

---

# Φυσική Β Λυκείου, Θετικού Προσανατολισμού

## Ομαλή Κυκλική Κίνηση

---

Οι έννοιες που σχετίζονται με την μελέτη της κυκλικής κίνησης είναι βασικές για την μελέτη σύνθετων κινήσεων σωμάτων. Στην Γ Λυκείου θα αναπτυχθούν αναλυτικά οι μέθοδοι για την μελέτη αυτών των κινήσεων. Παρακάτω παραθέτω βασικές έννοιες για την μελέτη της Ομαλής Κυκλικής κίνησης που θα μας είναι χρήσιμες και αργότερα.

### 1. Περιοδικά Φαινόμενα

Ονομάζονται τα φαινόμενα που επαναλαμβάνονται κατά τον ίδιο τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα. Τέτοια φαινόμενα είναι η κυκλική ομαλή κίνηση, η κίνηση του εκκρεμούς κ.ά. Κάθε περιοδικό φαινόμενο χαρακτηρίζεται από την **Περίοδο** ( $T$ ) και τη **Συχνότητα** ( $f$ ) του.

- **Περίοδος ( $T$ )** ενός περιοδικού φαινομένου είναι ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη επανάληψη του φαινομένου. Αν σε χρόνο  $t$  γίνονται  $N$  επαναλήψεις του φαινομένου, τότε η περίοδος είναι ίση με το πηλίκο:

$$T = \frac{t}{N} \quad (1)$$

Μονάδα μέτρησης της περιόδου είναι το  $1\text{ s}$ .

- **Συχνότητα ( $f$ )** ενός περιοδικού φαινομένου είναι το πηλίκο του αριθμού  $N$  των επαναλήψεων του φαινομένου σε ορισμένο χρόνο  $t$ , προς το χρόνο  $t$ . Δηλαδή:

$$f = \frac{N}{t} \quad (2)$$

Μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι το  $1\text{ Hz}$  ή  $1\text{ s}^{-1}$

Από τον ορισμό τους, τα μεγέθη περίοδος και συχνότητα είναι αντίστροφα και συνδέονται με την σχέση:

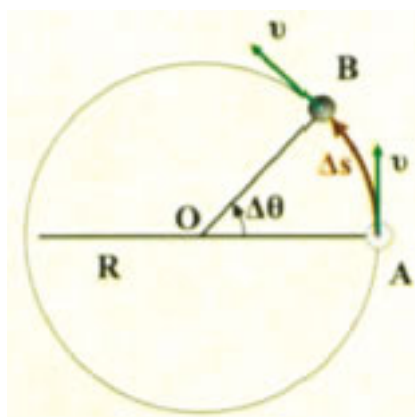
$$f = \frac{1}{T} \quad (3)$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της συχνότητας, γιατί σε χρόνο μιας περιόδου έχει εκτελεστεί μια επανάληψη του φαινομένου.

## 2. Η κινηματική της ομαλής κυκλικής κίνησης

Η κυκλική κίνηση είναι γενικά η κίνηση που εκτελεί ένα σώμα όταν το σχήμα της τροχιάς του είναι ένας κύκλος. Ιδιαίτερο βέβαια ενδιαφέρον έχει η μελέτη της **Ομαλής Κυκλικής Κίνησης**, στην οποία το μέτρο της ταχύτητας του σώματος θα παραμένει σταθερή. Τέτοια κίνηση είναι η κίνηση της Γης γύρω από τον ήλιο, η κίνηση ενός σημείου του γνωστού μας cd κλπ. Στην ομαλή κυκλική κίνηση το σώμα σε ίσα διαστήματα διανύει ίδια τμήματα κύκλου. Τα βασικά μεγέθη για την περιγραφή μιας τέτοιας κίνησης είναι η γραμμική και η γωνιακή ταχύτητα.

### Γραμμική Ταχύτητα



Σχήμα 1: Το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας

Θεωρούμε ένα σώμα μάζας  $m$  και υποθέτουμε ότι σε χρονικό διάστημα  $\Delta t$  διαγράφει μήκος τόξου  $\Delta s$  που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία  $\Delta \theta$ .

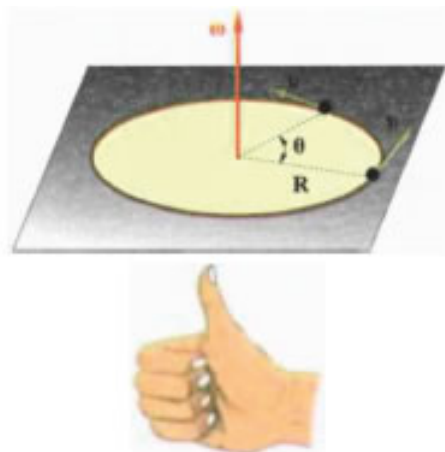
**Ονομάζουμε γραμμική ταχύτητα  $\vec{v}$  του υλικού σημείου, ένα διάνυσμα, το οποίο έχει μέτρο ίσο με το πηλίκο του τόξου  $\Delta s$  προς τον αντίστοιχο χρόνο  $\Delta t$ .**

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (4)$$

Η γραμμική ταχύτητα εφάπτεται της κυκλικής τροχιάς στη θέση που βρίσκεται κάθε φορά το υλικό σημείο και έχει τη φορά της κίνησης του. Η μονάδα μέτρησης είναι το  $1m/s$ . **Είναι προφανές ότι το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας δεν έχει σταθερή κατεύθυνση κατά την διάρκεια της κυκλικής κίνησης, καθώς αλλάζει συνεχώς προσανατολισμό.**

### Γωνιακή Ταχύτητα

**Ονομάζουμε γωνιακή ταχύτητα  $\vec{\omega}$  του υλικού σημείου ένα διάνυσμα, το οποίο έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς του και μέτρο ίσο με το πηλίκο της επίκεντρης γωνιάς  $\Delta\theta$  προς τον αντίστοιχο χρόνο  $\Delta t$ .**



Σχήμα 2: Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (5)$$

Η κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας  $\vec{\omega}$  καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η μονάδα μέτρησης της γωνιακής ταχύτητας είναι το  $1rad/s$ .

Προσοχή η επίκεντρη γωνιά  $\theta$  έχει ως μονάδα μέτρησης το **1 ακτίνιο** (1 rad) το οποίο ορίζεται ως η επίκεντρη γωνιά που αντιστοιχεί σε μήκος τόξου ίσο με το μήκος της ακτίνας

### Σχέση γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας

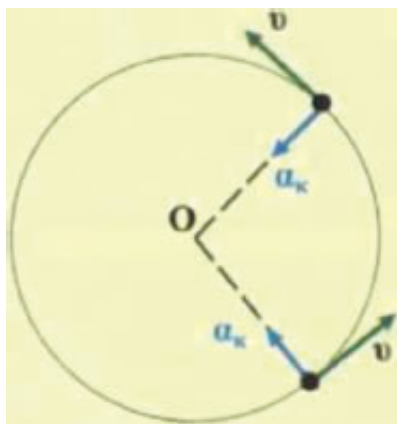
Η επίκεντρη γωνιά  $\theta$  που αντιστοιχεί σε μήκος τόξου  $S$  μας είναι γνωστό ότι ορίζεται από την σχέση  $\theta = \frac{s}{R}$ . Εύκολα προκύπτει από τον ορισμό της γωνίας έχουμε:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} \Rightarrow \Delta s = R \cdot \Delta\theta \Rightarrow v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = R \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow v = \omega \cdot R \quad (6)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση είναι σαφές ότι η γραμμική ταχύτητα είναι ανάλογη της απόστασης του σώματος από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Αν για παράδειγμα μελετήσουμε την κυκλική κίνηση ενός δίσκου, όλα τα σημεία του έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα, αλλά τα σημεία που βρίσκονται στην περιφέρεια του δίσκου έχουν την μέγιστη γραμμική ταχύτητα.

### Κεντρομόλος επιτάχυνση

Στην κυκλική κίνηση **λόγω της μεταβολής της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας του**, το σώμα έχει κεντρομόλο επιτάχυνση, της οποίας το



Σχήμα 3: Το διάνυσμα της  $a_c$

μέτρο δίνεται από την σχέση:

$$\alpha_{\kappa} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R \quad (7)$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι υπεύθυνη για την μεταβολή της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας. Η διεύθυνση της είναι πάντα κάθετη στην γραμμική ταχύτητα.

### Ομαλή κυκλική κίνηση

Όταν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας παραμένει σταθερό, τότε η κίνηση του υλικού σημείου χαρακτηρίζεται ως **Ομαλή Κυκλική Κίνηση**.

Στην κίνηση αυτή παραμένει επίσης σταθερό και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας, οπότε προκύπτει:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - 0}{t - 0} \Rightarrow s = v \cdot t \quad (8)$$

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\theta - 0}{t - 0} \Rightarrow \theta = \omega \cdot t \quad (9)$$

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το υλικό σημείο σε ίσους χρόνους διανύει ίσα τόξα και ίσες γωνίες.

### Σχέση γραμμικής ταχύτητας (γωνιακής ταχύτητας)- περιόδου

Σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου ( $\Delta t = T$ ) το σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει κάνει μια πλήρη περιστροφή, επομένως η έχει διαγράψει μήκος ίσο με την περιφέρεια του κύκλου ( $\Delta s = 2\pi R$ ) και επίκεντρη γωνία ίση με  $\Delta \theta = 2\pi$ . Άρα για την Ομαλή κυκλική κίνηση η γραμμική και η γωνιακή ταχύτητα μπορούν να γραφτούν:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad v = \frac{2\pi R}{T} \quad (10)$$

που αν λάβουμε υπόψη μας την σχέση περιόδου - συχνότητας προκύπτει ότι:

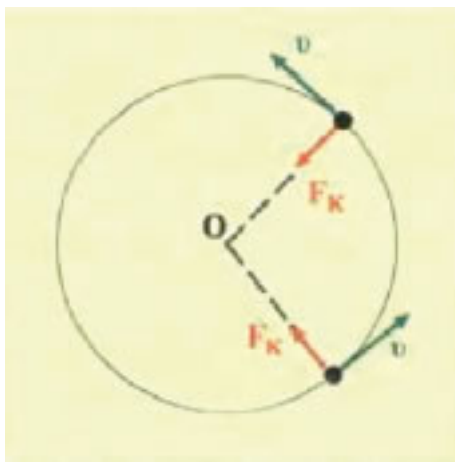
$$\omega = 2\pi f \quad v = 2\pi Rf \quad (11)$$

## Η κεντρομόλος δύναμη

Σύμφωνα με τους Νόμους του Νεύτωνα η αιτία για το είδος μιας κίνησης είναι μια δύναμη. Η κεντρομόλος δύναμη είναι εκείνη που “ευθύνεται” για την κυκλική κίνηση, καθώς “αναγκάζει” το σώμα να στρίβει συνεχώς ακολουθώντας μια κυκλική τροχιά. Η κεντρομόλος δύναμη είναι συνεχώς κάθετη στην γραμμική ταχύτητα και έχει φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha \Rightarrow \Sigma F = m \cdot \alpha_{\kappa} = \frac{m \cdot v^2}{R} \Rightarrow F_{\kappa} = \frac{m \cdot v^2}{R} \quad (12)$$

**Η παραπάνω σχέση είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη” για να εκτελεί ένα σώμα Κυκλική Κίνηση.** Άρα αν ένα σώμα εκτελεί Κυκλική Κίνηση, θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων που είναι κάθετες στην ταχύτητα του να έχουν μέτρο ίσο με την  $F_{\kappa}$ . Για παράδειγμα αν υποθέσουμε



Σχήμα 4: Το διάνυσμα της  $F_{\kappa}$

ότι η κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι μια κυκλική κίνηση η αιτία είναι η βαρυτική έλξη του ήλιου στην γη που λόγω της κατεύθυνσης της θα παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Αντίστοιχο παράδειγμα είναι η κίνηση του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα του ατόμου σύμφωνα με την κλασσική ερμηνεία του ατόμου. Εκεί η ηλεκτρική δύναμη Coulomb θα παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

### 3. Μεταβαλλόμενη Κυκλική Κίνηση\*

Θεωρούμε ένα υλικό σημείο, το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας  $R$ . Αν υποθέσουμε ότι σε χρονικό διάστημα  $dt$  μεταβάλλεται η γραμμική ταχύτητα κατά  $d\vec{v}$  και η γωνιακή ταχύτητα κατά  $d\vec{\omega}$  τότε η κίνηση του είναι μια μεταβαλλόμενη κίνηση.

#### Γραμμική ( ή επιτρόχια) επιτάχυνση

Λόγω της μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας, το υλικό σημείο έχει γραμμική επιτάχυνση.

**Ονομάζουμε γραμμική επιτάχυνση  $\vec{\alpha}_\epsilon$  του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή  $t$  ένα διάνυσμα, του οποίου το μέτρο είναι ίσο με το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της γραμμικής ταχύτητας.**

$$\alpha_\epsilon = \frac{dv}{dt} \quad (13)$$

Η γραμμική επιτάχυνση εφάπτεται της κυκλικής τροχιάς και έχει τη φορά της κίνησης, όταν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας αυξάνεται και φορά αντίθετη από τη φορά της κίνησης, όταν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ελαττώνεται. Η μονάδα μέτρησης της γραμμικής επιτάχυνσης είναι το  $1m/s^2$ .

Το διανυσματικό άθροισμα της γραμμικής επιτάχυνσης  $\vec{\alpha}_\epsilon$  και της κεντρομόλου επιτάχυνσης  $\vec{\alpha}_\kappa$  δίνει την συνισταμένη επιτάχυνση  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_\epsilon + \vec{\alpha}_\kappa$  του υλικού σημείου σε κάθε θέση της τροχιάς του. Το μέτρο της συνολικής επιτάχυνσης είναι ίσο με  $\alpha = \sqrt{\alpha_\epsilon^2 + \alpha_\kappa^2}$

#### Γωνιακή Επιτάχυνση

**Ονομάζουμε γωνιακή επιτάχυνση  $\alpha_{\gamma\omega\nu}$  του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή  $t$  ένα διάνυσμα, του οποίου το μέτρο είναι ίσο με το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας.**

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} \quad (14)$$

Η γωνιακή επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση του διανύσματος  $d\vec{\omega}$ . Μονάδα μέτρησης της γωνιακής επιτάχυνσης είναι το  $1\text{rad/s}^2$ . Γωνιακή επιτάχυνση  $1\text{rad/s}^2$  σημαίνει ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας είναι  $1\text{rad/s}$  σε κάθε  $1\text{s}$ .

### Σχέση γραμμικής και γωνιακής επιτάχυνσης

Η σχέση  $v = \omega \cdot R$  μπορεί να γραφτεί:

$$dv = R \cdot d\omega \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha_{\epsilon} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$

### Ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση

Όταν το μέτρο της επιτροχίας επιτάχυνσης παραμένει σταθερό, τότε η κίνηση του υλικού σημείου χαρακτηρίζεται ως **Ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση**.

Στην κίνηση αυτή παραμένει επίσης σταθερό και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης, άρα μπορούμε να γράψουμε:

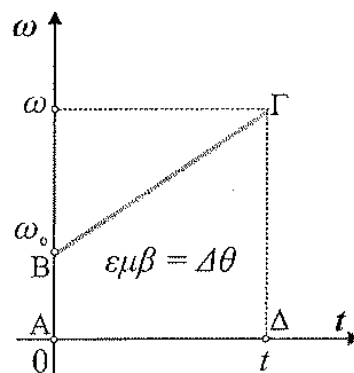
$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - 0}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t \quad (15)$$

Από το διάγραμμα γωνιακής ταχύτητας ( $\omega$ ) - χρόνου ( $t$ ) μπορούμε να υπολογίσουμε:

- την γωνιακή επιτάχυνση που είναι ίση με την κλίση της ευθείας  $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
- την γωνία  $\theta$  που διαγράφει το υλικό σημείο από την χρονική στιγμή  $t = 0$  μέχρι την στιγμή  $t$  με τον υπολογισμό του εμβαδού που περικλύεται κάτω από την ευθεία. Εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι:



$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \quad (16)$$

Στην περίπτωση της ομαλά επιβραδυνόμενης στροφικής κίνησης ( $\alpha_{\gamma\omega\nu} < 0$ ) οι παραπάνω σχέσεις γράφονται:  $\omega = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega\nu}|t$  και  $\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}|\alpha_{\gamma\omega\nu}|t^2$ .

**Παρακάτω ακολουθεί ένας πίνακας αντιστοιχιών μεταξύ γραμμικών και στροφικών μεγεθών της κυκλικής κίνησης.**

| Γραμμικά μεγέθη                                       | Γωνιακά μεγέθη                                                     |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| Μήκος τόξου $s$                                       | γωνία στροφής $\theta$                                             |
| γραμμική ταχύτητα $v$                                 | γωνιακή ταχύτητα $\omega$                                          |
| γραμμική επιτάχυνση $\alpha_\epsilon = \frac{dv}{dt}$ | γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$ |

### Ομαλή Κυκλική Κίνηση

|          |                     |
|----------|---------------------|
| $s = vt$ | $\theta = \omega t$ |
|----------|---------------------|

### Ομαλά Επιταχυνόμενη Κυκλική Κίνηση

|                                              |                                                                 |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $v = v_0 + \alpha_\epsilon t$                | $\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t$                |
| $s = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha_\epsilon t^2$ | $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$ |

### Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κυκλική Κίνηση

|                                               |                                                                  |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| $v = v_0 -  \alpha_\epsilon t$                | $\omega = \omega_0 -  \alpha_{\gamma\omega\nu} t$                |
| $s = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha_\epsilon t^2$ | $\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$ |

Όταν ένα στερεό ( δίσκος, ρόδα, σφαίρα κλπ) στρέφεται γύρω από ένα άξονα περιστροφής, τότε όλα τα σημεία του που κινούνται, θα εκτελούν κυκλικές κινήσεις με ίδια γωνιακά μεγέθη και διαφορετικά γραμμικά μεγέθη.

\* Η Μεταβαλλόμενη Κυκλική Κίνηση είναι εκτός της προβλεπόμενης ύλης για την Β Λυκείου.

ΠΗΓΗ: <http://www.perifysikhs.com>