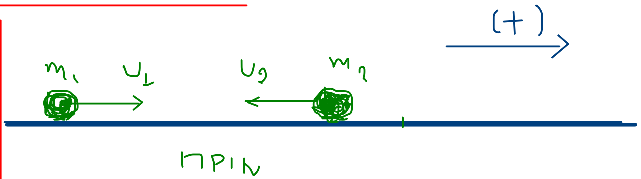
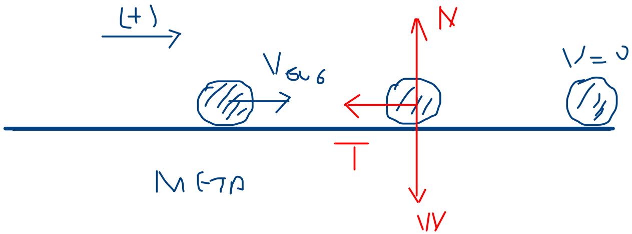
Βασικές Ασκήσεις στην ΟΡΜΗ

1. Δύο σφαίρες με μάζες $m_1 = 6$ kg και $m_2 = 4$ kg κινούνται σε οριζόντιο δάπεδο με αντίθετη φορά και συγκρούονται πλαστικά. Τη στιγμή της σύγκρουσης τα μέτρα των ταχυτήτων των σφαιρών ήταν $u_1 = 20$ m/s και $u_2 = 10$ m/s.
α) Να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
β) Να βρεθεί η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δύο σφαιρών κατά την πλαστική κρούση.
γ) Αν η κρούση διαρκεί 0,1 s, να βρεθεί το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο.
δ) Να βρεθεί το διάστημα για το οποίο κινήθηκε το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.
Θεωρείστε ότι κατά τη διάρκεια της κρούσης η μετατόπιση του συσσωματώματος είναι αμελητέα, ενώ ο συντελεστής τριβή συσσωματώματος – δαπέδου είναι μ = 0,32.
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g = 10$ m/s².



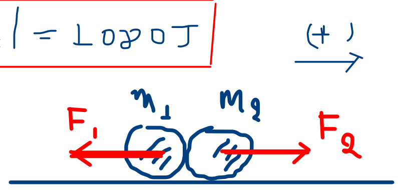


α) $p_1 = m_1 u_1 = 6\cdot 20 = 120\,kg\,m/s$, $p_2 = m_2 u_2 = 4\cdot 10 = 40\,kg\,m/s$ $\Rightarrow$ $V_{συσ}$ προς τα θετικά. Πράγματι από ΑΔΟ: $\vec p_{ολ} = \vec p\,'_{ολ} \Rightarrow$

$$(m_1+m_2)V_{συσ} = m_1 u_1 - m_2 u_2 \Rightarrow V_{συσ} = \frac{80}{10} \Rightarrow \boxed{V_{συσ} = 8\,m/s}$$

β) $$E_{μηχ} = U_{ολ} + K_{ολ} \Rightarrow \Delta E_{μηχ} = \cancel{\Delta U_{ολ}}^{0} + \Delta K_{ολ} = \Delta K_{ολ} = K'_{ολ} - K_{ολ} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{συσ}^2 - \left(\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}10\cdot 64 - \frac{1}{2}6\cdot 400 - \frac{1}{2}4\cdot 100 = 320 - 1200 - 200 = -1080 \Rightarrow \boxed{E_{απωλ} = |\Delta E_{μηχ}| = 1080\,J}$$



γ) $$m_1:\ \Sigma\vec F = \frac{\Delta\vec p}{\Delta t} \Rightarrow F_1 = \frac{p_1' - p_1}{\Delta t} = \frac{m_1 V_{συσ} - m_1 u_1}{\Delta t} =$$

$$= \frac{6\cdot 8 - 6\cdot 20}{0,1} = \frac{48-120}{0,1} = \frac{-72}{0,1} \Rightarrow \boxed{F_1 = -720\,N}$$

Λόγω του 3ου Ν.Ν (αξίωμα δράσης - αντίδρασης): $\vec F_2 = -\vec F_1 \Rightarrow \boxed{F_2 = +720\,N}$

Παρατήρηση: $\Delta p_1 = p_1' - p_1 = \dots -72\, kg\cdot m/s$.

$\Delta p_2 = p_2' - p_2 = m_2 V_{συσ} - m_2 u_2 = 4\cdot 8 - 4(-10) = 32 + 40 \Rightarrow \Delta p_2 = +72\, kg\, m/s$.

Οπότε κι έτσι επιβεβαιώνεται ότι: $F_2 = \frac{\Delta p_2}{\Delta t} = \frac{72}{0,1} \Rightarrow F_2 = +720\, N$

Γενικότερα σε "οποιαδήποτε" κρούση ισχύει:

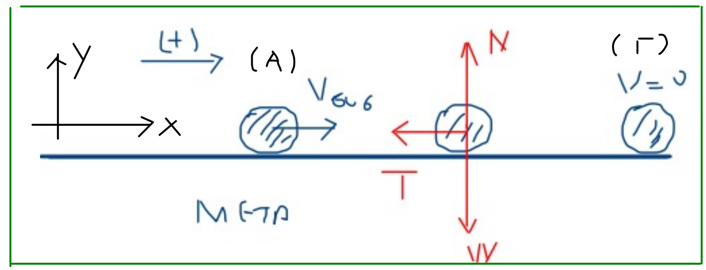
$$\boxed{\vec{\Delta p_1} = -\vec{\Delta p_2}}$$

Πράγματι: από ΑΔΟ: $\vec{p}_{ολ}' = \vec{p}_{ολ} \Rightarrow \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -\vec{p}_2' + \vec{p}_2 \Rightarrow$

$\vec{\Delta p_1} = -(\vec{p}_2' - \vec{p}_2) \Rightarrow \boxed{\vec{\Delta p_1} = -\vec{\Delta p_2}}$

δ) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - w = 0 \Rightarrow N = (m_1 + m_2) g \Rightarrow$

$N = 100\, N$, $T = \mu \cdot N = 0,32 \cdot 100 \Rightarrow T = 32\, N$



ΘΜΚΕ για το συσσωμάτωμα από (Α) → (Γ):

$\Sigma W = \Delta K \Rightarrow W_T = K_{τελ} - K_{αρχ} \Rightarrow$

$-T \cdot \Delta x = 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_{συσ}^2 \Rightarrow 32 \cdot \Delta x = 320 \Rightarrow \boxed{\Delta x = 10\, m}$

Παρατήρηση: Αν ζητούσε το χρόνο μέχρι να σταματήσει το συσσωμάτωμα:

$\Sigma F_x = (m_1 + m_2)\alpha \Rightarrow -T = (m_1 + m_2)\alpha \Rightarrow \alpha = -3,2\, m/s^2 \Rightarrow$ Ε.Ο. επιβρ. κίνηση

$u = v_0 - |\alpha| t \Rightarrow 0 = V_{συσ} - |\alpha| t \Rightarrow t = \frac{8}{3,2} = \frac{80}{32} = \frac{10}{4} \Rightarrow \boxed{t = 2,5\, sec}$

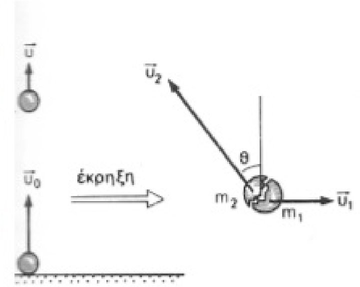
Για επιβεβαίωση: $\Delta x = v_0 t - \frac{1}{2}|\alpha| t^2 = V_{συσ} \cdot t - \frac{1}{2}|\alpha| t^2 = 8 \cdot 2,5 - \frac{1}{2} 3,2 \cdot 2,5^2 = \dots = 10\, m$

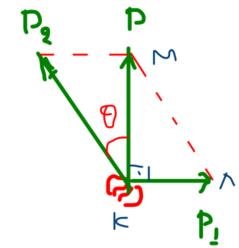
2. Βλήμα μάζας m=4kg ρίχνεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα μέτρου $υ_0 = 20 m/s$. Όταν το βλήμα κατά την άνοδό του βρίσκεται σε ύψος h=15m, εκρήγνυται σε δύο τμήματα που έχουν μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα. Αμέσως μετά την έκρηξη, το τμήμα μάζας m_1 έχει οριζόντια ταχύτητα μέτρου $υ_1 = 10 m/s$. Αν ο λόγος των μαζών των δύο τμημάτων είναι $m_1/m_2=3$, να υπολογιστούν:

α) Το μέτρο και η διεύθυνση της ταχύτητας που έχει το τμήμα μάζας m_2 αμέσως μετά την έκρηξη.

β) Το χρόνο που κάνει το τμήμα m_1 να πέσει στο έδαφος και την οριζόντια απόσταση του από το σημείο της έκρηξης τη στιγμή αυτή.

Δίνεται: $g=10 m/s^2$



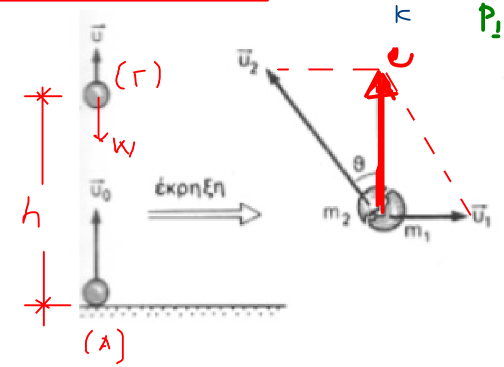


α) Θ.Μ.Κ.Ε από (Α)→(Γ) για τη μάζα m: $ΣW = ΔK \Rightarrow$

$$-w\cdot h = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow -\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{400 - 2\cdot 10\cdot 15} = \sqrt{400-300} \Rightarrow \underline{v = 10 m/s}$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 + m_2 &= 4 \\ \frac{m_1}{m_2} = 3 &\Rightarrow m_1 = 3m_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 4m_2 = 4 \Rightarrow \underline{m_2 = 1kg} \text{ και } \underline{m_1 = 3kg}$$



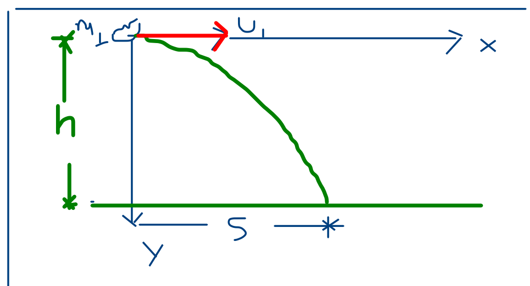
Λόγω της ΑΔΟ: $\vec{P}'_{ολ} = \vec{P}_{ολ} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$. Από το $Κ\hat{Λ}Μ$: $p_2^2 = p^2 + p_1^2 \Rightarrow$

$$p_2 = \sqrt{p^2 + p_1^2} = \sqrt{m^2v^2 + m_1^2v_1^2} = \sqrt{16\cdot 100 + 9\cdot 100} \Rightarrow p_2 = 50 kg\,m/s \Rightarrow m_2 υ_2 = 50 \Rightarrow \boxed{υ_2 = 50 m/s}$$

$$εφθ = \frac{p_1}{p} = \frac{m_1 υ_1}{m υ} = \frac{3\cdot 10}{4\cdot 10} \Rightarrow \boxed{εφθ = 3/4}$$

β) $$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 2h = gt^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{30}{10}} \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{3}\, sec}$$

$$x = υ_1 t \Rightarrow s = υ_1 t = 10\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{s = 10\sqrt{3}\, m}$$



3. Ελαφρός δοκιμαστικός σωλήνας μάζας M=20g, ο οποίος περιέχει λίγες σταγόνες αιθέρα, κλείνεται με φελλό μάζας m=4g. Ο σωλήνας ισορροπεί οριζόντια, δεμένος από το μέσο του στο άκρο νήματος l=0,72m, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο. Όταν θερμάνουμε ελαφρά το σωλήνα, παράγονται ατμοί αιθέρα υπό πίεση και ο φελλός εκτοξεύεται με ταχύτητα υ=30m/s και ο δοκιμαστικός σωλήνας εκτελεί κυκλική κίνηση.

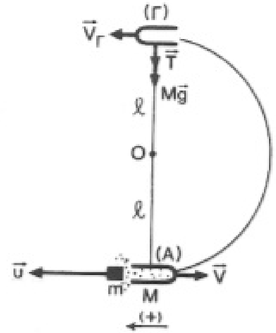
Να υπολογίσετε:

α) Την ταχύτητα V του δοκιμαστικού σωλήνα, αμέσως μετά την εκτόξευση του φελλού.

β) Την κεντρομόλο δύναμη στο δοκιμαστικό σωλήνα στο σημείο Γ.

γ) Θα καταφέρει ο σωλήνας να εκτελέσει μία ολόκληρη περιστροφή;

Δίνεται: $g=10\ m/s^2$



α) Επειδή $\Sigma F_{εξωτ} = 0 \Rightarrow$ ισχύει η Α.Δ.Ο: $\vec{P}'_{ολ} = \vec{P}_{ολ} \Rightarrow mυ - MV = 0 \Rightarrow V = \frac{m}{M}υ = \frac{4}{2\cancel{0}}3\cancel{0} \Rightarrow$

$\boxed{V = 6\,m/s}$

β) ΘΜΚΕ για το δοκιμαστικό σωλήνα από $(A) \rightarrow (Γ)$: $\Sigma W = \Delta K \Rightarrow \cancel{W_T}^{0} + W_w = \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}MV_Γ^2 \Rightarrow$

$-\cancel{M}g2\ell = \frac{1}{2}\cancel{M}V^2 - \frac{1}{2}\cancel{M}V_Γ^2 \Rightarrow V_Γ^2 = V^2 - 4g\ell = 36 - 4\cdot10\cdot0{,}72 = 36 - 28{,}8 \Rightarrow \underline{V_Γ^2 = 7{,}2}$

$F_k = M\cdot\frac{V_Γ^2}{\ell} = 0{,}02\cdot\frac{7{,}2}{0{,}72} \Rightarrow \boxed{F_k = 0{,}2N}$

γ) ΘΜΚΕ από $(A) \rightarrow (Γ)$: ... $V_Γ^2 = V^2 - 4g\ell$ (1)

$Γ: \Sigma F = F_k \Rightarrow T + Mg = M\frac{V_Γ^2}{\ell} \Rightarrow T = M\frac{V_Γ^2}{\ell} - Mg$ (2).

Για να κάνει ανακύκλωση θα πρέπει: $T > 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} M\frac{V_Γ^2}{\ell} - Mg > 0 \Rightarrow V_Γ^2 > g\ell \Rightarrow$

$V_Γ > \sqrt{g\ell} \Rightarrow V_Γ > \sqrt{10\cdot0{,}72} \Rightarrow V_Γ > \sqrt{7{,}2} \Rightarrow V_{Γmin} = \sqrt{7{,}2}\ m/s.$

Άρα για να κάνει ανακύκλωση η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει στο σημείο Γ είναι: $V_Γ = 7{,}2\,m/s$. Άρα θα εκτελέσει ολόκληρη περιστροφή.