$$r_1=28{,}8R_1 \quad \text{και} \quad r_2=3{,}2R_1$$

β. Αν το σημείο M όπου μηδενίζεται η ένταση, απέχει x από το κέντρο του πρώτου πλανήτη, έχουμε:



$$g_{o\lambda}=0 \quad \text{ή} \quad g_1-g_2=0 \quad \text{ή} \quad G\frac{m_1}{x^2}=G\frac{m_2}{(d-x)^2} \quad \text{ή}$$

$$\frac{m_1}{x^2}=\frac{9m_1}{(32R_1-x)^2} \quad \text{ή} \quad 32R_1-x=\pm 3x$$

Η τελευταία σχέση δίνει $x=8R_1$ ή $x=-16R_1$ που απορρίπτεται γιατί είναι έξω από την απόσταση που ενώνει τις δύο μάζες. Άρα

$$x=8R_1 \tag{2.40}$$

γ. Έχουμε κίνηση σώματος από ένα σημείο του βαρυτικού πεδίου σε ένα άλλο. Μπορούμε να εφαρμόσουμε είτε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας είτε το θεώρημα έργου ενέργειας. Θα συνεχίσουμε με το Θεώρημα έργου ενέργειας.

Το βλήμα πρέπει να έχει τόση αρχική ταχύτητα στο σημείο A ώστε να φτάσει μέχρι το σημείο M, στο οποίο η ένταση του σύνθετου βαρυτικού πεδίου μηδενίζεται. Στη συνέχεια αναλαμβάνει η ελκτική δύναμη από τον δεύτερο πλανήτη να το έλξει μέχρι την επιφάνειά του.

$$K_M-K_A=W_{Fg(A\to M)} \quad \text{ή} \quad K_M-K_A=U_A-U_M \quad \text{ή}$$

$$0-\frac{1}{2}m\upsilon_A^2=m(V_A-V_M) \tag{2.41}$$

Το δυναμικό στα σημεία A, M, δημιουργείται από δύο μάζες, οπότε έχουμε:

$$V_A=V_{A(\alpha\pi o\ \tau\eta\ m_1)}+V_{A(\alpha\pi o\ \tau\eta\ m_2)}=-G\frac{m_1}{R_1}-\left(-G\frac{m_2}{\ell-R_1}\right) \quad \text{ή}$$

$$V_A=-G\frac{m_1}{R_1}-\left(-G\frac{9m_1}{31R_1}\right) \quad \text{ή} \quad V_A=-\frac{40}{31}G\frac{m_1}{R_1}$$

$$V_M=V_{M(\alpha\pi o\ \tau\eta\ m_1)}+V_{M(\alpha\pi o\ \tau\eta\ m_2)}=-G\frac{m_1}{8R_1}-\left(-G\frac{9m_1}{24R_1}\right) \quad \text{ή} \quad V_M=-\frac{12}{24}G\frac{m_1}{R_1}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2.41) παίρνουμε:

$$0-\frac{1}{2}m\upsilon_A^2=m\left(-\frac{40}{31}G\frac{m_1}{R_1}-(-\frac{12}{24}G\frac{m_1}{R_1})\right) \quad \text{ή} \quad \upsilon_A=\sqrt{\frac{588}{372}\frac{Gm_1}{R_1}}$$