ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 20ό

ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

ΘΕΩΡΙΑ

20.1) Τι γνωρίζετε για τη βαρυτική έλξη;

Έστω δύο σώματα με πολύ μικρές διαστάσεις (σημειακές μάζες) που έχουν μάζες m_1 και m_2 και βρίσκονται σε απόσταση r μεταξύ τους. Σύμφωνα με τον **νόμο της παγκόσμιας έλξης**, που διατύπωσε ο Νεύτωνας, οι δύο αυτές σημειακές μάζες έλκονται με δύναμη

που έχει μέτρο $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$.

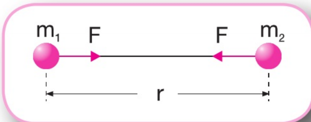
Η ελκτική δύναμη είναι **διατηρητική** και **κεντρική**.

Στον νόμο της παγκόσμιας έλξης το G είναι μία σταθερά, γνωστή ως **σταθερά της παγκόσμιας έλξης**. Οπουδήποτε στο Σύμπαν η τιμή της σταθεράς G είναι: $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$

Ο Cavendish με τη βοήθεια ενός ζυγού στρέψης υπολόγισε τη σταθερά G.

Η σταθερά G είναι ανεξάρτητη από τη μάζα των σωμάτων και από το υλικό που τα περιβάλλει.

Η σχέση $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ δίνει και τις ελκτικές δυνάμεις μεταξύ δύο **ομογενών σφαιρικών μαζών**, οπότε r είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων τους και οι ελκτικές δυνάμεις έχουν σημεία εφαρμογής τα κέντρα των δύο σφαιρών.



Οι βαρυτικές δυνάμεις:

- Έχουν μεταξύ τους σχέση δράσης - αντίδρασης.
- Υπάρχουν ανεξάρτητα από το σχήμα ή το μέγεθος των σωμάτων ή την απόσταση μεταξύ τους.
- Είναι ανεξάρτητες από το υλικό που υπάρχει μεταξύ των σωμάτων.
- Παρότι ελαττώνονται με την απόσταση, ποτέ δε γίνονται ακριβώς μηδέν. Επομένως, κάθε σωματίδιο στο Σύμπαν έλκει όλα τα άλλα σωματίδια, έστω και ανεπαίσθητα, ακόμη και όταν η απόστασή του από αυτά είναι πολύ μεγάλη.

20.2) Τι είναι το βαρυτικό πεδίο;

Η αλληλεπίδραση μεταξύ μαζών είναι δύναμη από απόσταση και επομένως μπορεί να περιγραφεί με την έννοια του πεδίου.

Κάθε μάζα δημιουργεί γύρω της πεδίο, που ονομάζεται **πεδίο βαρύτητας** ή **βαρυτικό πεδίο**. Εάν κάποια άλλη μάζα βρεθεί μέσα σε αυτό το πεδίο, θα δεχτεί δύναμη από αυτό.

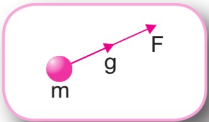
Βαρυτικό πεδίο ονομάζεται εκείνος ο χώρος στον οποίο κάθε μάζα δέχεται δύναμη.

Για την περιγραφή του βαρυτικού πεδίου χρησιμοποιούμε τα μεγέθη **ένταση** και **δυναμικό**.

20.3) Τι γνωρίζετε για την ένταση του βαρυτικού πεδίου;

Έστω ένα βαρυτικό πεδίο.

Ένταση (g) του πεδίου βαρύτητας σε ένα σημείο του ονομάζεται το σταθερό πηλίκο της δύναμης (F) που θα δεχτεί μία μάζα (m), εάν βρεθεί σε αυτό το σημείο, προς τη μάζα αυτή. Δηλαδή: $g = \frac{F}{m}$



Η ένταση g έχει την ίδια κατεύθυνση με τη δύναμη F.

Στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων η μονάδα μέτρησης της έντασης είναι το $1\,N/kg$ ή το $1\,m/s^2$.

Όπως προκύπτει από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η επιτάχυνση που θα αποκτήσει ένα σώμα μάζας m, εάν αφεθεί ελεύθερο στο πεδίο βαρύτητας, είναι $\alpha = \frac{F}{m}$. Από τον ορισμό της έντασης προκύπτει: $g = \alpha$

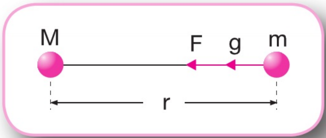
Επομένως:

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας σε ένα σημείο του ταυτίζεται με την επιτάχυνση που θα αποκτήσει ένα σώμα, εάν αφεθεί ελεύθερο σε εκείνο το σημείο.

20.4) Να υπολογίσετε την ένταση σε ένα σημείο ενός βαρυτικού πεδίου που δημιουργείται από σημειακή μάζα.

Έστω ένα βαρυτικό πεδίο που έχει δημιουργηθεί από σημειακή μάζα M. Εάν σε ένα σημείο A του πεδίου που απέχει απόσταση r από τη μάζα M τοποθετήσουμε μία σημειακή μάζα m, αυτή θα δεχτεί δύναμη το μέτρο της οποίας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \quad (1)$$



Γνωρίζουμε ότι η ένταση του πεδίου στο σημείο A δίνεται από τη σχέση: $g = \frac{F}{m} \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $\boxed{g = G\frac{M}{r^2}}$

20.5) Πώς ορίζεται το δυναμικό στο πεδίο βαρύτητας;

Επειδή το βαρυτικό πεδίο είναι διατηρητικό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την περιγραφή του το δυναμικό.

Δυναμικό (V) του πεδίου βαρύτητας σε ένα σημείο του A ονομάζεται το σταθερό πηλίκο του έργου της δύναμης του πεδίου, όταν μεταφέρεται μάζα m από το σημείο A στο άπειρο, προς τη μάζα αυτή. Δηλαδή: $V_A = \frac{W_{A\to\infty}}{m}$

Στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων η μονάδα μέτρησης του δυναμικού είναι το $1\,J/kg$.

Ειδικά για το πεδίο που δημιουργείται από μία σημειακή μάζα M, το δυναμικό σε ένα σημείο του A που απέχει απόσταση r από τη μάζα M δίνεται επίσης από τη σχέση: $\boxed{V_A = -G\frac{M}{r}}$

20.6) Τι είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων του πεδίου βαρύτητας;

Έστω δύο σημεία A και B ενός βαρυτικού πεδίου.

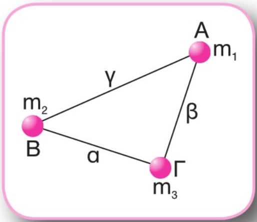
Διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων Α και Β του πεδίου βαρύτητας ονομάζεται το πηλίκο του έργου της δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνηση μίας μάζας m από το σημείο Α έως το σημείο Β προς τη μάζα αυτή. Δηλαδή: $V_A - V_B = \frac{W_{A \to B}}{m}$

20.7) Τι γνωρίζετε για τη δυναμική ενέργεια ενός συστήματος σημειακών μαζών;

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος δύο σημειακών μαζών m_1 και m_2 που απέχουν μεταξύ τους απόσταση r είναι ίση με το έργο που απαιτείται για να μεταφερθούν οι δύο μάζες από πολύ μακριά και να τοποθετηθούν στις θέσεις τους. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος δίνεται από τη σχέση $U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$.

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι, για να κάνουμε άπειρη την απόσταση δύο μαζών που αρχικά βρίσκονται σε απόσταση r μεταξύ τους, πρέπει να προσφέρουμε ενέργεια στο σύστημα.

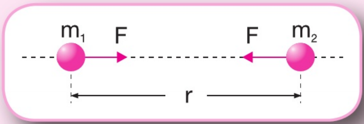
Αποδεικνύεται ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος τριών σημειακών μαζών m_1, m_2 και m_3 που βρίσκονται στις θέσεις Α, Β και Γ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα, υπολογίζεται από τη σχέση: $U = -G\frac{m_1 m_2}{\gamma} - G\frac{m_1 m_3}{\beta} - G\frac{m_2 m_3}{\alpha}$



Η δυνατότητα να προσθέτουμε τους όρους δυναμικής ενέργειας για όλα τα ενδεχόμενα ζεύγη σωμάτων προκύπτει από το πειραματικό γεγονός ότι οι βαρυτικές δυνάμεις υπακούουν στην αρχή της υπέρθεσης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

➢ Δυνάμεις παγκόσμιας έλξης



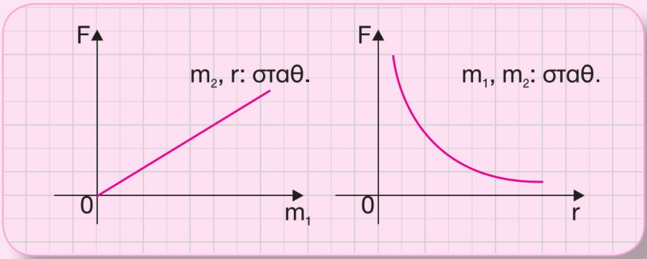
Δύο σημειακές μάζες m_1 και m_2 που βρίσκονται σε απόσταση r μεταξύ τους αλληλεπιδρούν με βαρυτικές δυνάμεις το μέτρο των οποίων δίνεται από τη σχέση: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

Οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ δύο μαζών είναι πάντοτε ελκτικές.

Η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G είναι ανεξάρτητη των μαζών και του υλικού που τις περιβάλλει και οπουδήποτε στο Σύμπαν έχει σταθερή τιμή $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα για τη δράση - αντίδραση, οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ των σημειακών μαζών έχουν αντίθετη φορά και ίσα μέτρα.

Όπως προκύπτει από τη σχέση $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, το μέτρο της βαρυτικής δύναμης μεταξύ δύο μαζών είναι ανάλογο των μαζών m_1 και m_2 και αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης r μεταξύ τους. Τα συμπεράσματα αυτά αποτυπώνονται και στα παρακάτω διαγράμματα $F = f(m_1)$ και $F = f(r)$.



➢ Υπολογισμός απόστασης και μάζας

Από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ μπορούμε να υπολογίσουμε:

- την απόσταση r μεταξύ των δύο μαζών:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad ή \quad r^2 = G\frac{m_1 m_2}{F} \quad ή \quad r = \sqrt{G\frac{m_1 m_2}{F}}$$

- την τιμή της μίας μάζας, π.χ. της m_1:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad ή \quad G m_1 m_2 = F r^2 \quad ή \quad m_1 = \frac{F r^2}{G m_2}$$

- **Μεταβολή της δύναμης παγκόσμιας έλξης**

  Όταν μεταβάλλονται είτε η απόσταση r μεταξύ των δύο σημειακών μαζών είτε οι τιμές των μαζών m_1 και m_2 είτε και τα δύο ταυτόχρονα, μεταβάλλεται το μέτρο της ελκτικής δύναμης μεταξύ τους. Το μέτρο F' της ελκτικής δύναμης στην τελική κατάσταση μπορούμε να το εκφράσουμε σε σχέση με το μέτρο F της ελκτικής δύναμης στην αρχική κατάσταση όπου οι δύο σημειακές μάζες απέχουν απόσταση r, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

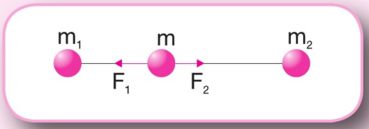
Παράδειγμα

Έστω ότι διπλασιάζεται η τιμή της μάζας m_1 και ταυτόχρονα τριπλασιάζεται η απόσταση r μεταξύ των δύο μαζών. Δηλαδή, $m_1' = 2m_1$ και $r' = 3r$. Εφαρμόζοντας τον νόμο της παγκόσμιας έλξης, έχουμε:

$$F' = G\frac{m_1' m_2}{r'^2} \quad ή \quad F' = G\frac{2m_1 m_2}{9r^2} \quad ή \quad F' = \frac{2}{9}G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad ή \quad F' = \frac{2}{9}F$$

- **Ισορροπία μάζας**

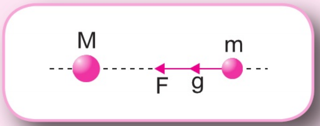
  Για να ισορροπεί μία σημειακή μάζα m που βρίσκεται σε χώρο όπου υπάρχουν δύο άλλες σημειακές μάζες m_1 και m_2, πρέπει η συνισταμένη ελκτική δύναμη που δέχεται από τις δύο μάζες να είναι μηδέν. Επομένως, η μάζα m πρέπει να τοποθετηθεί μεταξύ των δύο μαζών m_1 και m_2 και επάνω στην ευθεία που τις ενώνει, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- **Ένταση βαρυτικού πεδίου**

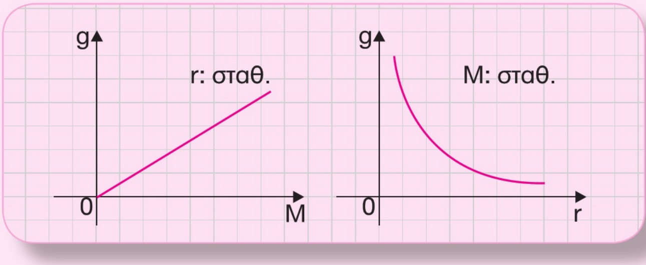
  Η ένταση g ενός βαρυτικού πεδίου σε ένα σημείο δίνεται από τη σχέση $g = \frac{F}{m}$, όπου F είναι η δύναμη που θα δεχτεί μία μάζα m, εάν βρεθεί σε αυτό το σημείο. Η σχέση αυτή είναι γενική και ισχύει για οποιοδήποτε βαρυτικό πεδίο. Ειδικά για το βαρυτικό πεδίο που δημιουργείται από μία σημειακή μάζα M ισχύει επίσης η σχέση $g = G\frac{M}{r^2}$.

  Η ένταση σε ένα σημείο του βαρυτικού πεδίου είναι πάντα ομόρροπη της δύναμης, υπάρχει ανεξάρτητα από το εάν τοποθετηθεί σε αυτό το σημείο δοκιμαστική σημειακή μάζα και είναι ανεξάρτητη από την τιμή της μάζας αυτής.



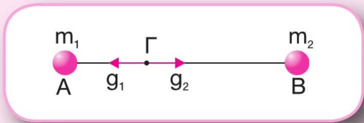
- **Σχέση έντασης-μάζας και έντασης-απόστασης στο βαρυτικό πεδίο**

  Όπως προκύπτει από τη σχέση $g = G\frac{M}{r^2}$, το μέτρο της έντασης του βαρυτικού πεδίου είναι ανάλογο της μάζας M που δημιουργεί το βαρυτικό πεδίο και αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης r από αυτό. Τα συμπεράσματα αυτά αποτυπώνονται και στα παρακάτω διαγράμματα $g = f(M)$ και $g = f(r)$.



- **Σημεία βαρυτικού πεδίου με μηδενική ένταση**

Έστω ένα βαρυτικό πεδίο που δημιουργείται από δύο σημειακές μάζες m_1 και m_2 που βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Η συνισταμένη ένταση του βαρυτικού πεδίου μηδενίζεται σε ένα σημείο Γ του πεδίου το οποίο βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



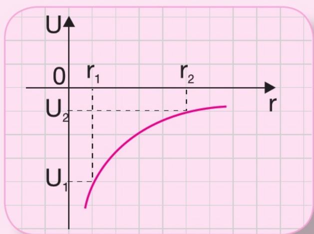
- **Κίνηση μάζας μέσα σε βαρυτικό πεδίο**

Έστω ότι σε ένα βαρυτικό πεδίο που έχει δημιουργηθεί από μία σημειακή μάζα M αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί ένα σωματίδιο μάζας m. Η μοναδική δύναμη που δέχεται το σωματίδιο είναι η δύναμη από το βαρυτικό πεδίο.

- Το σωματίδιο θα αρχίσει να κινείται με επιτάχυνση το μέτρο της οποίας δίνεται από τη σχέση: $\alpha = \frac{F}{m}$ ή $\alpha = G\frac{M}{r^2}$
- Η κίνηση του σωματιδίου είναι επιταχυνόμενη.
- Για την κίνηση του σωματιδίου **δεν ισχύουν** οι σχέσεις $\upsilon = \alpha t$ και $x = \frac{1}{2}\alpha t^2$, επειδή η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή.

- **Βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος δύο σημειακών μαζών**

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος δύο σημειακών μαζών m_1 και m_2 που βρίσκονται σε απόσταση r μεταξύ τους δίνεται από τη σχέση $U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$. Όπως προκύπτει από αυτή τη σχέση, η δυναμική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται με την απόσταση (αυξάνεται από μεγάλες αρνητικές τιμές προς το μηδέν). Τα συμπεράσματα αυτά αποτυπώνονται στο διάγραμμα $U = f(r)$.

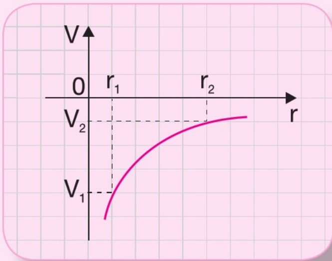


Εάν η μία μάζα είναι πολύ μεγάλη και δεν κινείται, τότε θεωρούμε ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι η δυναμική ενέργεια της άλλης μάζας.

- **Δυναμικό σε ένα σημείο του βαρυτικού πεδίου**

Έστω ένα βαρυτικό πεδίο και μία σημειακή μάζα m που βρίσκεται στο σημείο Α του πεδίου.

Το δυναμικό στο σημείο Α δίνεται από τη σχέση $V_A = \frac{W_{A\to\infty}}{m}$, όπου $W_{A\to\infty}$ είναι το έργο της δύναμης του πεδίου προκειμένου η μάζα m να μεταφερθεί από το σημείο Α στο άπειρο. Η σχέση αυτή είναι γενική και ισχύει για οποιοδήποτε είδος βαρυτικού πεδίου.



Ειδικά για το βαρυτικό πεδίο που δημιουργείται από μία σημειακή μάζα Μ ισχύει η σχέση $V_A = -G\frac{M}{r}$, όπου r η απόσταση του σημείου Α από τη μάζα Μ.

Το δυναμικό σε ένα σημείο του βαρυτικού πεδίου ορίζεται **ανεξάρτητα** από το εάν θα τοποθετήσουμε ή όχι σε αυτό το σημείο δοκιμαστική μάζα m.

Το δυναμικό είναι **μονόμετρο μέγεθος** και επομένως για τον υπολογισμό του αρκεί να προσδιορίσουμε μόνο την αλγεβρική του τιμή.

- **Δυναμικό σε ένα σημείο βαρυτικού πεδίου που δημιουργείται από πολλές μάζες**

Έστω ένα πεδίο που οφείλεται σε δύο ή περισσότερες σημειακές μάζες. Για να βρούμε το δυναμικό σε ένα σημείο Α του πεδίου, υπολογίζουμε το δυναμικό που προκαλεί στο σημείο Α κάθε σημειακή μάζα και στη συνέχεια προσθέτουμε αλγεβρικά τα δυναμικά αυτά. Δηλαδή:

$V_A = V_{A_1} + V_{A_2} + \ldots + V_{A_\nu}$

- **Διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων ενός βαρυτικού πεδίου**

Έστω σημειακή μάζα Μ που δημιουργεί βαρυτικό πεδίο και δοκιμαστική σημειακή μάζα m που μετακινείται από το σημείο Α στο σημείο Β του πεδίου.

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α και Β δίνεται από τη σχέση $V_{AB} = \frac{W_{A\to B}}{m}$, που είναι γενική και ισχύει για όλα τα είδη των βαρυτικών πεδίων.

Ειδικά για το βαρυτικό πεδίο που δημιουργείται από μία μάζα Μ ισχύει η σχέση $V_{AB} = V_A - V_B = -G\frac{M}{r_A} - \left(-G\frac{M}{r_B}\right) = -GM\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$, όπου r_A και r_B είναι οι αποστάσεις των σημείων Α και Β αντίστοιχα από τη μάζα Μ.

- **Έργο δύναμης κατά τη μετακίνηση μάζας σε βαρυτικό πεδίο**

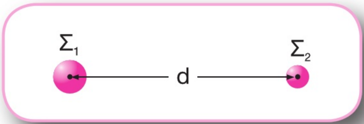
Έστω μία σημειακή μάζα m που μετακινείται από το σημείο Α στο σημείο Β ενός βαρυτικού πεδίου, χωρίς να μεταβληθεί η κινητική της ενέργεια. Επειδή στις δύο θέσεις Α και Β η μάζα είναι ακίνητη, πρέπει στη μάζα, εκτός από τη δύναμη F_β του βαρυτικού πεδίου, να ασκείται και μία εξωτερική δύναμη $F_{\varepsilon\xi}$. Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$K_B - K_A = W_{\Sigma F} \quad \text{ή} \quad 0 = W_{F_\beta}^{A\to B} + W_{F_{\varepsilon\xi}}^{A\to B} \quad \text{ή} \quad W_{F_{\varepsilon\xi}}^{A\to B} = -W_{F_\beta}^{A\to B} \quad \text{ή} \quad W_{F_{\varepsilon\xi}}^{A\to B} = -m\left(V_A - V_B\right) \quad \text{ή}$$

$$W_{F_{\varepsilon\xi}}^{A\to B} = m\left(V_B - V_A\right)$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

20.8) Δύο ομογενείς σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 64kg$ και $m_2 = 16kg$ αντίστοιχα συγκρατούνται σε τέτοια θέση ώστε τα κέντρα τους να απέχουν απόσταση $d = 4m$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η τιμή της σταθεράς της παγκόσμιας έλξης είναι $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.



α) Να βρείτε το μέτρο της βαρυτικής έλξης που δέχεται κάθε σφαίρα και να σχεδιάσετε τα αντίστοιχα διανύσματα.

β) Να προσδιορίσετε το σημείο στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί μία τρίτη ομογενής σφαίρα Σ_3 μάζας $m_3 = 4kg$ ανάμεσα στις άλλες δύο με το κέντρο της στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα κέντρα των δύο σφαιρών, ώστε να ισορροπεί.

γ) Να υπολογίσετε τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται η σφαίρα Σ_3, όταν τοποθετηθεί σε τέτοια θέση ώστε το κέντρο της να βρίσκεται στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν τα κέντρα των σφαιρών Σ_1 και Σ_2.

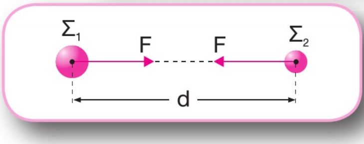
Λύση

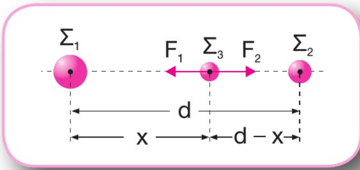
α) Οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ των δύο σφαιρών είναι ελκτικές, έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσο μέτρο, που υπολογίζεται από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης:

Οι βαρυτικές δυνάμεις έχουν μεταξύ τους σχέση δράσης - αντίδρασης.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2} \quad \text{ή} \quad F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{64 \cdot 16}{4^2} N \quad \text{ή}$$

$$F = 4{,}26 \cdot 10^{-9} N$$





β) Έστω ότι η σφαίρα Σ_3 ισορροπεί σε απόσταση x από τη σφαίρα Σ_1, οπότε η απόστασή της από τη σφαίρα Σ_2 είναι $d-x$. Εφόσον η σφαίρα Σ_3 ισορροπεί, οι δυνάμεις F_1 και F_2 που δέχεται από τις σφαίρες Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα είναι αντίθετες.

$$\Sigma\vec{F}=0 \quad ή \quad F_1=F_2 \quad ή \quad G\frac{m_1m_3}{x^2}=G\frac{m_2m_3}{(d-x)^2} \quad ή$$

$$\frac{m_1}{x^2}=\frac{m_2}{(d-x)^2} \quad ή \quad \frac{64}{x^2}=\frac{16}{(4-x)^2} \quad ή \quad \frac{x^2}{(4-x)^2}=\frac{64}{16} \quad ή$$

$$\frac{x}{4-x}=\pm\sqrt{4} \quad ή \quad \frac{x}{4-x}=\pm 2$$

Οι βαρυτικές δυνάμεις είναι πάντοτε ελκτικές.

Εάν $\frac{x}{4-x}=-2$ ή $x=-8+2x$, προκύπτει $x=8m$.

Αυτό σημαίνει ότι η σφαίρα Σ_3 πρέπει να τοποθετηθεί δεξιά από τη σφαίρα Σ_2. Τότε όμως, επειδή οι βαρυτικές δυνάμεις είναι πάντοτε ελκτικές, οι δύο δυνάμεις που θα δέχεται από τις άλλες σφαίρες θα έχουν ίσα μέτρα και ίδια κατεύθυνση και επομένως η σφαίρα Σ_3 δε θα ισορροπεί.

Στο βαρυτικό πεδίο που έχει δημιουργηθεί από δύο ομογενείς σφαίρες, το σημείο στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί μία τρίτη σφαίρα ώστε να ισορροπεί βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα των δύο σφαιρών.

Εάν $\frac{x}{4-x}=+2$ ή $x=8-2x$, προκύπτει $x=\frac{8}{3}m$.

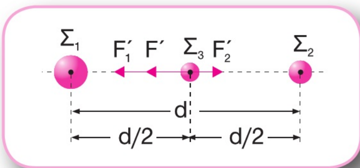
γ) Η δύναμη F_1' που δέχεται η σφαίρα Σ_3 από τη σφαίρα Σ_1 έχει μέτρο:

$$F_1'=G\frac{m_1m_3}{(d/2)^2} \quad ή \quad F_1'=6{,}67\cdot10^{-11}\frac{64\cdot4}{2^2}\mathrm{N} \quad ή \quad F_1'=4{,}26\cdot10^{-9}\mathrm{N}$$

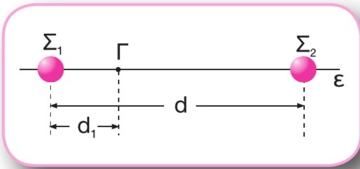
Η δύναμη F_2' που δέχεται η σφαίρα Σ_3 από τη σφαίρα Σ_2 έχει μέτρο:

$$F_2'=G\frac{m_2m_3}{(d/2)^2} \quad ή \quad F_2'=6{,}67\cdot10^{-11}\frac{16\cdot4}{2^2}\mathrm{N} \quad ή \quad F_2'=1{,}06\cdot10^{-9}\mathrm{N}$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων F_1' και F_2' έχει μέτρο $F'=F_1'-F_2'=3{,}2\cdot10^{-9}\,\mathrm{N}$ και κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση της δύναμης F_1', όπως φαίνεται στο σχήμα.



20.9) Δύο μικρές σφαίρες $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 81m$ βρίσκονται ακίνητες στα σημεία Α και Β αντίστοιχα μίας ευθείας ε και απέχουν απόσταση d μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνεται η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G.



α) Να υπολογίσετε τη συνισταμένη ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργούν οι δύο σφαίρες σε ένα σημείο Γ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ που απέχει απόσταση $d_1 = \frac{d}{5}$ από το σημείο Α και να σχεδιάσετε το διάνυσμά της.

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Δ της ευθείας ε στο οποίο η συνισταμένη ένταση του βαρυτικού πεδίου είναι μηδέν.

γ) Να υπολογίσετε το συνολικό δυναμικό στο σημείο Δ.

Λύση

α) Η ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί η σφαίρα $Σ_1$ στο σημείο Γ είναι:

$$g_1 = G\frac{m_1}{d_1^2} \quad ή \quad g_1 = G\frac{m_1}{\left(\frac{d}{5}\right)^2} \quad ή \quad g_1 = 25G\frac{m}{d^2}$$

Σε κάθε σημείο ενός βαρυτικού πεδίου υπάρχουν τόσες εντάσεις όσα είναι τα σώματα που βρίσκονται στο βαρυτικό πεδίο. Η συνισταμένη ένταση σε ένα σημείο είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα όλων των εντάσεων στο σημείο αυτό.

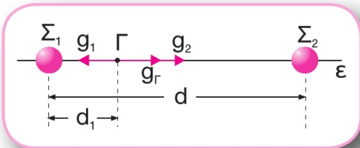
Η ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί η σφαίρα $Σ_2$ στο σημείο Γ είναι:

$$g_2 = G\frac{m_2}{d_2^2} \quad ή \quad g_2 = G\frac{81m}{\left(\frac{4}{5}d\right)^2} \quad ή \quad g_2 = 2.025G\frac{m}{16d^2}$$

Η συνισταμένη ένταση στο σημείο Γ είναι:

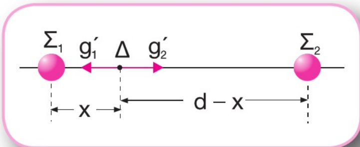
$$g_Γ = g_2 - g_1 \quad ή \quad g_Γ = 2.025G\frac{m}{16d^2} - 25G\frac{m}{d^2} \quad ή$$

$$g_Γ = 1.625G\frac{m}{16d^2}$$



Στο σχήμα φαίνεται η κατεύθυνση της συνισταμένης έντασης του βαρυτικού πεδίου στο σημείο Γ.

β) Έστω ότι το σημείο Δ απέχει απόσταση x από το σημείο Α και απόσταση $d - x$ από το σημείο Β. Επομένως, έχουμε:



$$\vec{g}_Δ = 0 \quad ή \quad g_2' - g_1' = 0 \quad ή \quad G\frac{m_2}{(d-x)^2} = G\frac{m_1}{x^2} \quad ή$$

$$G\frac{81m}{(d-x)^2}=G\frac{m}{x^2} \quad ή \quad \frac{81}{(d-x)^2}=\frac{1}{x^2} \quad ή \quad \frac{9}{d-x}=\pm\frac{1}{x}$$

Επομένως: $9x=d-x$ ή $x=\frac{d}{10}$ και $9x=-d+x$ ή $8x=-d$ ή $x=-\frac{d}{8}$ (απορρίπτεται, επειδή το σημείο Δ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ)

Στο βαρυτικό πεδίο που έχει δημιουργηθεί από δύο ομογενείς σφαίρες, το σημείο στο οποίο η συνισταμένη ένταση είναι μηδέν βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα των δύο σφαιρών.

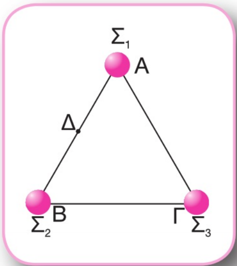
γ) Το συνολικό δυναμικό στο σημείο Δ είναι ίσο με το άθροισμα των δυναμικών των πεδίων που δημιουργούν οι δύο σφαίρες. Επομένως:

$$V_\Delta=V_1+V_2 \quad ή \quad V_\Delta=-G\frac{m_1}{x}-G\frac{m_2}{d-x} \quad ή$$

$$V_\Delta=-10G\frac{m}{d}-10G\frac{81m}{9d} \quad ή \quad V_\Delta=-100G\frac{m}{d}$$

Το δυναμικό σε ένα σημείο βαρυτικού πεδίου είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυναμικών που οφείλονται σε όλα τα σώματα που δημιουργούν το πεδίο.

20.10) Τρεις μικρές σφαίρες $Σ_1$, $Σ_2$ και $Σ_3$ με μάζες $m_1=m_2=m_3=m$ βρίσκονται ακίνητες στις κορυφές Α, Β και Γ αντίστοιχα ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνεται: $\sqrt{3}=1,73$.



α) Να υπολογίσετε το συνολικό δυναμικό στο μέσο Δ της πλευράς ΑΒ.

β) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης του βαρυτικού πεδίου κατά τη μετακίνηση μίας σφαίρας $Σ_4$ μάζας $m_4=m$ από το σημείο Δ μέχρι το άπειρο.

γ) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ζ της πλευράς ΒΓ στο οποίο ισχύει η σχέση $V_{Z_2}=5V_{Z_3}$, όπου V_{Z_2} και V_{Z_3} είναι τα δυναμικά που οφείλονται στις σφαίρες $Σ_2$ και $Σ_3$ αντίστοιχα.

Λύση

α) Το συνολικό δυναμικό στο σημείο Δ είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα των δυναμικών των πεδίων που δημιουργούν οι τρεις σφαίρες. Γνωρίζοντας ότι $ΑΔ=ΒΔ=\frac{α}{2}$ και

$$ΔΓ=\sqrt{α^2-\left(\frac{α}{2}\right)^2}=\frac{α\sqrt{3}}{2}, \text{ έχουμε:}$$

$$V_\Delta=V_1+V_2+V_3 \quad ή \quad V_\Delta=-G\frac{m_1}{ΑΔ}-G\frac{m_2}{ΒΔ}-G\frac{m_3}{ΓΔ} \quad ή \quad V_\Delta=-G\frac{2m}{α}-G\frac{2m}{α}-G\frac{2m}{α\sqrt{3}} \quad ή$$

$$V_\Delta\simeq-5,15\frac{Gm}{α}$$

β) Το έργο της δύναμης του βαρυτικού πεδίου κατά τη μετακίνηση της σφαίρας Σ_4 από το σημείο Δ μέχρι το άπειρο υπολογίζεται από τη σχέση:

$W_F^{\Delta\to\infty} = m_4\left(V_\Delta - V_\infty\right)$ ή $W_F^{\Delta\to\infty} = m_4 V_\Delta$ ή

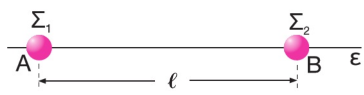
$W_F^{\Delta\to\infty} \simeq -5{,}15\dfrac{Gm^2}{\alpha}$

Το έργο της βαρυτικής δύναμης κατά τη μετακίνηση μίας μάζας μεταξύ δύο σημείων του πεδίου δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που θα ακολουθήσει η μάζα, αλλά από την αρχική και την τελική της θέση.

γ) Έστω ότι το σημείο Ζ απέχει απόσταση x από την κορυφή Β και απόσταση $\alpha - x$ από την κορυφή Γ.

$V_{Z_2} = 5V_{Z_3}$ ή $-G\dfrac{m_2}{x} = -5G\dfrac{m_2}{\alpha - x}$ ή $\dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{\alpha - x}$ ή $\alpha - x = 5x$ ή $x = \dfrac{\alpha}{6}$

20.11) Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και $m_2 = 4m_1$ συγκρατούνται ακίνητες στα σημεία Α και Β αντίστοιχα μίας ευθείας ε και απέχουν απόσταση ℓ μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αφήνουμε τις σφαίρες ελεύθερες να κινηθούν. Η μοναδική δύναμη που δέχονται οι δύο σφαίρες είναι η βαρυτική δύναμη που ασκεί η μία στην άλλη. Δίνεται η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G.



α) Να βρείτε τη σχέση των μέτρων των ταχυτήτων των δύο σφαιρών κάθε χρονική στιγμή.

β) Να υπολογίσετε τις ταχύτητες υ_1 και υ_2 των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα τη χρονική στιγμή κατά την οποία η μεταξύ τους απόσταση είναι $\ell' = \dfrac{\ell}{4}$.

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο $\dfrac{F_1}{F_2}$ της βαρυτικής δύναμης που ασκεί η μία σφαίρα στην άλλη στην αρχική θέση και στη θέση όπου η απόσταση μεταξύ τους είναι ℓ'.

Λύση

α) Επειδή οι σφαίρες δε δέχονται άλλες δυνάμεις εκτός από τη μεταξύ τους ελκτική δύναμη, το σύστημα είναι απομονωμένο και η ορμή του διατηρείται. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σφαιρών, έχουμε:

Σε ένα σύστημα που είναι μονωμένο ισχύει κάθε χρονική στιγμή η αρχή διατήρησης της ορμής του συστήματος.

$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $0 = m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2$ ή $m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2$ ή $m_1\upsilon_1 = 4m_1\upsilon_2$ ή $\upsilon_1 = 4\upsilon_2$

β) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα των δύο σφαιρών μεταξύ της αρχικής τους θέσης και της θέσης όπου η μεταξύ τους απόσταση είναι $\ell' = \dfrac{\ell}{4}$:

> Σε ένα σύστημα όπου ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις ή δυνάμεις που δεν παράγουν έργο ισχύει κάθε χρονική στιγμή η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας του συστήματος.

$$U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ} \quad ή$$

$$-G\frac{m_1 m_2}{\ell} = -G\frac{m_1 m_2}{\ell'} + \frac{1}{2}m_1 υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2 υ_2^2 \quad ή$$

$$-G\frac{4m_1^2}{\ell} = -G\frac{4m_1^2}{\ell/4} + \frac{1}{2}m_1 \cdot 16υ_2^2 + \frac{1}{2}\cdot 4m_1 υ_2^2 \quad ή \quad 12G\frac{m_1^2}{\ell} = 10m_1 υ_2^2 \quad ή$$

$$υ_2^2 = \frac{6Gm_1}{5\ell} \quad ή \quad υ_2 = \sqrt{\frac{6Gm_1}{5\ell}}$$

Επομένως: $υ_1 = 4\sqrt{\dfrac{6Gm_1}{5\ell}}$

γ) Όταν η απόσταση μεταξύ των δύο σφαιρών είναι ℓ, έχουμε:

$$F_1 = G\frac{m_1 m_2}{\ell^2} \quad ή \quad F_1 = 4G\frac{m_1^2}{\ell^2}$$

Όταν η απόσταση μεταξύ των δύο σφαιρών είναι $\ell' = \dfrac{\ell}{4}$, έχουμε:

$$F_2 = G\frac{m_1 m_2}{(\ell/4)^2} \quad ή \quad F_2 = 64G\frac{m_1^2}{\ell^2}$$

Επομένως: $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{4G\frac{m_1^2}{\ell^2}}{64G\frac{m_1^2}{\ell^2}} \quad ή \quad \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{1}{16}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

20.12) Να διατυπώσετε τον νόμο της παγκόσμιας έλξης.

20.13) Τι είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης και ποια είναι η τιμή της;

Θεωρία και Μεθοδολογία

Εισαγωγή/Προαπαιτούμενες γνώσεις

(κάθετη δύναμη)

Πίεση p: $$p = \frac{F}{A}$$

(εμβαδόν επιφάνειας)

Μονάδα μέτρησης πίεσης στο S.I. είναι το ***1*** $\boldsymbol{\frac{N}{m^2}}$, που ονομάζεται και ***Pascal (Pa).*** Συνήθως χρησιμοποιείται και η ***1 atm*** ως μονάδα μέτρησης πίεσης.

(1 atm=1,013·10^5 Pa≈10^5 Pa)

Όγκος V: $$V = εμβαδόν\ βάσης\ \cdot ύψος$$

Ο προηγούμενος τύπος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του όγκου στερεών σχημάτων όπως κύλινδροι, κύβοι και ορθογώνια παραλληλεπίπεδα.

Μονάδα μέτρησης όγκου στο S.I. είναι το ***1 m^3***. Συχνά χρησιμοποιείται και το ***1 L.***

(1 L=10^{-3} m^3)

Θερμοκρασία Τ: Στη Φυσική χρησιμοποιείται ***η κλίμακα Κέλβιν*** ως βασική κλίμακα μέτρησης της θερμοκρασίας και η μετατροπή από °C σε K γίνεται ως εξής:

$$T = 273 + \theta$$

Στην κλίμακα Κέλβιν ***δεν υπάρχουν αρνητικές τιμές*** και η θερμοκρασία *T=0 K* δηλαδή *ϑ=-273 °C* λέγεται ***απόλυτο μηδέν.***

Υπολογισμός n (αριθμό moles) ενός αερίου:

- $n = \frac{m}{M_r}$ (m η μάζα του αερίου και M_r η σχετική μοριακή μάζα)

- $n = \frac{N}{N_A}$ (N ο αριθμός μορίων και N_A ο αριθμός Avogadro)

- $n = \frac{V}{V_m}$ (V ο όγκος του αερίου και V_m ο γραμμομοριακός όγκος)

Σε πρότυπες συνθήκες S.T.P. ο γραμμομοριακός όγκος V_m ισούται με ***22,4 L*** *και είναι ο όγκος που καταλαμβάνει 1 mol αερίου σε πίεση 1 atm και θερμοκρασία 0°C (273 K).*

Νόμοι αερίων

1. **Νόμος του Boyle (Ισόθερμη μεταβολή):** Η ***πίεση*** ορισμένης ποσότητας αερίου, του οποίου η ***θερμοκρασία παραμένει σταθερή***, είναι ***αντιστρόφως ανάλογη με τον όγκο*** του αερίου.

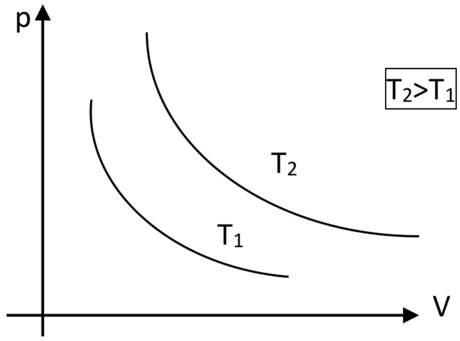
Δηλαδή ισχύει:

$$pV = σταθερό$$

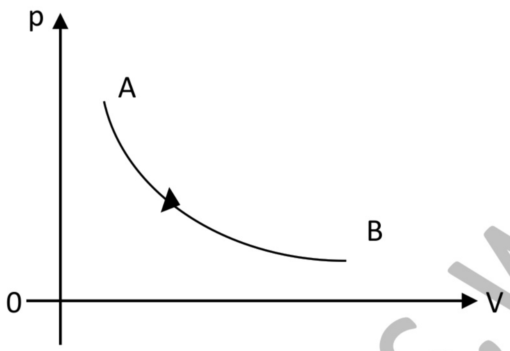
Εάν ορισμένη ποσότητα αερίου μεταβαίνει ισόθερμα από μια κατάσταση Α(p_A,V_A,T_A) σε μια κατάσταση Β(p_B,V_B,T_B), δηλαδή ισχύει T_A=T_B, τότε ισχύει:

$$\boldsymbol{p_A V_A = p_B V_B}$$

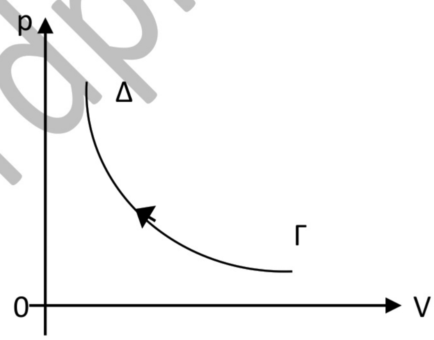
<u>Διάγραμμα P-V ισόθερμης μεταβολής:</u>



*Μια ισόθερμη μεταβολή μπορεί να είναι είτε **εκτόνωση**, είτε **συμπίεση**. Στην ισόθερμη εκτόνωση συμβαίνει αύξηση του όγκου του αερίου (άρα και μείωση της πίεσης), ενώ στην ισόθερμη συμπίεση συμβαίνει μείωση του όγκου του αερίου (άρα και αύξηση της πίεσης).*

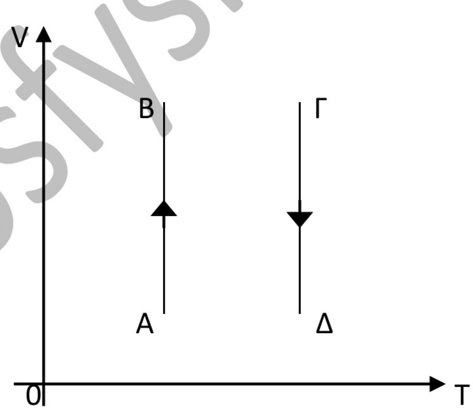


<u>Ισόθερμη εκτόνωση Α →Β</u>



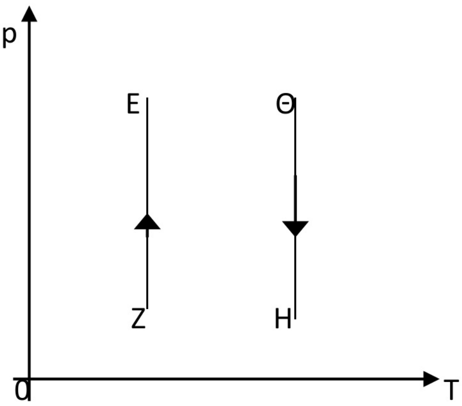
<u>Ισόθερμη συμπίεση Γ →Δ</u>

<u>Διάγραμμα V-T και p-T ισόθερμης μεταβολής</u>



Α →Β: ισόθερμη εκτόνωση

Γ →Δ: ισόθερμη συμπίεση



Ζ →Ε: ισόθερμη συμπίεση

Θ →Η: ισόθερμη εκτόνωση

2. <u>Νόμος του Charles (ισόχωρη μεταβολή):</u> Η ***πίεση*** ορισμένης ποσότητας αερίου, του οποίου ο ***όγκος διατηρείται σταθερός***, είναι ***ανάλογη με τη θερμοκρασία*** του αερίου.

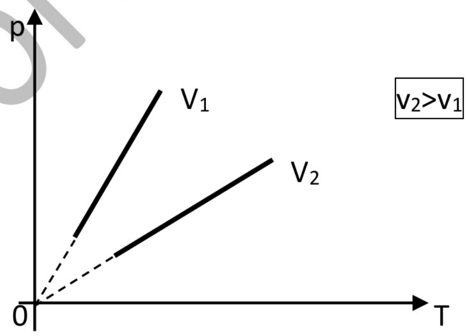
Δηλαδή ισχύει:

$$\frac{p}{T} = σταθερό$$

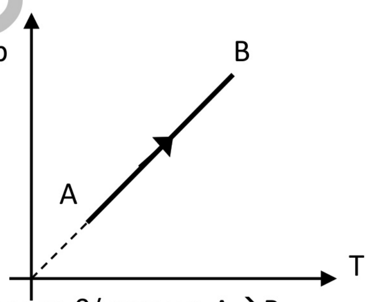
Εάν ορισμένη ποσότητα αερίου μεταβαίνει ισόχωρα από μια κατάσταση Α(p_A, V_A, T_A) σε μια κατάσταση Β(p_B, V_B, T_B), δηλαδή ισχύει $V_A = V_B$, τότε ισχύει:

$$\boldsymbol{\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B}}$$

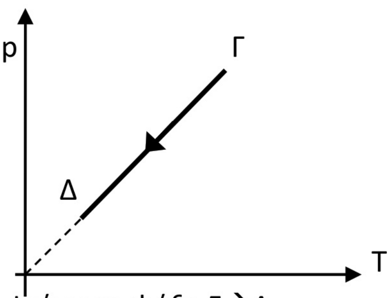
<u>Διάγραμμα p-T ισόχωρης μεταβολής:</u>



*Μια ισόχωρη μεταβολή μπορεί να είναι είτε **θέρμανση**, είτε **ψύξη**. Στην ισόχωρη θέρμανση συμβαίνει αύξηση της θερμοκρασίας του αερίου (άρα και της πίεσης), ενώ στην ισόχωρη ψύξη συμβαίνει μείωση της θερμοκρασίας του αερίου (άρα και της πίεσης).*

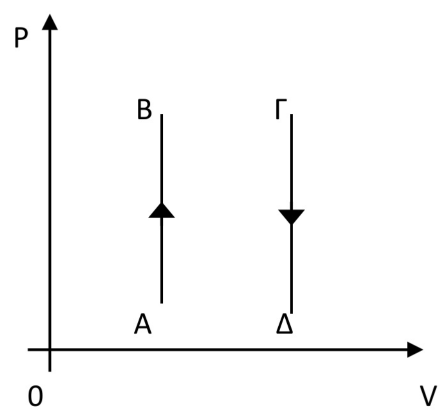


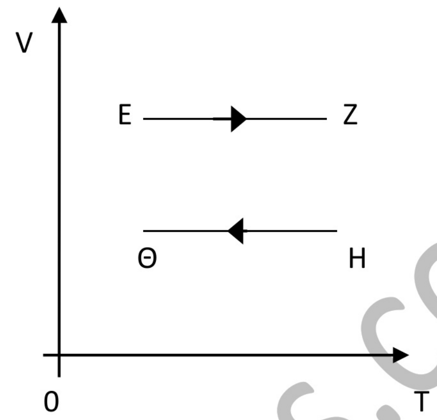
Ισόχωρη θέρμανση Α→Β



Ισόχωρη ψύξη Γ→Δ

Διάγραμμα P-V και V-T ισόχωρης μεταβολής





Α→Β: ισόχωρη θέρμανση

Γ→Δ: ισόχωρη ψύξη

Ε→Ζ: ισόχωρη θέρμανση

Η→Θ: ισόχωρη ψύξη

3. **Νόμος Gay – Lussac (ισοβαρής μεταβολή):** Όταν η ***πίεση*** ορισμένης ποσότητας αερίου ***παραμένει σταθερή***, ***ο όγκος*** του αερίου είναι ***ανάλογος με τη θερμοκρασία*** του.

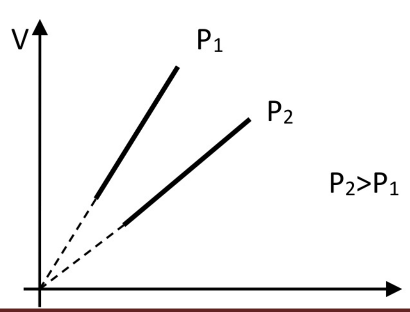
Δηλαδή ισχύει:

$$\frac{V}{T} = σταθερό$$

Εάν ορισμένη ποσότητα αερίου μεταβαίνει ισοβαρώς από μια κατάσταση Α(p_A, V_A, T_A) σε μια κατάσταση Β(p_B, V_B, T_B), δηλαδή ισχύει $p_A = p_B$, τότε ισχύει:

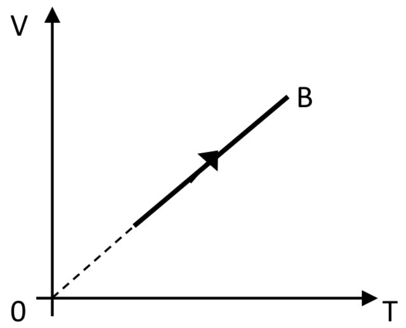
$$\boldsymbol{\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B}}$$

Διάγραμμα V-T ισοβαρούς μεταβολής:

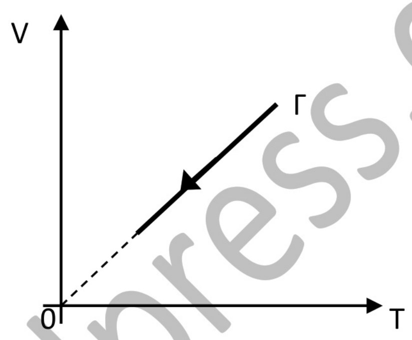


0 T

*Μια ισοβαρής μεταβολή μπορεί να είναι είτε **εκτόνωση (ή και θέρμανση)**, είτε **συμπίεση (ή και ψύξη)**. Στην ισοβαρής εκτόνωση/θέρμανση συμβαίνει αύξηση του όγκου του αερίου (άρα και της θερμοκρασίας του), ενώ στην ισοβαρής συμπίεση/ψύξη συμβαίνει μείωση του όγκου του αερίου (άρα και της θερμοκρασίας του).*

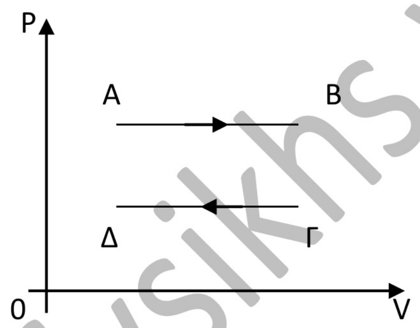


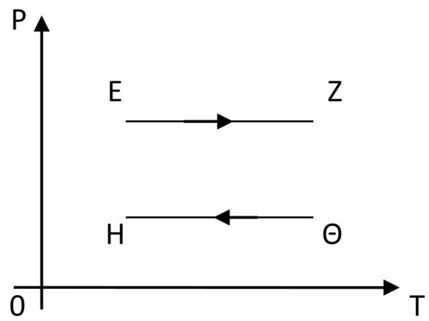
Ισοβαρής εκτόνωση (ή θέρμανση) Α→Β



Ισοβαρής συμπίεση (ή ψύξη) Γ→Δ

<u>Διάγραμμα P-V και P-T ισοβαρούς μεταβολής</u>





Α→Β: ισοβαρής εκτόνωση (ή θέρμανση)

Γ→Δ: ισοβαρής συμπίεση (ή ψύξη)

Ε→Ζ: ισοβαρής εκτόνωση (ή θέρμανση)

Θ→Η: ισοβαρής συμπίεση (ή ψύξη)

Καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων

Ιδανικό αέριο ονομάζεται το αέριο που υπακούει στους τρεις νόμους των αερίων σε ***οποιεσδήποτε*** συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας και αν βρίσκεται.

Από το συνδυασμό των τριών νόμων για το ιδανικό αέριο προκύπτει η ***καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων:***

$$pV = nRT$$

Η ***σταθερά R*** ονομάζεται ***παγκόσμια σταθερά των ιδανικών αερίων*** και η τιμή της εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης των μεγεθών p, V και T.

- Στο S.I., όπου μονάδα μέτρησης της πίεσης είναι το 1 $\frac{N}{m^2}$ του όγκου το 1 m^3 και της θερμοκρασίας το 1 *K,* η σταθερά R ισούται με:

$$\boldsymbol{R = 8,314\ \frac{J}{mol \cdot K}}$$

- Αν ως μονάδα μέτρησης της πίεσης χρησιμοποιείται η 1 atm και του όγκου το 1 L, τότε η σταθερά R ισούται με:

$$\boldsymbol{R = 0,082\ \frac{L \cdot atm}{mol \cdot K}}$$

S.O.S. → Όταν το αέριο υφίσταται μια τυχαία μεταβολή, χωρίς να παραμένει κάποιο μέγεθος σταθερό, μπορούμε να κάνουμε ***διαίρεση κατά μέλη δύο καταστατικών εξισώσεων*** για την αρχική και τελική κατάσταση του αερίου. Το ίδιο κάνουμε και όταν θέλουμε να καταλήξουμε σε κάποια σχέση δύο μεγεθών.

Αν στην καταστατική εξίσωση θέλουμε να εμφανίσουμε την πυκνότητα d (ή ρ), κάνουμε τα εξής:

$$pV = nRT$$

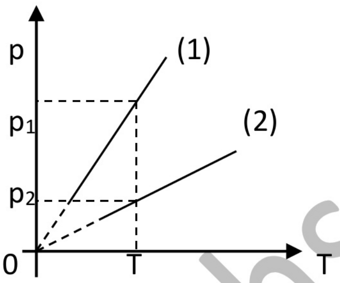
$$pV = \frac{m}{M_r}RT \quad (\text{αφού } n = \frac{m}{M_r})$$

$$p = \frac{m}{VM_r}RT \quad (\text{«κατεβάζουμε» χιαστί τον όγκο V})$$

$$p = d\,\frac{RT}{M_r} \quad (\text{αφού } d = \frac{m}{V})$$

Πως βρίσκουμε σχέση μεγεθών μέσα από ένα διάγραμμα (μεθοδολογία)

Έστω ένα διάγραμμα p-T με δύο ***ισόχωρες μεταβολές*** για ***την ίδια ποσότητα mol*** αερίων (η μέθοδος ισχύει για όλες τις γραφικές παραστάσεις).



Θεωρούμε ότι $\boldsymbol{T_1=T_2=T}$ και παρατηρούμε από το διάγραμμα ότι $\boldsymbol{P_1>P_2}$. Αν ***διαιρέσουμε κατά μέλη*** δύο καταστατικές εξισώσεις για τις δύο μεταβολές, προκύπτει:

$$\left.\begin{array}{l} P_1V_1 = n_1RT_1 \\ P_2V_2 = n_2RT_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{p_1V_1}{p_2V_2} = \frac{n_1RT_1}{n_2RT_2} \xrightarrow{\text{όμως } n_1=n_2 \text{ και } T_1=T_2} \frac{p_1V_1}{p_2V_2} = 1$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}}$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι τα **μεγέθη πίεση και όγκος είναι αντιστρόφως ανάλογα**, άρα αφού ισχύει $\boldsymbol{P_1>P_2}$ (από διάγραμμα), θα ισχύει και $\boldsymbol{V_1<V_2}$, <u>άρα το αέριο (2) καταλαμβάνει μεγαλύτερο όγκο.</u>

Κινητική θεωρία αερίων

Η κινητική θεωρία των αερίων στηρίζεται στην υπόθεση ότι τα αέρια αποτελούνται από ένα ***μεγάλο πλήθος απειροελάχιστων σφαιριδίων (μορίων),*** τα οποία κινούνται άτακτα μέσα στο χώρο που καταλαμβάνει το αέριο. Η κινητική θεωρία εξάγει σχέσεις ανάμεσα σε μακροσκοπικές μεταβλητές, όπως η πίεση και η θερμοκρασία και σε μικροσκοπικές μεταβλητές, όπως η μέση ταχύτητα των μορίων και η μέση κινητική ενέργεια των μορίων.

Η κινητική θεωρία στηρίχτηκε στις εξής παραδοχές:

1. Τα μόρια του αερίου θεωρούνται μικροσκοπικές, απόλυτα ελαστικές σφαίρες χωρίς εσωτερική δομή.
2. Ο όγκος που καταλαμβάνουν συνολικά τα μόρια του αερίου είναι αμελητέος σε σχέση με τον όγκο του δοχείου.
3. Δεν ασκούνται δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των μορίων. Δυνάμεις αναπτύσσονται μόνο κατά τη διάρκεια της κρούσης των μορίων με άλλα μόρια ή με τα τοιχώματα του δοχείου. Επομένως, μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων η κίνηση των μορίων είναι ευθύγραμμη και ομαλή.
4. Οι κρούσεις μεταξύ των μορίων αλλά και των μορίων με τα τοιχώματα του δοχείου είναι ελαστικές, γι’ αυτό δε μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια των μορίων. Επίσης, η διάρκεια κάθε κρούσης είναι αμελητέα.

Η σχέση που συνδέει την πίεση του αερίου με τη μέση τιμή των τετραγώνων των ταχυτήτων των μορίων του είναι:

$$p = \frac{1}{3}\frac{Nm\overline{\upsilon^2}}{V}$$

- N το πλήθος των μορίων του αερίου
- m η μάζα κάθε μορίου
- V ο όγκος του δοχείου
- $\overline{\upsilon^2}$ η μέση τιμή των τετραγώνων των ταχυτήτων των μορίων

Αν στην παραπάνω σχέση αντικαταστήσουμε: $Nm = m_{o\lambda}$ και $\frac{m_{o\lambda}}{V} = d$

προκύπτει και η σχέση $p = \frac{1}{3}d\overline{\upsilon^2}$

Σχέση που συνδέει τη μέση κινητική ενέργεια των μορίων με τη θερμοκρασία του αερίου

$$\overline{K} = \frac{3}{2}kT$$

Όπου k θετική σταθερά, η οποία ονομάζεται σταθερά του Boltzmann και ισούται με:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}$$

*Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι **η μέση κινητική ενέργεια των μορίων εξαρτάται ΜΟΝΟ από τη θερμοκρασία του αερίου** και συγκεκριμένα είναι **ανάλογη της θερμοκρασίας του**.*

Απόδειξη τύπου:

$p = \frac{1}{3}\frac{Nm\overline{\upsilon^2}}{V}$ ή $pV = \frac{1}{3}Nm\overline{\upsilon^2}$

Από καταστατική εξίσωση ισχύει όμως $pV = nRT$, άρα προκύπτει:

$nRT = \frac{1}{3}Nm\overline{\upsilon^2}$ και αν αντικαταστήσουμε όπου $n = \frac{N}{N_A}$ έχουμε:

$\frac{N}{N_A}RT = \frac{1}{3}Nm\overline{\upsilon^2}$ ή $\frac{R}{N_A}NT = \frac{1}{3}Nm\overline{\upsilon^2}$ ή $\frac{R}{N_A}T = \frac{1}{3}m\overline{\upsilon^2}$

Αν αντικαταστήσουμε όπου $\frac{R}{N_A} = k$ και στο δεύτερο μέλος πολλαπλασιάσουμε και διαιρέσουμε με 2, προκύπτει:

$kT = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}m\overline{\upsilon^2})$ και επειδή $\overline{K} = \frac{1}{2}m\overline{\upsilon^2}$ τελικά έχουμε:

$kT = \frac{2}{3}\overline{K}$ ή $\boxed{\overline{K} = \frac{3}{2}kT}$

Ενεργός ταχύτητα των μορίων ενός αερίου ($\boldsymbol{\upsilon_{\varepsilon\nu}}$) ονομάζεται η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των ταχυτήτων των μορίου του αερίου. Ισχύει δηλαδή

$$\upsilon_{\varepsilon\nu} = \sqrt{\overline{\upsilon^2}}$$

Η ενεργός ταχύτητα εξαρτάται από τη θερμοκρασία του αερίου και τη μάζα κάθε μορίου και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\upsilon_{\varepsilon\nu} = \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

<u>Απόδειξη του τύπου:</u> Από τις σχέσεις που δίνουν τη μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου $\overline{K} = \frac{1}{2}m\overline{\upsilon^2}$ και $\overline{K} = \frac{3}{2}kT$, προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{2}m\overline{\upsilon^2} = \frac{3}{2}kT \quad \text{ή} \quad \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad \text{ή} \quad \upsilon_{\varepsilon\nu} = \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

<u>Σχέση που συνδέει την ενεργό ταχύτητα με τη γραμμομοριακή μάζα του αερίου</u>

Αν στη σχέση $\upsilon_{\varepsilon\nu} = \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ θέσουμε $k = \frac{R}{N_A}$, προκύπτει:

$$\sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3\frac{R}{N_A}T}{m}} \quad \text{ή} \quad \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{mN_A}}$$

$$\left.\begin{array}{l} n = \frac{m}{M_r} \\ n = \frac{N}{N_A} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{m}{M_r} = \frac{N}{N_A}$$

και αν N=1 μόριο

Προκύπτει: $\boldsymbol{mN_A = M_r}$

Και τελικά έχουμε:

$$\upsilon_{\varepsilon\nu} = \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_r}}$$

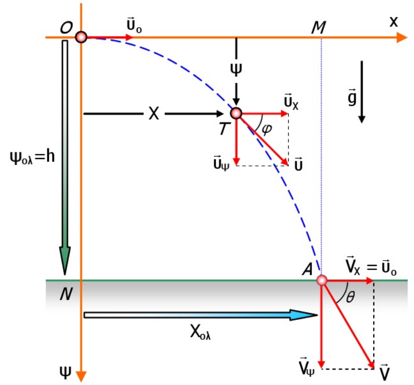
Χρήσιμες παρατηρήσεις

- Όταν μεταβάλλεται η ποσότητα του αερίου, ΔΕΝ ισχύουν οι νόμοι των αερίων, γι’ αυτό και εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση σε κάθε κατάσταση.
- Σε κάθε περίπτωση που δύο αέρια αναμιγνύονται χωρίς να υπάρχει απώλεια μάζας, μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης μάζα:
$$n_1 + n_2 = n_1' + n_2'$$
- Όταν αναμιγνύονται δύο αέρια που βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία, ανεξάρτητα από τη μάζα και την πίεσή τους, θα βρεθούν σε τελική κατάσταση ίδιας θερμοκρασίας με την αρχική.
- Όταν σε δοχείο το έμβολο ισορροπεί, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό ισούται με μηδέν: $\Sigma\vec{F} = 0$
- Εξαιρετικά χρήσιμο είναι στην αρχή της επίλυσης ενός προβλήματος να καταγράφονται τα δεδομένα πίεσης, όγκου και θερμοκρασίας σε πίνακα (προσέχοντας είναι όλα στις ίδιες μονάδες μέτρησης), έτσι ώστε να διακρίνονται ξεκάθαρα τα δεδομένα και τα ζητούμενα.
- Η κινητική ενέργεια του συνόλου των μορίων του αερίου υπολογίζεται από τη σχέση: $K_{ολ} = N \cdot \overline{K}$
- Όταν ζητείται ο αριθμός μορίων ανά μονάδα όγκου ($\frac{N}{V}$), μπορούμε να τον υπολογίσουμε ως εξής:

Από $p = \frac{1}{3}\frac{Nm\overline{\upsilon^2}}{V} \Longrightarrow \frac{N}{V} = \frac{3p}{m\overline{\upsilon^2}}$ ή $\frac{N}{V} = \frac{3p}{2\overline{K}}$

Οριζόντια Βολή

Τη χρονική στιγμή $t_o=0$ σώμα μάζας m βάλλεται από ύψος h, μ' οριζόντια ταχύτητα μέτρου $υ_o$.



- Ισότητα των (τριών) χρόνων.

$$t_{OM}=t_{ON}=t_{OA}=t$$

- Οριζόντια (συνισταμένη) δύναμη.

$$ΣF_x=0$$

- Κατακόρυφη (συνισταμένη) δύναμη.

$$ΣF_ψ=w=m\cdot g$$

- Οριζόντια θέση (x) στην τυχαία χρονική στιγμή (t).

$$X=υ_o\cdot t$$

- Κατακόρυφη θέση (ψ), στην τυχαία χρονική στιγμή (t).

$$ψ=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$

- Εξίσωση τροχιάς : Σχέση κατακόρυφης κι οριζόντιας μετατόπισης.

$$ψ=\frac{g}{2\cdot υ_o^2}\cdot X^2 \text{ (παραβολή)}$$

- Οριζόντια ταχύτητα ($υ_x$) σε τυχαία θέση (x, ψ) σε τυχαία χρονική στιγμή (t).

$$υ_x=υ_O = \text{σταθερή}$$

- Κατακόρυφη ταχύτητα ($υ_ψ$) σε τυχαία θέση (x, ψ) την τυχαία χρονική στιγμή (t).

$$υ_ψ=g\cdot t$$

- Ταχύτητα (υ) σε τυχαία θέση (x, ψ) την τυχαία χρονική στιγμή (t).

1. *Με τις χρονικές εξισώσεις.*

$$υ=\sqrt{υ_x^2+υ_ψ^2}=\sqrt{υ_o^2+(g\cdot t)^2}$$

$$εφφ=\frac{υ_ψ}{υ_x}=\frac{g\cdot t}{υ_o}$$

2. *Με το θεώρημα Έργου - Ενέργειας στη διαδρομή ΟΤ :*

$$ΔK=W_{ολ} \Rightarrow K^{(T)}-K^{(O)}=W_W \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot \cancel{m}\cdot υ^2-\frac{1}{2}\cdot \cancel{m}\cdot υ_o^2=\cancel{m}\cdot g\cdot ψ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow υ^2-υ_o^2=2\cdot g\cdot ψ \Rightarrow υ^2=υ_o^2+2\cdot g\cdot ψ \Rightarrow υ=\sqrt{υ_o^2+2\cdot g\cdot ψ}$$

3. *Με την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας ανάμεσα στις θέσεις Ο και Τ, μ' επιφάνεια αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια την ΟΜ :*

$$K^{(O)}+\cancel{U_β^{(O)}}=K^{(T)}+U_β^{(T)} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot \cancel{m}\cdot υ_o^2=\frac{1}{2}\cdot \cancel{m}\cdot υ^2-\cancel{m}\cdot g\cdot ψ \Rightarrow ...$$

- Ύψος : Η κατακόρυφη μετατόπιση ($ψ_{ολ}$) της ολοκληρωμένης βολής.

$$ψ_{ολ}=h$$

- Χρόνος ολοκληρωμένης βολής ($t_{ολ}$).

$$t_{ολ}=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

- Βεληνεκές : Η οριζόντια μετατόπιση ($X_{ολ}$) της ολοκληρωμένης βολής.

$$X_{ολ}=υ_o\cdot t_{ολ}=υ_o\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

- Τελική κατακόρυφη ταχύτητα ($V_ψ$).

$$V_ψ=g\cdot t_{ολ}$$

- Τελική ταχύτητα (V).

1. *Με τις χρονικές εξισώσεις.*

$$V=\sqrt{V_x^2+V_ψ^2}=\sqrt{υ_o^2+(g\cdot t_{ολ})^2}$$

$$εφθ=\frac{V_ψ}{V_x}=\frac{g\cdot t_{ολ}}{υ_o}$$

2. *Με το θεώρημα Έργου - Ενέργειας στη διαδρομή ΟΑ :*

$$ΔK=W_{ολ} \Rightarrow K^{(A)}-K^{(O)}=W_W \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot \cancel{m}\cdot V^2-\frac{1}{2}\cdot \cancel{m}\cdot υ_o^2=\cancel{m}\cdot g\cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^2-υ_o^2=2\cdot g\cdot h \Rightarrow V^2=υ_o^2+2\cdot g\cdot h \Rightarrow V=\sqrt{υ_o^2+2\cdot g\cdot h}$$

3. *Με την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας ανάμεσα στις θέσεις Ο και Α, μ' επιφάνεια αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια την ΟΜ :*

$$K^{(O)}+\cancel{U_β^{(O)}}=K^{(A)}+U_β^{(A)} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot \cancel{m}\cdot υ_o^2=\frac{1}{2}\cdot \cancel{m}\cdot V^2-\cancel{m}\cdot g\cdot h \Rightarrow ...$$

Ομαλή Κυκλική Κίνηση

- Περίοδος (Τ) περιοδικής κίνησης.

$$T\overset{ορσ}{=}\frac{t}{N}$$

N : το πλήθος περιοδικών κινήσεων σε χρόνο t.

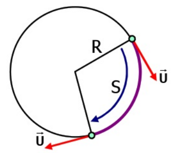
- Συχνότητα (f) περιοδικής κίνησης.

$$f\overset{ορσ}{=}\frac{N}{t}$$

- Σχέση περιόδου (Τ) - συχνότητας (f).

$$f\cdot T=1 \Rightarrow \begin{cases} f=\frac{1}{T} \\ T=\frac{1}{f} \end{cases}$$

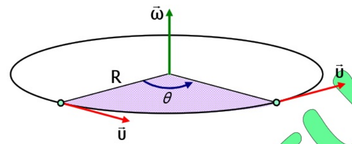
- Γραμμική ταχύτητα (υ).



$$υ\overset{ορσ}{=}\frac{S}{t}$$

S : το διανυόμενο τόξο σε χρόνο t

- Γωνιακή ταχύτητα (ω).



$$ω\overset{ορσ}{=}\frac{θ}{t}$$

θ : η επίκεντρη γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα R σε χρόνο t.

- Σχέση γωνιακής ταχύτητας (ω), συχνότητας (f) και περιόδου (Τ).

$$ω=2π\cdot f=\frac{2π}{T}$$

- Σχέση γραμμικής (υ) - γωνιακής ταχύτητας (ω).

$$υ=ω\cdot R \left(=\frac{2π}{T}\cdot R=2πf\cdot R\right)$$

- Μήκος μιας περιφέρειας (περίμετρος κύκλου ακτίνας R).

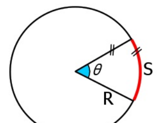
$$S_{ολ}=2π\cdot R$$

- Σχέση τόξου (S) - ακτίνας (R) κι επίκεντρης γωνίας (θ) που "βαίνει" στο τόξο.

$$S=θ\cdot R$$

θ : η επίκεντρη γωνία μετρημένη σε ακτίνια (rad).

- Ορισμός ακτινίου (rad).

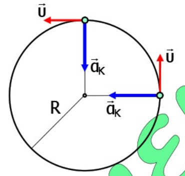


Όταν S=R, τότε θ=1 rad

2π rad → 360°

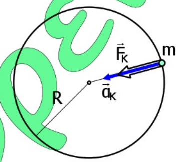
1 rad → 57,3°

- Κεντρομόλος επιτάχυνση ($α_K$).



$$α_K=\frac{υ^2}{R}=\frac{ω^2\cdot R^{\cancel{2}}}{\cancel{R}}=ω^2\cdot R$$

- Κεντρομόλος δύναμη (F_K).



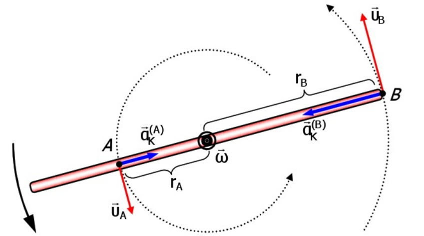
$$ΣF_R=F_K=m\cdot α_K=m\cdot\frac{υ^2}{R}=m\cdot ω^2\cdot R$$

- Συνθήκη εκτέλεσης κυκλικής κίνησης (όχι απαραίτητα ομαλής).

"Για να εκτελεί ένα σώμα κυκλική κίνηση, πρέπει να δέχεται κεντρομόλο δύναμη". Ισχύει κι αντίστροφα.

Πρέπει δηλαδή, $ΣF_R=m\cdot α_K$

- Περιστροφική κίνηση στερεού σώματος περί άξονα.



Κάθε σημείο του εκτελεί, γενικά, διαφορετικό κύκλο ακτίνας r_i με ταχύτητα $υ_i$ έχοντας με τα υπόλοιπα σημεία του στερεού ΚΟΙΝΑ τα f, ω και T (του στερεού).

Για κάθε σημείο ισχύουν :

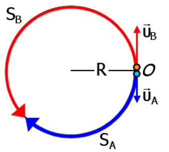
$$υ_i=ω\cdot r_i$$

$$α_K^{(i)}=\frac{υ_i^2}{r_i}=\frac{ω^2\cdot r_i^{\cancel{2}}}{\cancel{r_i}}=ω^2\cdot r_i$$

Συναντησεις Στον Κυκλο

▪ Τη στιγμή t_0 δυο κινητά περνούν από το ίδιο σημείο Ο του κύκλου, τη στιγμή t συναντιούνται για ν-οστή φορά.

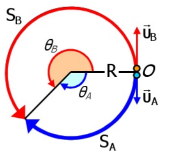
☐ *Αντίστροφες κυκλικές κινήσεις*



Τα κινητά συναντιούνται για ν-οστή φορά, όταν το ΑΘΡΟΙΣΜΑ των τόξων που διανύουν είναι ίσο μ' ακέραιο πλήθος (ν) περιφερειών ($S_{ολ}=2πR$).

$$S_A+S_B=ν\cdot S_{ολ} \overset{υ=\frac{S}{t}}{\Rightarrow} υ_A\cdot t+υ_B\cdot t=ν\cdot 2πR$$

Αλλιώτικα …



… τα κινητά συναντιούνται για ν-οστή φορά, όταν το ΑΘΡΟΙΣΜΑ των επίκεντρων γωνιών που διαγράφουν οι επιβατικές τους ακτίνες είναι ίσο μ' ακέραιο πλήθος (ν) πλήρων γωνιών ($θ_{ολ}=2π$ rad).

$$θ_A+θ_B=ν\cdot θ_{ολ} \overset{ω=\frac{θ}{t}}{\Rightarrow} ω_A\cdot t+ω_B\cdot t=ν\cdot 2π$$

☐ *Ομόστροφες κυκλικές κινήσεις*

Τα κινητά συναντιούνται για ν-οστή φορά, όταν η ΔΙΑΦΟΡΑ των τόξων που διανύουν είναι ίση μ' ακέραιο πλήθος (ν) περιφερειών ($S_{ολ}=2πR$).

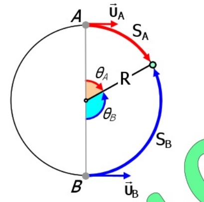
$$|S_A-S_B|=ν\cdot S_{ολ} \overset{υ=\frac{S}{t}}{\Rightarrow} υ_A\cdot t-υ_B\cdot t=ν\cdot 2πR$$

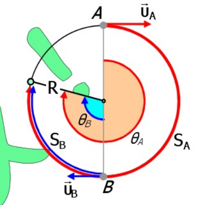
Αλλιώτικα … τα κινητά συναντιούνται για ν-οστή φορά, όταν η ΔΙΑΦΟΡΑ των επίκεντρων γωνιών που διαγράφουν οι επιβατικές τους ακτίνες, είναι ίση μ' ακέραιο πλήθος (ν) πλήρων γωνιών ($θ_{ολ}=2π$ rad).

$$|θ_A-θ_B|=ν\cdot θ_{ολ} \overset{ω=\frac{θ}{t}}{\Rightarrow} ω_A\cdot t-ω_B\cdot t=ν\cdot 2π$$

▪ Τη στιγμή t_0 δυο κινητά Α κ' Β περνούν από αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου, τη στιγμή t_1 συναντιούνται για 1η φορά.

☐ *Αντίστροφες κινήσεις* ☐ *Ομόστροφες κινήσεις*





▪ $S_A+S_B=\frac{1}{2}\cdot S_{ολ} \Rightarrow$

$\Rightarrow υ_A\cdot t_1+υ_B\cdot t_1=π\cdot R.$

▪ $θ_A+θ_B=\frac{1}{2}\cdot θ_{ολ} \Rightarrow$

$\Rightarrow ω_A\cdot t_1+ω_B\cdot t_1=π$ rad.

▪ $S_A-S_B=\frac{1}{2}\cdot S_{ολ} \Rightarrow$

$\Rightarrow υ_A\cdot t_1-υ_B\cdot t_1=π\cdot R.$

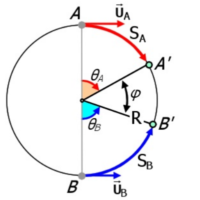
▪ $θ_A-θ_B=\frac{1}{2}\cdot θ_{ολ} \Rightarrow$

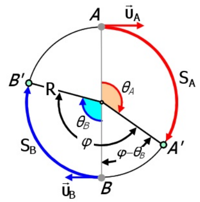
$\Rightarrow ω_A\cdot t_1-ω_B\cdot t_1=π$ rad.

☛ *Επειδή τη στιγμή t_1 περνούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο, για τη 2η, 3η … ν-οστή φορά που συναντιούνται, συνεχίζουμε τη λύση όπως στην προηγούμενη περίπτωση …*

▪ Τη στιγμή t_0 δυο κινητά Α κ' Β περνούν από αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου, τη στιγμή t οι επίκεντρες γωνίες τους διαφέρουν κατά φ.

☐ *Αντίστροφες κινήσεις* ☐ *Ομόστροφες κινήσεις*





$θ_A+φ+θ_B=π \Rightarrow$

$\Rightarrow θ_A+θ_B=π-φ$ (σε rad).

$θ_A+(φ-θ_B)=π \Rightarrow$

$\Rightarrow θ_A-θ_B=π-φ$ (σε rad).

▪ Τη στιγμή t_0 δυο κινητά Α κ' Β περνούν από το ίδιο σημείο Ο του κύκλου, τη στιγμή t συναντιούνται για 1η φορά στο ΙΔΙΟ σημείο.

Είτε κινούνται στον ίδιο κύκλο, είτε σε διαφορετικούς κύκλους που εφάπτονται, είτε ομόστροφα, είτε αντίστροφα, για να συναντηθούν πάλι στο ίδιο σημείο πρέπει και τα δυο κινητά ως τη στιγμή t να έχουν διαγράψει από ένα ακέραιο πλήθος (Ν) περιφερειών.

Άρα, για τους χρόνους κίνησής τους μέχρι το Ο ισχύει :

$$t_A=t_B \overset{T=\frac{t}{N}}{\Rightarrow} N_A\cdot T_A=N_B\cdot T_B \Rightarrow \frac{N_A}{N_B}=\frac{T_B}{T_A}=\frac{\frac{1}{f_A}}{\frac{1}{f_B}}=\frac{f_A}{f_B}=\frac{\frac{ω_A}{2π}}{\frac{ω_B}{2π}}=\frac{ω_A}{ω_B}.$$

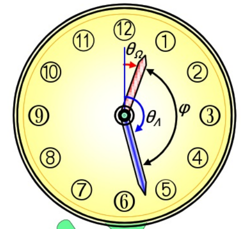
Ο λόγος $\frac{N_A}{N_B}$ φανερώνει το πλήθος των ΑΚΕΡΑΙΩΝ κύκλων που απαιτούνται για να συναντηθούν 1η φορά, ξανά στο Ο.

▪ Αν π.χ $\frac{N_A}{N_B}=\frac{2}{3}$, $N_A=2$ και $N_B=3$ κύκλοι για 1η φορά.

▪ Για 2η φορά, διπλασιάζουμε το λόγο, $\frac{4}{6}$, για 3η $\frac{6}{9}$ κ.ο.κ…

Στροφικες Κινησεις, Δεικτων Ρολογιου

▪ Ο χρόνος (t) για να σχηματιστεί τυχαία γωνία φ (σε rad) ανάμεσα σ' ωροδείκτη και λεπτοδείκτη ενός ρολογιού, αν το ρολόι έδειχνε 12:00'.



Πρέπει $\mathbf{θ_Λ-θ_Ω=φ} \overset{ω=\frac{θ}{t}}{\Rightarrow} ω_Λ\cdot t-ω_Ω\cdot t=φ \Rightarrow t\cdot(ω_Λ-ω_Ω)=φ \Rightarrow$

$$\Rightarrow t=\frac{φ}{ω_Λ-ω_Ω} \overset{ω=\frac{2π}{T}}{=} \frac{φ}{\frac{2π}{T_Λ}-\frac{2π}{T_Ω}}=\frac{φ}{2π\cdot\left(\frac{1}{T_Λ}-\frac{1}{T_Ω}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{φ}{2π\cdot\left(\frac{T_Ω-T_Λ}{T_Ω\cdot T_Λ}\right)}=\frac{φ}{2π}\cdot\frac{T_Ω\cdot T_Λ}{T_Ω-T_Λ}=\frac{φ}{2π}\cdot\frac{12\ h\cdot 1\ h}{12\ h-1\ h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t=\frac{φ}{2π}\cdot\frac{12}{11}\ h}.$$

☛ Ενδεικτικά, για …

▪ φ=π rad (οι δείκτες είν' ευθυγραμμισμένοι για 1η φορά).

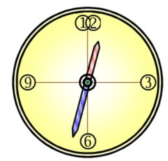
▪ φ=3π rad (οι δείκτες είν' ευθυγραμμισμένοι για 2η φορά).

▪ $φ=\frac{π}{2}$ rad (οι δείκτες σχηματίζουν ορθή γωνία 1η φορά).

▪ φ=2κπ rad (όλες οι στιγμές που οι δείκτες βρίσκονται μαζί - συναντώνται), όπου κ=0,1,2,3 …

Για παράδειγμα, αν το ρολόι έδειχνε 12:00:00, τότε …

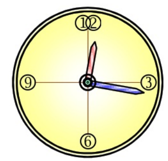
1η ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΙΣΗ ΔΕΙΚΤΩΝ



$t=\frac{6}{11}$ h

12:32:44

1η ΟΡΘΗ ΓΩΝΙΑ ΜΕΤΑΞΥ ΔΕΙΚΤΩΝ

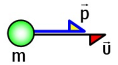


$t=\frac{3}{11}$ h

12:16:37

Η Ορμη Κι η Μεταβολη Της, σ' Ένα Σωμα

- Ορμή (p) ενός κινούμενου σώματος.



$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}$$

- Κινητική ενέργεια (Κ) ενός κινούμενου σώματος.

$$K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2 > 0$$

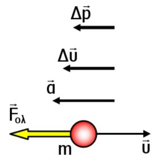
- Η μεταβολή της ορμής, ενός σώματος που κινείται πάντα στην ίδια διεύθυνση (στην ίδια ευθεία).

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{ΤΕΛ} - \vec{p}_{ΑΡΧ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta p = \pm p_{ΤΕΛ} - (\pm p_{ΑΡΧ})$$

☛ *πρόσημο σε κάθε ορμή, ανάλογα με την κατεύθυνση κίνησης*

- Ο Β' νόμος του Newton για ένα σώμα μάζας m.



$$\vec{F}_{ολ} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_{ΤΕΛ} - \vec{p}_{ΑΡΧ}}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{ολ} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = m \cdot \frac{(\vec{\upsilon}_{ΤΕΛ} - \vec{\upsilon}_{ΑΡΧ})}{\Delta t}$$

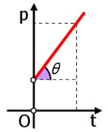
☛ *Για τα πρόσημα, θετική είν' η κατεύθυνση της εκάστοτε ΚΙΝΗΣΗΣ !*

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Με το Β' νόμο του Newton στη μορφή $\vec{F}_{ολ} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ ...

1. *... παρακάμπτεται η - ίσως αχρείαστη - επιτάχυνση από τους υπολογισμούς.*
2. *... υπολογίζεται μια "μέση" συνισταμένη δύναμη (είτε εξαιρώντας τις σταθερές δυνάμεις υπολογίζεται κάποια "μέση" συνιστώσα δύναμη).*

- Διάγραμμα ορμής - χρόνου, $p = f(t)$.

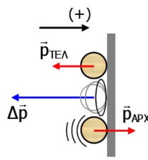


$$εφθ = \frac{\Delta p}{\Delta t} = F_{ολ}$$

- Οριζόντια αναπήδηση (ανάκλαση) ενός σώματος μάζας m, σε κατακόρυφο ακλόνητο εμπόδιο (π.χ τοίχο).

Πριν και μετά την κρούση

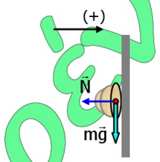
$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{ΤΕΛ} - \vec{p}_{ΑΡΧ} .$$



- *Αν τοποθετηθεί το πρόσημο του $\Delta\vec{p}$, προκύπτει το μέτρο του.*
- *Αν δεν τοποθετηθεί (ίσως επειδή δε μπορεί να προβλεφθεί), προκύπτει το πρόσημο που δηλώνει τη φορά του.*

Άρα, $-\Delta p = -p_{ΤΕΛ} - (+p_{ΑΡΧ})$ το μέτρο του.

Κατά τη διάρκεια κρούσης



$$\vec{F}_{ολ}^{(x)} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{N} = \frac{\vec{p}_{ΤΕΛ} - \vec{p}_{ΑΡΧ}}{\Delta t} \Rightarrow$$

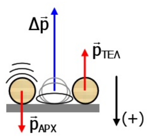
$$\Rightarrow -N = \frac{-p_{ΤΕΛ} - (+p_{ΑΡΧ})}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \frac{p_{ΤΕΛ} + p_{ΑΡΧ}}{\Delta t}$$

το μέτρο της "μέσης" δύναμης από τον τοίχο
(έχει ήδη τοποθετηθεί πρόσημο για τη φορά)

- Κατακόρυφη αναπήδηση ενός σώματος μάζας m, σ' οριζόντιο ακλόνητο εμπόδιο (π.χ πάτωμα ή ταβάνι).

Πριν και μετά την κρούση



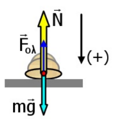
$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{ΤΕΛ} - \vec{p}_{ΤΕΛ} \Rightarrow -\Delta p = -p_{ΤΕΛ} - (+p_{ΑΡΧ})$$

το μέτρο του διανύσματος $\Delta\vec{p}$
(έχει ήδη τοποθετηθεί πρόσημο για τη φορά)

Κατά τη διάρκεια κρούσης

$$\vec{F}_{ολ}^{(\psi)} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \mathbf{m\vec{g} + \vec{N}} = \frac{\vec{p}_{ΤΕΛ} - \vec{p}_{ΑΡΧ}}{\Delta t} .$$

☛ *ΠΡΩΤΑ λύση ως προς τ' άγνωστο διάνυσμα, ΜΕΤΑ τοποθέτηση προσήμων!*



Άρα, $\vec{N} = \frac{\vec{p}_{ΤΕΛ} - \vec{p}_{ΑΡΧ}}{\Delta t} - \vec{w} \Rightarrow$

$$-N = \frac{-p_{ΤΕΛ} - (+p_{ΑΡΧ})}{\Delta t} - m \cdot (+g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \frac{p_{ΤΕΛ} + p_{ΑΡΧ}}{\Delta t} + m \cdot g$$

το μέτρο της "μέσης" δύναμης από το πάτωμα
(έχει ήδη τοποθετηθεί πρόσημο για τη φορά)

Η Διατηρηση Της Ορμης, Σε Συστημα Σωματων

- Μονωμένο σύστημα σωμάτων.

Όταν η $\vec{F}_{ολ}^{(ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ)} = 0$

- Κινητική ενέργεια ($K_{ολ}$) συστήματος κινούμενων σωμάτων.

$$K_{ολ} = K_1 + K_2 + ... = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \upsilon_2^2 + ... > 0$$

- Ορμή ($p_{ολ}$) συστήματος κινούμενων σωμάτων, στην ίδια διεύθυνση.

$$\vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... = m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 + m_2 \cdot \vec{\upsilon}_2 + ... \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{ολ} = \pm p_1 \pm p_2 \pm ... = m_1 \cdot (\pm\upsilon_1) + m_2 \cdot (\pm\upsilon_2) + ...$$

☛ *πρόσημο σε κάθε ορμή, ανάλογα με την κατεύθυνση κίνησης.*

- Η αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο), για μονωμένο σύστημα σωμάτων.

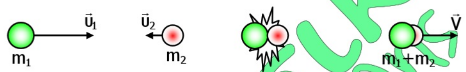
$$\vec{p}_{ολ}^{(πρό)} = \vec{p}_{ολ}^{(μετά)}$$

$$\vec{p}_1^{(πρό)} + \vec{p}_2^{(πρό)} + ... = \vec{p}_1^{(μετά)} + \vec{p}_2^{(μετά)} + ...$$

$$m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 + m_2 \vec{\upsilon}_2 + ... = m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2 + ...$$

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

- Πλαστική κρούση (δημιουργία συσσωματώματος) δυο σωμάτων που κινούνται στην ίδια διεύθυνση.



$$\vec{p}_{ολ}^{(πρό)} = \vec{p}_{ολ}^{(μετά)} \Rightarrow \vec{p}_1^{(πρό)} + \vec{p}_2^{(πρό)} = \vec{p}_{ολ}^{(μετά)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 + m_2 \vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 + m_2 \cdot \vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}$$

☛ *πρόσημο σε κάθε ταχύτητα, ανάλογα με την κατεύθυνση κίνησης.*

- Απώλεια της (μηχανικής) ενέργειας του συστήματος, μέσω ροής θερμότητας (Q), προς το περιβάλλον.

$$Q = -\Delta K_{ολ} = K_{ολ}^{(πρό)} - K_{ολ}^{(μετά)} > 0$$

Ιδανικά Αέρια

- Σχέση μετατροπής θερμοκρασιών.

$$T=273+\theta$$

T η απόλυτη θερμοκρασία (σε Kelvin) και θ σε βαθμούς Κελσίου (°C)

- Σχέση μεταβολής θερμοκρασίας, μεταξύ Κέλβιν (K) και βαθμών Κελσίου (°C).

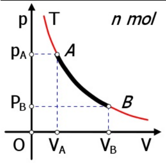
$$\Delta T=\Delta\theta$$

- Πίεση (p) αερίου, ασκούμενη σ' επιφάνεια εμβαδού A.

$$p=\frac{F}{A}$$

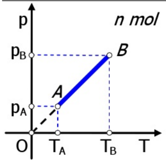
F : η (κάθετη) στην επιφάνεια πιεστική δύναμη

- Νόμος Boyle (ισόθερμη μεταβολή).



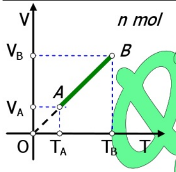
$$p\cdot V=\text{σταθερό}\Rightarrow p_A\cdot V_A=p_B\cdot V_B$$

- Νόμος του Charles (ισόχωρη μεταβολή).



$$\frac{p}{T}=\text{σταθερό}\Rightarrow\frac{p_A}{T_A}=\frac{p_B}{T_B}$$

- Νόμος του Gay Lussac (ισοβαρής μεταβολή).



$$\frac{V}{T}=\text{σταθερό}\Rightarrow\frac{V_A}{T_A}=\frac{V_B}{T_B}$$

- Συνδυαστική εξίσωση ιδανικών αερίων.

$$\frac{p\cdot V}{T}=\text{σταθερό}\Rightarrow\frac{p_A\cdot V_A}{T_A}=\frac{p_B\cdot V_B}{T_B}$$

- Μάζα ($m_{ολ}$) ενός ιδανικού αερίου.

$$m_{ολ}=N\cdot m$$

m : η μάζα κάθε μορίου τ' αερίου

- Πυκνότητα (ϱ) ιδανικού αερίου.

$$\varrho=\frac{m_{ολ}}{V}$$

- Πλήθος (n) των mol ιδανικού αερίου.

$$n=\frac{m_{ολ}}{M_r}=\frac{N}{N_A}$$

N_A : αριθμός του Avogadro
N : πλήθος των μορίων του αερίου
M_r : γραμμομοριακή μάζα

- Σταθερά (k) του Boltzmann.

$$k=\frac{R}{N_A}$$

R : η παγκόσμια σταθερά των ιδανικών αερίων

- Καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων.

$$p\cdot V=n\cdot R\cdot T \qquad p\cdot V=N\cdot k\cdot T$$

$$p\cdot V=\frac{m_{ολ}}{M_r}\cdot R\cdot T \qquad p\cdot V=\frac{N}{N_A}\cdot R\cdot T$$

$$p\cdot M_r=\varrho\cdot R\cdot T$$

Η Κινητική Θεωρία

- Πίεση (p) του ιδανικού αερίου.

$$p=\frac{1}{3}\cdot\frac{N}{V}\cdot m\cdot\overline{u^2} \qquad p=\frac{2}{3}\cdot\frac{N}{V}\cdot\overline{K}$$

$$p=\frac{1}{3}\cdot\varrho\cdot\overline{u^2}=\frac{1}{3}\cdot\varrho\cdot u_{εν}^2$$

- Μέση (μεταφορική) κινητική ενέργεια ($\overline{K}$) των μορίων ιδανικού αερίου.

$$\overline{K}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\overline{u^2}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot u_{εν}^2=\frac{3}{2}\cdot k\cdot T$$

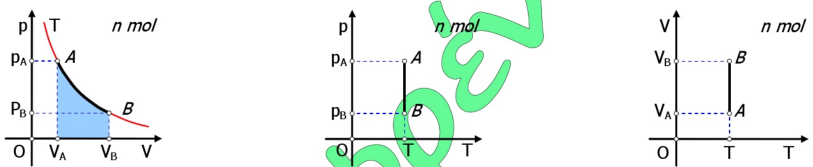
- ~~Ενεργός ταχύτητα ($u_{εν}$) των μορίων ιδανικού αερίου.~~

$$\cancel{u_{εν}=\sqrt{\overline{u^2}}=\sqrt{\frac{3\cdot\overline{K}}{m}}=\sqrt{\frac{3\cdot k\cdot T}{m}}=\sqrt{\frac{3\cdot R\cdot T}{M_r}}}$$

[redacted]

Είδος αντιστρεπτής μεταβολής, σταθερής ποσότητας (n mol) μονοατομικού ιδανικού αερίου
Ισόθερμη μεταβολή ΑΒ ($T_A=T_B=T$)

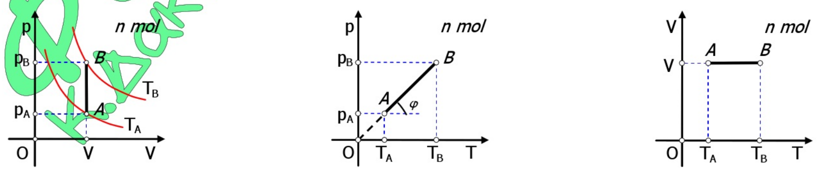
Νόμος Boyle : $p\cdot V=ct \Rightarrow p_A\cdot V_A=p_B\cdot V_B \Rightarrow \frac{p_A}{p_B}=\frac{V_B}{V_A}$



Α→Β : Ισόθερμη εκτόνωση / Β→Α : Ισόθερμη συμπίεση

Ισόχωρη μεταβολή ΑΒ ($V_A=V_B=V$)

Νόμος Charles : $\frac{p}{T}=ct \Rightarrow p\propto T \Rightarrow \frac{p_A}{T_A}=\frac{p_B}{T_B} \Rightarrow \frac{p_A}{p_B}=\frac{T_A}{T_B}$



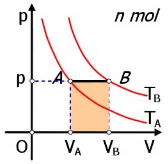
Α→Β : Ισόχωρη θέρμανση / Β→Α : Ισόχωρη ψύξη

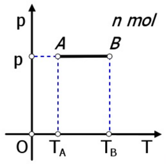
Τα μεγέθη του Α' θερμοδυναμικού νόμου

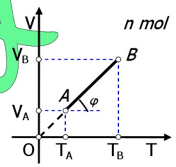
W +	ΔU =	Q
W_{AB} = $=Q_{AB}$ [redacted]	$\Delta U_{AB}=0$	$Q_{AB}=W_{AB}$
$W_{AB}=0$	ΔU_{AB} = $=Q_{AB}$ [redacted]	$Q_{AB}=\Delta U_{AB}$

Ισοβαρής μεταβολή ΑΒ ($p_A=p_B=p$)

Νόμος Gay Lussac : $\frac{V}{T}=ct \Rightarrow V \propto T \Rightarrow \frac{V_A}{T_A}=\frac{V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B}=\frac{T_A}{T_B}$





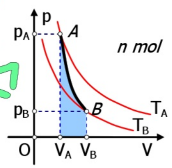


Α→Β : Ισοβαρής εκτόνωση (θέρμανση) / Β→Α : Ισοβαρής συμπίεση (ψύξη)

Αδιαβατική μεταβολή ΑΒ

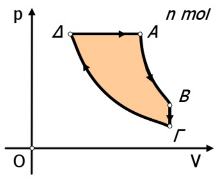
Νόμος Poisson : $p \cdot V^{\gamma}=ct \Rightarrow p_A \cdot V_A^{\gamma}=p_B \cdot V_B^{\gamma}$

☛ Επίσης, ισχύει η συνδυαστική εξίσωση : $\frac{p_A \cdot V_A}{T_A}=\frac{p_B \cdot V_B}{T_B}$



Α→Β : Αδιαβατική εκτόνωση (ψύξη) / Β→Α : Αδιαβατική συμπίεση (θέρμανση)

Κυκλική μεταβολή ΑΒΓΔΑ

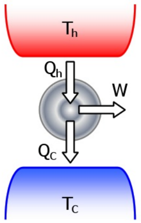


Τα μεγέθη του Α' θερμοδυναμικού νόμου

W	+ ΔU	= Q
W_{AB} = $= Q_{AB}-\Delta U_{AB}$ = γραμμοσκιασμένο εμβαδό ορθογωνίου, στο διάγραμμα p-V $= p \cdot \Delta V$ $= n \cdot R \cdot \Delta T$ $= N \cdot k \cdot \Delta T$	ΔU_{AB} = $= Q_{AB}-W_{AB}$ $= n \cdot C_V \cdot \Delta T$ $= \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T$ $= \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Delta V$	Q_{AB} = $= \Delta U_{AB}+W_{AB}$ $= n \cdot C_P \cdot \Delta T$ $= \frac{5}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T$ $= \frac{5}{2} \cdot N \cdot k \cdot \Delta T$ $= \frac{5}{2} \cdot p \cdot \Delta V$
W_{AB} = $= -\Delta U_{AB}$ $= \frac{p_B \cdot V_B - p_A \cdot V_A}{1-\gamma}$ $= \frac{\Delta(p \cdot V)}{1-\gamma}$	ΔU_{AB} = $= -W_{AB}$ $= n \cdot C_V \cdot \Delta T$ $= \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T$ $= \frac{3}{2} \cdot \Delta(p \cdot V)$	$Q_{AB}=0$
$W_{AB\Gamma\Delta A}$ = = εμβαδό κλειστής διαδρομής $= W_{AB}+W_{B\Gamma}+W_{\Gamma\Delta}+W_{\Delta A}$ $= Q_{AB\Gamma\Delta A}$ ▪ Σε δεξιόστροφο κύκλο : W>0 ▪ Σ' αριστερόστροφο κύκλο : W<0	$\Delta U_{AB\Gamma\Delta A}=0$	$Q_{AB\Gamma\Delta A}=W_{AB\Gamma\Delta A}$

Θερμικές Μηχανές

▪ Διάγραμμα Sankey για τη θερμική μηχανή.



– T_h : Θερμοκρασία θερμής δεξαμενής.

– T_C : Θερμοκρασία ψυχρής δεξαμενής.

– Q_h : Ποσό θερμότητας που απορροφάται ανά κύκλο λειτουργίας από τη θερμή δεξαμενή.

– Q_C : Ποσό θερμότητας που απορρίπτεται ανά κύκλο λειτουργίας στην ψυχρή δεξαμενή.

– W : Μηχανικό (ή ωφέλιμο) έργο ανά κύκλο λειτουργίας.

▪ Η διατήρηση της ενέργειας στη θερμική μηχανή.

$$Q_h=W+Q_C \Rightarrow W=Q_h-|Q_C|$$

▪ Συντελεστής απόδοσης (e) θερμικής μηχανής.

$$e=\frac{W}{Q_h}$$

$$e=1-\frac{|Q_C|}{Q_h}$$

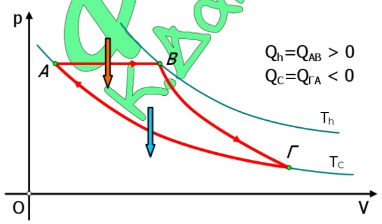
$$e=\frac{P}{P_h}$$

P : ωφέλιμη (μηχανική) ισχύς - P_h : δαπανώμενη ισχύς ανά κύκλο

▪ Απόδοση (α) θερμικής μηχανής.

$$\alpha=e\cdot 100\%$$

▪ Ο κύκλος μιας θερμικής μηχανής.



– Q_h : ΑΘΡΟΙΣΜΑ θετικών θερμοτήτων του κύκλου.

– Q_C : ΑΘΡΟΙΣΜΑ αρνητικών θερμοτήτων του κύκλου.

– $W=W_{AB\Gamma A}$: Ωφέλιμο (μηχανικό) έργο ανά κύκλο λειτουργίας (αριθμητικά όσο το εμβαδό της κυκλικής μεταβολής).

▪ Περίοδος (T) λειτουργίας μιας θερμικής μηχανής.

$$T=\frac{t}{N}$$

t : χρόνος λειτουργίας - N : κύκλοι σε χρόνο t

▪ Ωφέλιμη (ή μηχανική) ισχύς (P) μιας θερμικής μηχανής.

$$P=\frac{W}{T}$$

$$P=\frac{W}{\frac{t}{N}} \Rightarrow P=N\cdot\frac{W}{t}$$

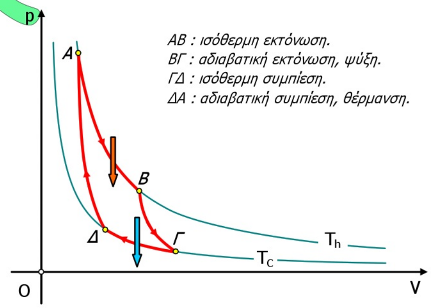
$$P=e\cdot P_h$$

W : έργο ενός κύκλου - T : χρόνος κάθε κύκλου (περίοδος λειτουργίας)

▪ Μηχανή Carnot.

Απ' όλες τις θερμικές μηχανές που λειτουργούν ανάμεσα στις ίδιες θερμοκρασίες, μεγαλύτερη απόδοση έχει πάντα η μηχανή Carnot.

▪ Ο κύκλος του Carnot.



▪ Θεώρημα του Carnot.

$$\frac{|Q_C|}{Q_h}=\frac{T_C}{T_h}$$

▪ Συντελεστής απόδοσης (e_{Carnot}) της μηχανής Carnot.

$$e_{Carnot}=1-\frac{T_C}{T_h}$$

Ο e_{Carnot} αυξάνεται όταν $T_C \to 0$ K και $T_h \to \infty$