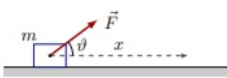
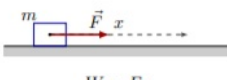
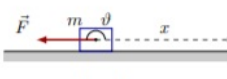


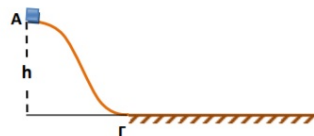
Πίνακας 4.1 - Τυπολόγιο Έργο - Ενέργεια

Τύπος	Μας δίνει	Παρατηρήσεις
Έργο Δύναμης		
 $W = Fx \cos \theta$	Έργο σταθερής δύναμης με τυχαία γωνία θ	
 $W = Fx$	Έργο σταθερής δύναμης με φορά την φορά της κίνησης ($\theta = 0$)	
 $W = Fx \cos 180^\circ$ $W = -Fx$	Έργο σταθερής δύναμης με φορά αντίθετη από την φορά της κίνησης ($\theta = 180^\circ$)	Μία τέτοια δύναμη είναι η τριβή, άρα το έργο της τριβής ολισθήσεως είναι $W_T = -Tx$
 $W = Fx \cos 90^\circ$ $W = 0$	Έργο σταθερής δύναμης κάθετης στην κατεύθυνση της κίνησης ($\theta = 90^\circ$)	Μία κάθετη δύναμη στην κίνηση δεν παράγει έργο
Κινητική Ενέργεια		
$K = \frac{1}{2}mv^2$	Κινητική ενέργεια	Είναι η ενέργεια που έχει ένα σώμα μάζας m όταν κινείται με ταχύτητα v
Δυναμική ενέργεια		
Συνεχίζεται →		

Πίνακας 4.1 - Τυπολόγιο Έργο - Ενέργεια - συνέχεια

Τύπος	Μας δίνει	Παρατηρήσεις
$\Delta U = -W_F$	Ορισμός δυναμικής ενέργειας που παράγει η (συντηρητική) δύναμη F	$U_{αρχ} - U_{τελ} = W_F$
$U = mgh$	Δυναμική βαρυτική ενέργεια σώματος μάζας m σε ύψος h	Δυναμική ενέργεια που οφείλεται στην βαρύτητα. Θεωρούμε επίπεδο δυναμικής ενέργειας μηδέν στο έδαφος
Διατήρηση μηχανικής ενέργειας		
$E = K + U$	Μηχανική ενέργεια	
$E = \text{σταθερή}$ $K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ}$	A.Δ.Μ.Ε.	Ισχύει όταν δεν υπάρχουν μη-συντηρητικές δυνάμεις στο σώμα, όπως π.χ. τριβή
Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας		
$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{ολ}$ $K_{τελ} - K_{αρχ} = \Sigma W$	Θ.Μ.Κ.Ε.	Ισχύει σε κάθε περίπτωση
Ισχύς		
$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$ ή $P = \frac{W}{t}$	Ορισμός Ισχύος	Η ισχύς είναι ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας. Μονάδα Watt W
$P_F = Fv$	Ισχύς δύναμης	Υποθέτουμε ότι η δύναμη έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας.
$P_T = -Tv$	Ισχύς τριβής	Η τριβή έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα άρα αφαιρεί ενέργεια από το σύστημα και η ισχύς της είναι αρνητική
Μεταβολή Μηχανικής Ενέργειας		
$\Delta E = W_{τριβών}$	Απώλεια μηχανικής ενέργειας	Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας ισούται με το έργο των μη-συντηρητικών δυνάμεων, όπως η τριβή

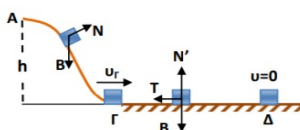
1. Σώμα μάζας m βρίσκεται στη θέση Α σε ύψος $h=1,8\text{ m}$ και αφήνεται να ολισθήσει. Η κίνησή του είναι χωρίς τριβές στην επιφάνεια ΑΓ αλλά στο οριζόντιο επίπεδο υπάρχει τριβή με συντελεστή $\mu=0,5$. Να βρείτε:



- (α) Την ταχύτητά του στο σημείο Γ
 (β) Το διάστημα που θα διανύσει στο οριζόντιο επίπεδο μέχρι να σταματήσει
 (γ) Τον χρόνο που κινήθηκε στο οριζόντιο επίπεδο. Δίνεται $g = 10\text{ m/s}^2$.

Απάντηση:

α) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ από τη θέση (Α) μέχρι τη θέση (Γ) αφού το έργο της N είναι μηδέν (η N είναι κάθετη σε κάθε στοιχειώδη μετατόπιση) και η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το Βάρος του σώματος.



$$E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} = E_{\mu\eta\chi(A)} \Rightarrow K_{(\Gamma)} + U_{(\Gamma)} = K_{(A)} + U_{(A)} \Rightarrow \frac{1}{2}mu_{\Gamma}^2 + 0 = 0 + mgh \Rightarrow u_{\Gamma} = \sqrt{2gh} \Rightarrow u_{\Gamma} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1,8} \Rightarrow u_{\Gamma} = \sqrt{36} \Rightarrow \boxed{u_{\Gamma} = 6\text{ m/s}}$$

β) Στο οριζόντιο επίπεδο $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N' = B \Rightarrow N' = mg$ άρα $T = \mu mg$ (1)

Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ από τη θέση (Γ) μέχρι τη θέση (Δ) όπου το σώμα σταματά ($v=0$):

$$K_{(\Delta)} - K_{(\Gamma)} = W_N + W_B + W_T \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mu_{\Gamma}^2 = 0 + 0 - T(\Gamma\Delta) \xrightarrow{(1)} -\frac{1}{2} \cdot m \cdot 36 = -0,5 \cdot m \cdot 10 \cdot (\Gamma\Delta) \Rightarrow 18 = 5(\Gamma\Delta) \Rightarrow (\Gamma\Delta) = 18/5 \Rightarrow (\Gamma\Delta) = 3,6\text{ m}.$$

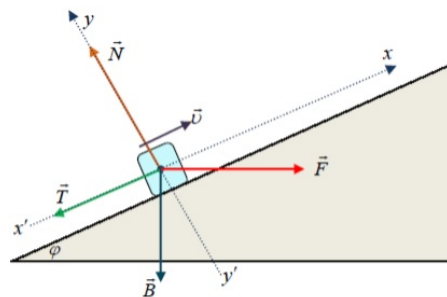
γ) Στο οριζόντιο επίπεδο το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με

$$\text{επιβράδυνση μέτρου } \alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{T}{m} \xrightarrow{(1)} \alpha = \frac{\mu mg}{m} = \mu g \Rightarrow \alpha = 5\text{ m/s}^2 \text{ και θα ισχύει:}$$

$$v = v_{\Gamma} - at \xrightarrow{v=0} 0 = 6 - 5t \Rightarrow t = 6/5 \Rightarrow t = 1,2\text{ s}.$$

ΠΗΓΗ: ev.marousis@gmail.com

2. Ένα σώμα μάζας $M = 10\text{ Kg}$ κινείται ευθύγραμμα ομαλά με ταχύτητα $v = 1\text{ m/s}$, πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ και παρουσιάζει με αυτό συντελεστή τριβής $\mu=0,5$. Ένας άνθρωπος ασκεί στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ και το σώμα ανέρχεται με σταθερή επιτάχυνση $a=2\text{ m/s}^2$. Αν το σώμα κινείται για χρόνο $\Delta t = 4\text{ s}$ να βρείτε:



α) το συνολικό έργο όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.

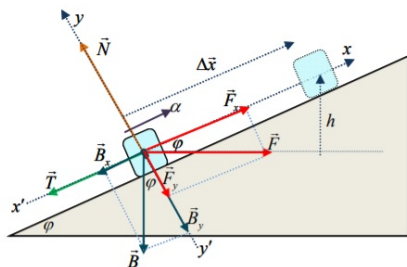
β) τη μεταβολή στην δυναμική βαρυτική ενέργεια του σώματος.

γ) τη χημική ενέργεια που δαπάνησε ο άνθρωπος ασκώντας στο σώμα τη δύναμη $\vec{F}$.

δ) τη θερμική ενέργεια που αναπτύχθηκε λόγω τριβής.

ε) τις ενεργειακές μετατροπές που πραγματοποιούνται.

Δίδονται $g = 10\text{ m/s}^2$, $\eta\mu\varphi = 0,6$ και $\sigma\eta\varphi = 0,8$.



α) Για τον άξονα της κίνησης $x'x$ έχω: $\Sigma F_x = Ma \Rightarrow \Sigma F_x = 20 \text{ N}$.

Στον άξονα $y'y$ το σώμα ισορροπεί, άρα $\Sigma F_y = 0$.

Οπότε η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι η $\Sigma F_x = 20 \text{ N}$.

Σε χρόνο $\Delta t = 4 \text{ s}$, το σώμα μετατοπίζεται κατά

$$\Delta x = v \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 = 1 \cdot 4 + 16 \Rightarrow \Delta x = 20 \text{ m}.$$

Εφαρμόζω ΘΜΚΕ για το σώμα από τη θέση που ασκείται η F ($x=0$) μέχρι τη θέση όπου $\Delta x=20 \text{ m}$:

$$\Delta K = W_{\Sigma F} = W_{\Sigma F_x} = \Sigma F_x \cdot \Delta x = 20 \cdot 20 \Rightarrow W_{\Sigma F} = 400 \text{ J}$$

β) Για την μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος ισχύει:

$$W_B = -\Delta U \Rightarrow \Delta U = -W_B = -(W_{B_x} + W_{B_y}) = -(-B_x \cdot \Delta x) \Rightarrow$$

$$\Delta U = Mg \eta \mu \phi \cdot \Delta x = 10 \cdot 10 \cdot 0,6 \cdot 20 \Rightarrow \Delta U = 1200 \text{ J}$$

γ) Πρέπει τώρα να υπολογίσουμε τα μέτρα των δυνάμεων F , N και της τριβής T . Για την κίνηση στον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$F_x - B_x - T = Ma \Rightarrow F_x = Ma + Mg \eta \mu \phi + T \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B_y - F_y = 0 \Rightarrow N = Mg \sigma \nu \eta \phi + F \eta \mu \phi \quad (2)$$

$$\text{Άρα } T = \mu N \xrightarrow{(2)} T = \mu (Mg \sigma \nu \eta \phi + F \eta \mu \phi) \quad (3)$$

οπότε αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στη σχέση (1) έχουμε:

$$F_x = Ma + Mg \eta \mu \phi + \mu Mg \sigma \nu \eta \phi + \mu F \eta \mu \phi \Rightarrow$$

$$F \sigma \nu \eta \phi - \mu F \eta \mu \phi = M(\alpha + g \eta \mu \phi + \mu g \sigma \nu \eta \phi) \Rightarrow$$

$$F(\sigma \nu \eta \phi - \mu \eta \mu \phi) = M(\alpha + g \eta \mu \phi + \mu g \sigma \nu \eta \phi) \Rightarrow F = \frac{M(\alpha + g \eta \mu \phi + \mu g \sigma \nu \eta \phi)}{(\sigma \nu \eta \phi - \mu \eta \mu \phi)} \xrightarrow{(SI)}$$

$$F = \frac{10(2 + 6 + 0,5 \cdot 10 \cdot 0,8)}{(0,8 - 0,5 \cdot 0,6)} = \frac{120}{0,5} \Rightarrow F = 240 \text{ N} \text{ οπότε αντικαθιστώντας στην (3) έχουμε:}$$

$$T = 0,5(10 \cdot 8 + 240 \cdot 0,6) \Rightarrow T = 112 \text{ N}.$$

Η χημική ενέργεια που δαπανά ο άνθρωπος, ισούται με το έργο της δύναμης F που ασκεί, στο σώμα.

$$\text{Άρα: } E_{\chi \eta \mu} = W_F = F \cdot \Delta x \sigma \nu \eta \phi = 240 \cdot 20 \cdot 0,8 \Rightarrow E_{\chi \eta \mu} = 3840 \text{ J}$$

δ) Η θερμική ενέργεια που αναπτύσσεται λόγω τριβής ισούται με την απόλυτη τιμή του έργου της τριβής, άρα:

$$Q = |W_T| = T \cdot \Delta x = 112 \cdot 20 \Rightarrow Q = 2240 \text{ J}$$

ε) Οι ενεργειακές μετατροπές είναι οι εξής:

➤ Η χημική ενέργεια που χάνει ο άνθρωπος, μεταβιβάζεται στο σώμα μέσω του έργου της δύναμης F .

$$\text{Άρα } E_{\chi \eta \mu} = 3840 \text{ J}$$

➤ Ένα μέρος της $E_{\chi \eta \mu}$, μέσω του έργου της T μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια:

$$\text{Άρα } Q = 2240 \text{ J}$$

➤ Ένα μέρος της $E_{\text{χημ}}$, μέσω του έργου του βάρους μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια:

$$W_B = -\Delta U \Rightarrow \Delta U = -W_B = -(-B_x \cdot \Delta x) \Rightarrow \Delta U = Mg\eta\mu\varphi \Delta x = 10 \cdot 10 \cdot 0,6 \cdot 20 \Rightarrow \boxed{\Delta U = 1200J}$$

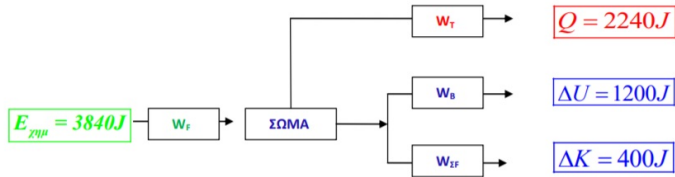
➤ Ένα μέρος της $E_{\text{χημ}}$, μέσω του έργου της συνισταμένης των δυνάμεων, μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια:

$$W_{\Sigma F_x} = \Delta K \Rightarrow \Delta K = \Sigma F_x \cdot \Delta x \Rightarrow \Delta K = 20 \cdot 20 \Rightarrow \boxed{\Delta K = 400J}$$

Πράγματι από την **αρχή διατήρησης της ενέργειας** πρέπει να ισχύει:

$$E_{\text{χημ}} = Q + \Delta U + \Delta K \Rightarrow E_{\text{χημ}} = 2240 + 1200 + 400 = 3840J. \text{ Που ισχύει.}$$

ΣΧΗΜΑΤΙΚΑ ΕΧΩ:



3. Ένας μαθητής σπρώχνει ένα κιβώτιο μάζας $m=100 \text{ kg}$ πάνω σε οριζόντιο δρόμο με τον οποίο το κιβώτιο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,5$.

Α) Πόση είναι η δύναμη που ασκεί ο μαθητής, αν το κιβώτιο μετατοπίζεται με σταθερή ταχύτητα;

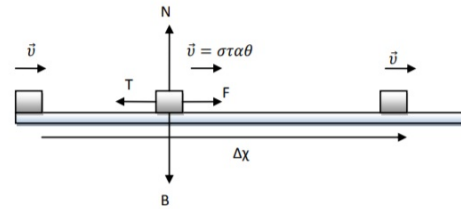
Β) Πόση ενέργεια προσφέρει ο μαθητής στο κιβώτιο, αν το μετατοπίσει κατά 10 m ;

Γ1) Αν διπλασιάσει ο μαθητής την δύναμη που ασκεί στο κιβώτιο, πόση θα είναι η επιτάχυνση με την οποία θα κινείται το κιβώτιο;

Γ2) Πόση κινητική ενέργεια θα έχει αποκτήσει το κιβώτιο σε αυτή την περίπτωση όταν θα έχει μετατοπιστεί κατά 10 m ; Δίνεται $g=10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση:

Α)



$$\text{Αφού } \vec{v} = \text{σταθ} \rightarrow \Sigma \vec{F}_x = 0 \\ \rightarrow F - T = 0 \rightarrow F = T \quad (1)$$

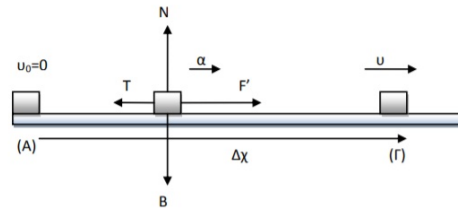
$$\text{Ομως } \Sigma \vec{F}_y = 0 \rightarrow N - B = 0 \\ \rightarrow N = B = mg = 1000 \text{ N.}$$

$$\text{Επίσης } T = \mu N \rightarrow T = 0,5 \cdot 1000 \\ \rightarrow T = 500 \text{ N. Άρα από την (1)} \\ \text{έχω: } \boxed{F = 500 \text{ N.}}$$

Β) Η Ενέργεια που προσφέρει ο μαθητής είναι ίση με το έργο της F .

$$E_{\text{προσφ}} = W_F = F \cdot \Delta x = 500 \cdot 10 \rightarrow \boxed{E_{\text{προσφ}} = 5000 \text{ J.}}$$

Γ1)



Στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ δεν αλλάζει τίποτε.

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \rightarrow N - B = 0 \rightarrow \\ N = B = mg = 1000 \text{ N.}$$

$$\text{Επίσης } T = \mu N \rightarrow T = 0,5 \cdot 1000 \rightarrow \\ T = 500 \text{ N.}$$

Στον οριζόντιο άξονα $x'x$:

$$\text{Αν } F' = 2F = 1000 \text{ N τότε}$$

$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a} \rightarrow F' - T = m \cdot a \rightarrow 1000 - 500 = 100 \cdot a \rightarrow a = 500/100 \rightarrow \boxed{a = 5 \text{ m/s}^2}.$$

Γ2) Εφαρμόζω ΘΜΚΕ από τη θέση (Α) μέχρι τη θέση (Γ):

$$K_{\Gamma} - K_A = W_{F'} + W_B + W_N + W_T \rightarrow K_{\Gamma} - 0 = F' \cdot \Delta x + 0 + 0 - T \cdot \Delta x \rightarrow K_{\Gamma} = (F' - T) \cdot \Delta x \rightarrow$$

$$K_{\Gamma} = (1000 - 500) \cdot 10 \rightarrow K_{\Gamma} = 500 \cdot 10 \rightarrow \mathbf{K_{\Gamma} = 5000 \text{ J}}$$

Σχόλιο:

Μη μας μπερδεύει το γεγονός ότι βρίσκουμε το ίδιο αριθμητικό αποτέλεσμα στα ερωτήματα Α και Γ2, γιατί είναι τελείως διαφορετικά.

Στο ερώτημα Α) $E_{\text{προσφ}} = W_F = 5000 \text{ J}$. Ενώ στο Γ2) αν μας ζητούσαν πόση ενέργεια προσφέρει ο μαθητής στο κιβώτιο, αν το μετατοπίσει κατά 10 m, τότε πάλι $E'_{\text{προσφ}} = W_{F'} = F' \cdot \Delta x = 1000 \cdot 10 \rightarrow$

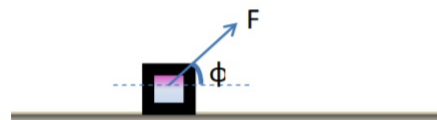
$E'_{\text{προσφ}} = 10000 \text{ J}$ και τα 5000 J μέσω του έργου της τριβής Τ μετατρέπονται σε θερμότητα, οπότε το σώμα στο τέλος της διαδρομής των 10 m « κερδίζει » κινητική ενέργεια 5000 J.

ΠΗΓΗ: <http://vmarousis.blogspot.gr>

Να λυθεί η παρακάτω άσκηση:

-5-

Ένα σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ ηρεμεί στο σημείο Α οριζόντιου επιπέδου με το οποίο παρουσιάζει με το επίπεδο τριβής ολίσθησης $T = 1 \text{ N}$. Στο σώμα ασκείται δύναμη $F = 5 \text{ N}$ που σχηματίζει με το επίπεδο γωνία ϕ με $\eta\mu\phi = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\phi = 0,8$. Όταν το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά (x) και βρίσκεται στο σημείο Β έχει ταχύτητα $u = 6 \text{ m/s}$. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Δ1. Να σχεδιαστούν και να βρεθούν όλα τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα κατά την κίνησή του.

Δ2. Να βρεθεί η μετατόπιση (x) του σώματος.

Δ3. Να βρεθούν τα έργα όλων των δυνάμεων για την προηγούμενη μετατόπιση.

Δ4. Στην θέση Β να βρεθούν ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη F δίνει ενέργεια στο σώμα και το ρυθμό που μετατρέπεται η ενέργεια σε θερμότητα λόγω της τριβής ολίσθησης.