

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

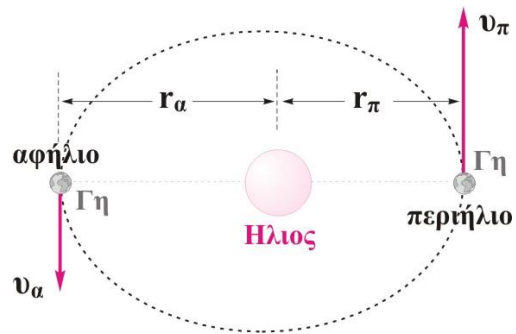
ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Η Γη στρέφεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Το κοντινότερο σημείο της τροχιάς στον Ήλιο ονομάζεται περιήλιο (π) και το πιο απομακρυσμένο αφήλιο (α). Αν θεωρήσουμε τη Γη υλικό σημείο, τότε για τις αντίστοιχες αποστάσεις ισχύει x

$$r_{\alpha} = \frac{21}{20} r_{\pi}$$

Για τις ταχύτητες διέλευσης της Γης από το αφήλιο και το περιήλιο ισχύει



α. $v_{\alpha} = \frac{21}{20} v_{\pi}$.

β. $v_{\alpha} = \frac{20}{21} v_{\pi}$.

γ. $v_{\alpha} = \left(\frac{21}{20}\right)^2 v_{\pi}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή είναι η απάντηση β.

Η δύναμη βαρύτητας που δέχεται η Γη από τον Ήλιο είναι κεντρική, οπότε δεν προκαλεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής, άρα κατά την κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο, η στροφορμή της διατηρείται.

$$L_{\alpha\phi\eta\lambda\iota\omicron} = L_{\pi\epsilon\rho\iota\eta\lambda\iota\omicron} \Rightarrow m v_{\alpha} r_{\alpha} = m v_{\pi} r_{\pi} \Rightarrow$$

$$v_{\alpha} = v_{\pi} \frac{r_{\pi}}{r_{\alpha}} \Rightarrow v_{\alpha} = v_{\pi} \frac{r_{\pi}}{\frac{21}{20} r_{\pi}} \Rightarrow v_{\alpha} = \frac{20}{21} v_{\pi}$$

Ερώτηση 2.

Η Γη στρέφεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Το κοντινότερο σημείο της τροχιάς στον Ήλιο ονομάζεται περιήλιο (π) και το πιο απομακρυσμένο αφήλιο (α). Αν θεωρήσουμε τη Γη υλικό σημείο τότε για τις αντίστοιχες αποστάσεις ισχύει

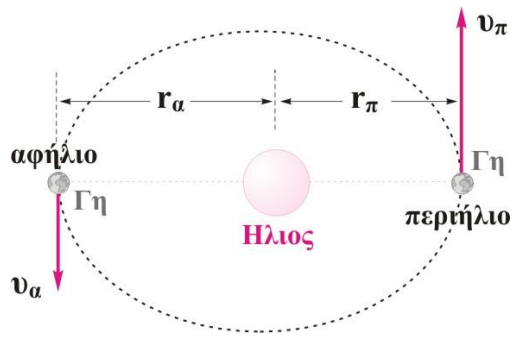
$$r_{\alpha} = \frac{21}{20} r_{\pi}.$$

Για τις κινητικές ενέργειες της Γης στη διέλευσή της από το αφήλιο και το περιήλιο ισχύει

α. $K_{\alpha} = \frac{21}{20} K_{\pi}.$

β. $K_{\alpha} = \left(\frac{20}{21}\right)^2 K_{\pi}.$

γ. $K_{\alpha} = \left(\frac{21}{20}\right)^2 K_{\pi}.$



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή είναι η απάντηση β.

Η δύναμη βαρύτητας που δέχεται η Γη από τον Ήλιο δεν προκαλεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής, επομένως κατά την κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο, η στροφορμή της διατηρείται.

$$L_{\alpha\phi\eta\lambda\iota\omicron} = L_{\pi\epsilon\rho\iota\eta\lambda\iota\omicron} \Rightarrow m v_{\alpha} r_{\alpha} = m v_{\pi} r_{\pi} \Rightarrow$$

$$v_{\alpha} = v_{\pi} \frac{r_{\pi}}{r_{\alpha}} \Rightarrow v_{\alpha} = v_{\pi} \frac{r_{\pi}}{\frac{21}{20} r_{\pi}} \Rightarrow v_{\alpha} = \frac{20}{21} v_{\pi} \quad (1)$$

Η κινητική ενέργεια της Γης δίνεται από τη σχέση $K = \frac{1}{2} m v^2.$

Επομένως

$$\frac{K_{\alpha}}{K_{\pi}} = \frac{\frac{1}{2} m v_{\alpha}^2}{\frac{1}{2} m v_{\pi}^2} = \frac{v_{\alpha}^2}{v_{\pi}^2} \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις (1), (2) παίρνουμε:

$$K_{\alpha} = \frac{v_{\alpha}^2}{v_{\pi}^2} K_{\pi} = \left(\frac{20}{21} \right)^2 K_{\pi}.$$

Ερώτηση 3.

Ένα σωματίο μάζας m περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα. Αν η απόσταση του σωματίου από τον άξονα διπλασιαστεί, χωρίς να μεταβληθεί η γωνιακή του ταχύτητα, η στροφορμή του ως προς τον άξονα περιστροφής:

- α) διπλασιάζεται.
- β) τετραπλασιάζεται.
- γ) παραμένει σταθερή.
- δ) υποδιπλασιάζεται.

Ποιά είναι η σωστή πρόταση; Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η β.

Ένα υλικό σημείο που εκτελεί κυκλική τροχιά έχει στροφορμή που βρίσκεται από τη σχέση $L = m \cdot v \cdot r$.

Επίσης η γραμμική ταχύτητα, v και η γωνιακή, ω , συνδέονται με τη σχέση $v = \omega \cdot r$.

Έτσι αν η αρχική ακτίνα είναι r_1 και η τελική r_2 μπορούμε να γράψουμε

$$L_1 = m \cdot v_1 \cdot r_1 = m(\omega \cdot r_1)r_1 \Rightarrow L_1 = m \cdot \omega \cdot r_1^2$$

$$L_2 = m v_2 r_2 = m(\omega r_2)r_2 \Rightarrow L_2 = m \omega r_2^2 \Rightarrow L_2 = m \omega (2r_1)^2 = m \omega r_1^2 \cdot 4$$

Άρα $L_2 = 4L_1$.

Συνεπώς, σωστή πρόταση είναι η β.

Ερώτηση 4.

Στα άκρα μιας οριζόντιας αβαρούς ράβδου μήκους ℓ βρίσκονται προσαρμοσμένοι δύο όμοιοι δακτύλιοι με ίσες μάζες $m_1 = m_2 = m$ οι οποίοι μπορούν να ολισθαίνουν πάνω στη ράβδο χωρίς τριβές. Οι δακτύλιοι αρχικά συγκρατούνται μέσω νήματος σε θέσεις που απέχουν μεταξύ τους d . Το σύστημα περιστρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της ράβδου που απέχει $d/2$ από κάθε δακτύλιο. Αν λόγω εσωτερικών δυνάμεων υποδιπλασιαστεί η απόσταση κάθε μάζας από τον άξονα περιστροφής, τότε η τάση του νήματος που συγκρατεί τους δακτυλίους

α) υποδιπλασιάζεται.

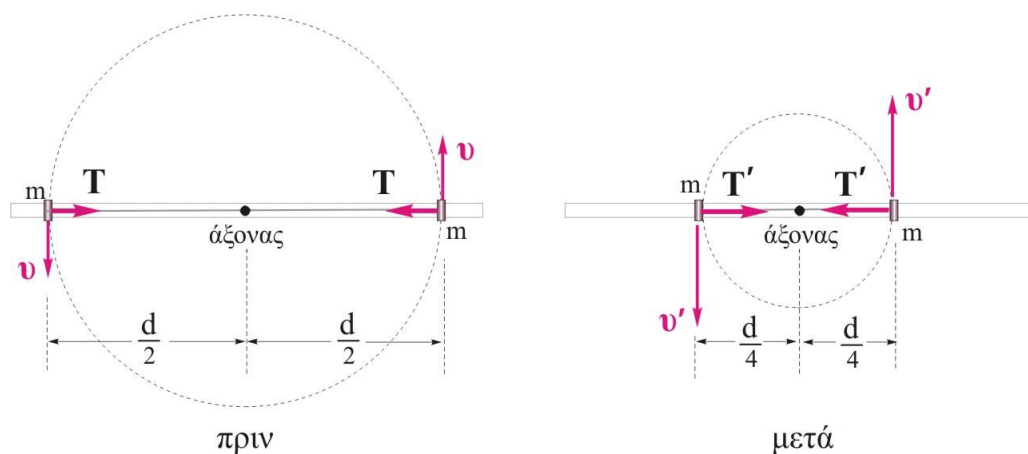
β) διπλασιάζεται.

γ) οκταπλασιάζεται.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή είναι η πρόταση γ.



Η τάση του νήματος δεν προκαλεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής, επομένως κατά την κίνηση των δακτυλίων, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται.

$$L = L' \Rightarrow 2 \cdot m v \frac{d}{2} = 2 \cdot m v' \frac{d}{4} \Rightarrow v' = 2v \quad (1)$$

Η τάση του νήματος T παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

Πριν τον υποδιπλασιασμό της απόστασης, η τάση του νήματος έχει μέτρο

$$T = m \frac{v^2}{\frac{d}{2}} = \frac{2mv^2}{d} \quad (2)$$

Μετά τον υποδιπλασιασμό της απόστασης, η τάση του νήματος έχει μέτρο

$$T' = m \frac{v'^2}{\frac{d}{4}} = \frac{16mv^2}{d} \Rightarrow T' = 8T$$

ΘΕΜΑ Γ

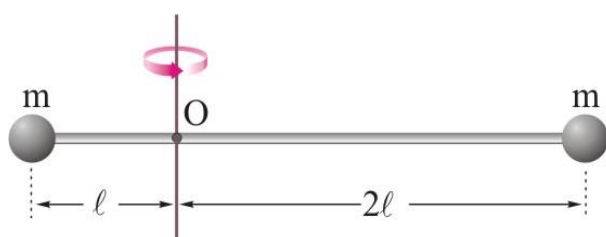
Άσκηση 1.

Δύο σημειακές σφαίρες που η καθεμιά έχει μάζα $m = 0,1\text{kg}$ συνδέονται μεταξύ τους με οριζόντια αβαρή ράβδο. Το σύστημα περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος τέμνει τη ράβδο σε σημείο O που απέχει από τη μία μάζα $\ell = 1\text{m}$ και από την άλλη $\ell' = 2\ell = 2\text{m}$. Το σύστημα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10\text{rad/s}$ αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

α) Να υπολογιστεί η στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής.

β) Να σχεδιαστεί το διάνυσμα της στροφορμής του συστήματος.

γ) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του συστήματος.



Λύση

α) Οι σφαίρες περιφέρονται με την ίδια φορά, επομένως η στροφορμή του συστήματος είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των στροφορμών των δύο σφαιρών ως προς τον άξονα περιστροφής.

$$L = L_1 + L_2 = m v_1 \ell + m v_2 2\ell \quad (1)$$

όπου v_1 και v_2 είναι τα μέτρα των γραμμικών ταχυτήτων των σφαιρών.

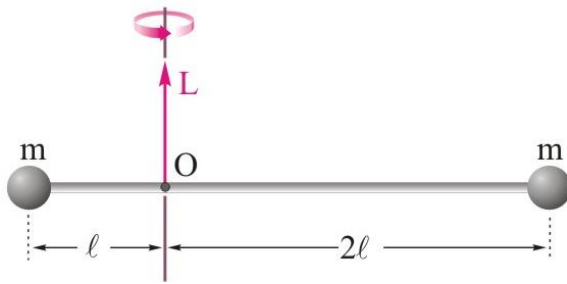
$$v_1 = \omega \ell = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 1\text{m} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = \omega 2\ell = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 2\text{m} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε

$$L = m v_1 \ell + m v_2 2\ell = 0,1\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1\text{m} + 0,1\text{kg} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2\text{m} \Rightarrow L = 5\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

β) Το διάνυσμα της στροφορμής σχεδιάζεται πάνω στον άξονα περιστροφής και η κατεύθυνσή του βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπως δείχνεται στο σχήμα.



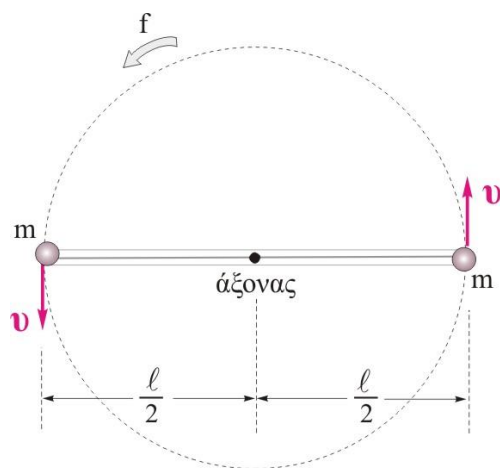
γ) Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των δύο μαζών.

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}0,1\text{kg} \cdot \left(10\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{1}{2}0,1\text{kg} \cdot \left(20\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$K = 25\text{J}$$

Άσκηση 2.

Δύο σημειακές μεταλλικές σφαίρες από σιδηρομαγνητικό υλικό, που η καθεμιά έχει μάζα $m = 0,05\text{kg}$ είναι τοποθετημένες σε μια πλαστική κούφια αβαρή ράβδο, μήκους $\ell = 1\text{m}$ με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές πάνω σε αυτή. Στο μέσον της ράβδου και εσωτερικά είναι τοποθετημένος ένας αβαρής ηλεκτρομαγνήτης τον οποίο μπορούμε να ενεργοποιούμε από απόσταση. Το σύστημα μπορεί να στρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της ράβδου όπως δείχνεται στο σχήμα (κάτοψη). Αρχικά ο ηλεκτρομαγνήτης είναι απενεργοποιημένος, το σύστημα στρέφεται με συχνότητα $f = \frac{10}{\pi}\text{Hz}$ και οι σφαίρες βρίσκονται στα άκρα της ράβδου συγκρατούμενες με λεπτό αβαρές νήμα που διατρέχει την κούφια ράβδο. Ενεργοποιούμε τον ηλεκτρομαγνήτη οπότε οι σφαίρες μετακινούνται ταυτόχρονα και πλησιάζουν σε απόσταση $\frac{\ell}{4}$ η καθεμιά από το μέσον της ράβδου Ο, όπου και σταματούν με τη βοήθεια κατάλληλου εσωτερικού μηχανισμού.



- Να υπολογιστεί η αρχική στροφορμή του συστήματος.
- Να υπολογιστεί η νέα συχνότητα περιστροφής του συστήματος.
- Πόσο τοις εκατό θα μεταβληθεί η συχνότητα περιστροφής του συστήματος μετά τη μετακίνηση των σφαιρών;
- Πόσο τοις εκατό θα μεταβληθεί η κινητική ενέργεια του συστήματος μετά τη μετακίνηση των σφαιρών;

Λύση

α) Οι σφαίρες περιφέρονται με την ίδια φορά, επομένως η στροφορμή του συστήματος είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των στροφορμών των δύο σφαιρών ως προς τον άξονα περισφοράς.

$$L = L_1 + L_2 = mv\frac{\ell}{2} + mv\frac{\ell}{2} = mv\ell \quad (1)$$

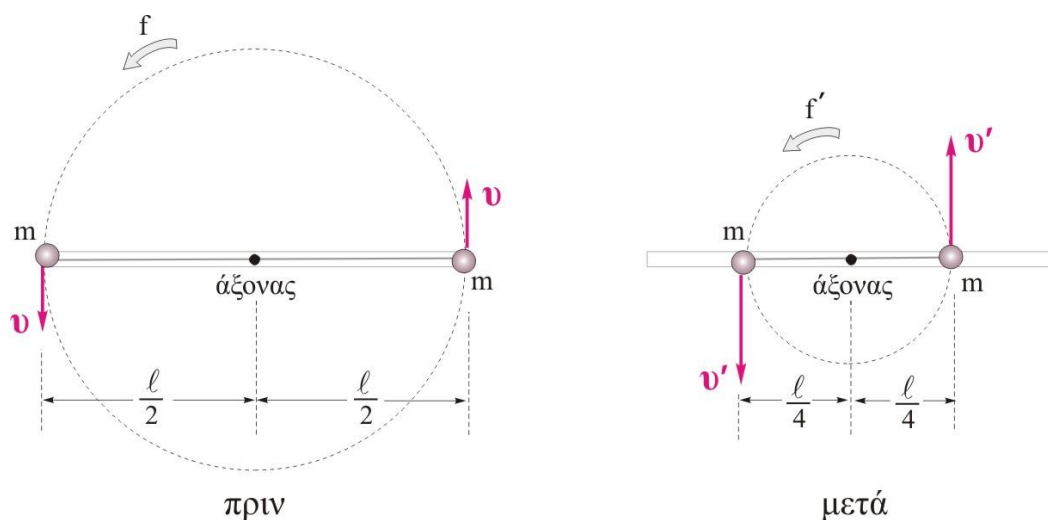
όπου $υ$ είναι το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας κάθε σφαίρας κατά την περιφορά της γύρω από τον άξονα. Το μέτρο της ταχύτητας κάθε σφαίρας είναι το ίδιο διότι οι σφαίρες ισαπέχουν από τον άξονα και είναι

$$υ = \omega R = 2\pi f \cdot \frac{\ell}{2} = 2\pi \cdot \frac{10}{\pi} \text{ Hz} \cdot \frac{1}{2} \text{ m} \Rightarrow υ = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε

$$L = mυ\ell = 0,05 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1 \text{ m} \Rightarrow L = 0,5 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

β) Η τάση του νήματος δεν προκαλεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής, επομένως κατά την κίνηση των σφαιρών στην αβαρή ράβδο, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται.



$$L = L' \Rightarrow 2 \cdot mυ \frac{\ell}{2} = 2mυ' \frac{\ell}{4} \Rightarrow υ' = 2υ = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η νέα συχνότητα περιφοράς είναι

$$f' = \frac{υ'}{2\pi \frac{\ell}{4}} = \frac{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\pi \frac{1}{4} \text{ m}} \Rightarrow f' = \frac{40}{\pi} \text{ Hz}$$

γ) Η επί τοις εκατό μεταβολή της συχνότητας περιστροφής του συστήματος μετά τη μετακίνηση των σφαιρών είναι:

$$\frac{\Delta f}{f} \% = \frac{f' - f}{f} 100\% = \frac{\frac{40}{\pi} \text{Hz} - \frac{10}{\pi} \text{Hz}}{\frac{10}{\pi} \text{Hz}} 100\% \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} \% = 300\%$$

δ) Η επί τοις εκατό μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος μετά τη μετακίνηση των σφαιρών είναι:

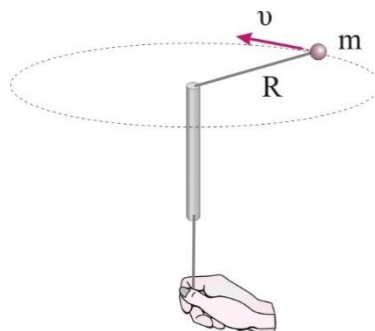
$$\frac{\Delta K}{K} \% = \frac{K' - K}{K} 100\% = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} m v'^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2}{2 \cdot \frac{1}{2} m v^2} 100\% = \frac{v'^2 - v^2}{v^2} 100\% \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta K}{K} \% = \frac{(2v)^2 - v^2}{v^2} 100\% = 300\%$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Ένα μικρό σώμα μάζας $m=0,5\text{kg}$ κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $R=1\text{m}$ σε ένα λείο οριζόντιο τραπέζι δεμένο στο άκρο ενός σχοινιού. Το σχοινί έχει αμελητέα μάζα και περνάει από μια μικρή τρύπα που υπάρχει στο τραπέζι και στο κέντρο της κυκλικής τροχιάς του σώματος όπως δείχνεται στο σχήμα. Κρατώντας ακίνητο το ελεύθερο άκρο του σχοινιού, κάτω από το τραπέζι, θέτουμε το σώμα σε στροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=6,28\text{rad/s}$.



Τραβάμε σιγά σιγά, το άκρο του σχοινιού μειώνοντας την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς,

μέχρι αυτή να γίνει $r = \frac{\sqrt{6,28}}{4} \text{m}$.

Να βρείτε:

- την τελική γωνιακή ταχύτητα του σώματος.
- το έργο που δαπανήσαμε τραβώντας το σχοινί.
- την ελάχιστη ακτίνα κυκλικής τροχιάς που μπορεί να διαγράψει το σώμα αν το σχοινί έχει όριο θραύσης $T_{\theta p}=157,75\text{N}$.

Λύση

α. Η δύναμη που ασκείται στο σώμα από το σχοινί έχει μηδενική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής οπότε η στροφορμή του συστήματος διατηρείται

$$L_1=L_2 \text{ ή } m\omega_0 R^2=m\omega r^2 \text{ ή}$$

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \quad (1) \quad \text{ή} \quad \omega = 16\text{rad/s}$$

β. Το σώμα παραμένει στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και δεν υπάρχουν τριβές. Έτσι το έργο που δαπανήσαμε είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος.

$$W = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 R^2$$

Η οποία με τη βοήθεια της (1) γίνεται

$$W = \frac{1}{2}m\omega_0^2 R^2 \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) = 15,2604\text{J}$$

γ. Η τάση του νήματος παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Ελάχιστη ακτίνα της τροχιάς έχουμε όταν $T=T_{\theta p}$.

$$T = F_c = m\omega^2 r \quad \text{đ} \quad T_{\theta p} = m \frac{R^4}{r^4} \omega_o^2 r \quad \text{đ}$$

$$r^3 = \frac{mR^4 \omega_o^2}{T_{op}} \quad \text{đ} \quad r^3 = \frac{0,5 \cdot 1 \cdot 6,28^2}{157,75} m^3 = \frac{1}{8} m^3 \quad \text{đ} \quad r = \frac{1}{2} m$$