

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

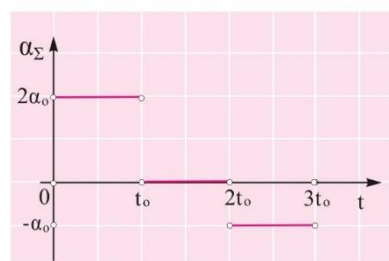
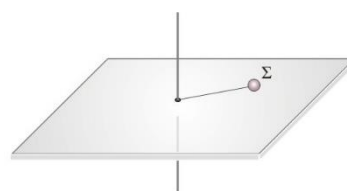
ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Το σφαιρίδιο Σ του σχήματος είναι αρχικά ακίνητο στο οριζόντιο λείο επίπεδο και δεμένο μέσω μη ελαστικού νήματος στον σταθερό κατακόρυφο άξονα. Τη χρονική στιγμή $t=0$ ασκείται σε αυτό κατάλληλη οριζόντια δύναμη και αυτό περιφερόμενο κυκλικά γύρω από τον άξονα σε σταθερή ακτίνα επιταχύνεται. Η αλγεβρική τιμή της γραμμικής επιτάχυνσης του σφαιριδίου σε σχέση με το χρόνο δίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



α) Για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq t_0$ το σφαιρίδιο περιστρέφεται με σταθερή στροφορμή.

β) Για το χρονικό διάστημα $t_0 < t \leq 2t_0$ το σφαιρίδιο έχει μηδενική στροφορμή.

γ) Για το χρονικό διάστημα $2t_0 < t \leq 3t_0$ το σφαιρίδιο περιστρέφεται με στροφορμή της οποίας το μέτρο μειώνεται συνεχώς.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή είναι η πρόταση (γ).

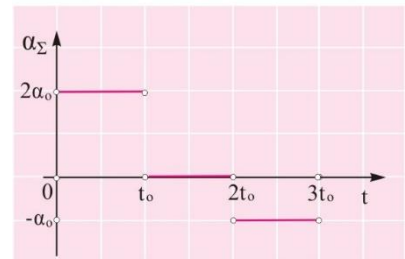
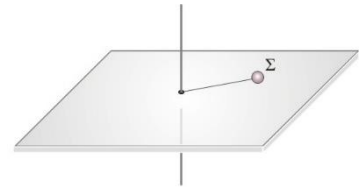
Στο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq t_0$ η γραμμική άρα και η γωνιακή επιτάχυνση του σφαιριδίου είναι σταθερή, άρα αυτό εκτελεί κυκλική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνεται. Επομένως το μέτρο της στροφορμής του σφαιριδίου αυξάνεται.

Στο χρονικό διάστημα $t_0 < t \leq 2t_0$ η γραμμική άρα και η γωνιακή επιτάχυνση του σφαιριδίου είναι μηδενική, άρα αυτό κινείται κυκλικά ομαλά έχοντας αποκτήσει μια ταχύτητα σταθερού μέτρου. Επομένως στο χρονικό αυτό διάστημα, το μέτρο της στροφορμής του είναι σταθερό και μη μηδενικό.

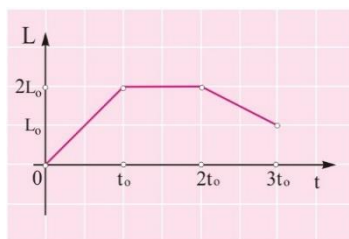
Στο χρονικό διάστημα $2t_0 < t \leq 3t_0$ η γραμμική άρα και η γωνιακή επιτάχυνση του σφαιριδίου είναι σταθερή και αρνητική, άρα αυτό επιβραδύνεται κινούμενο κυκλικά και το μέτρο της στροφορμής του μειώνεται.

Ερώτηση 2.

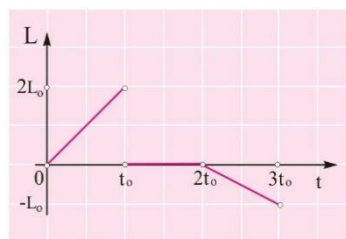
Το σφαιρίδιο Σ του σχήματος είναι αρχικά ακίνητο στο οριζόντιο λείο επίπεδο και δεμένο μέσω μη ελαστικού νήματος στον σταθερό κατακόρυφο άξονα. Τη χρονική στιγμή $t=0$ ασκείται σε αυτό κατάλληλη οριζόντια δύναμη και αυτό περιφερόμενο κυκλικά γύρω από τον άξονα σε σταθερή ακτίνα επιταχύνεται. Η αλγεβρική τιμή της γραμμικής επιτάχυνσης του σφαιριδίου σε σχέση με το χρόνο δίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



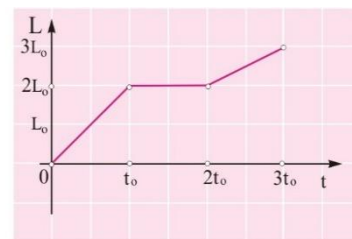
Η στροφορμή του σφαιριδίου σε συνάρτηση με το χρόνο είναι σωστά σχεδιασμένη στο διάγραμμα



(α)



(β)



(γ)

α. (α).

β. (β).

γ. (γ).

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστό είναι το διάγραμμα (α).

Από το διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου παρατηρούμε τα εξής:

Στο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq t_0$ η επιτάχυνση του σφαιριδίου είναι σταθερή, άρα αυτό εκτελεί κυκλική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με εξίσωση ταχύτητας

$v = 2\alpha_0 t$. Επομένως το μέτρο της στροφορμής του είναι

$$L = m \cdot v \cdot r \quad \text{ή} \quad L = m \cdot 2\alpha_0 t \cdot r \quad (\text{εξίσωση 1}^{\text{ου}} \text{ βαθμού, αύξουσα})$$

Στο χρονικό διάστημα $t_0 < t \leq 2t_0$ η γραμμική επιτάχυνση του σφαιριδίου είναι μηδενική, άρα αυτό κινείται κυκλικά ομαλά έχοντας αποκτήσει μια ταχύτητα σταθερού μέτρου. Επομένως στο χρονικό αυτό διάστημα, το μέτρο της στροφορμής του είναι σταθερό.

Στο χρονικό διάστημα $2t_0 < t \leq 3t_0$ η επιτάχυνση του σφαιριδίου είναι σταθερή και αρνητική, άρα αυτό επιβραδύνεται κινούμενο κυκλικά με εξίσωση ταχύτητας

$$v = v_0 - \alpha_0(t - 2t_0).$$

Επομένως το μέτρο της στροφορμής του είναι

$$L = m \cdot v \cdot r \quad \text{ή} \quad L = m \cdot [v_0 - \alpha_0(t - 2t_0)] \cdot r \quad (\text{εξίσωση 1}^{\text{ου}} \text{ βαθμού, φθίνουσα})$$

Τη χρονική στιγμή $3t_0$ το σφαιρίδιο θα έχει στροφορμή ίση με

$$L = m \cdot [2\alpha_0 t_0 - \alpha_0(3t_0 - 2t_0)] \cdot r \Rightarrow L = m\alpha_0 t_0 r = L_0$$

Επειδή στο χρονικό διάστημα $2t_0 < t \leq 3t_0$ το μέτρο της επιτάχυνσης είναι μικρότερο του μέτρου της επιτάχυνσης κατά την επιταχυνόμενη κίνησή του στο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq t_0$, τη χρονική στιγμή $3t_0$ το σφαιρίδιο θα συνεχίζει να επιβραδύνεται.

Όλα τα παραπάνω δείχνονται στο διάγραμμα (α).

Ερώτηση 3.

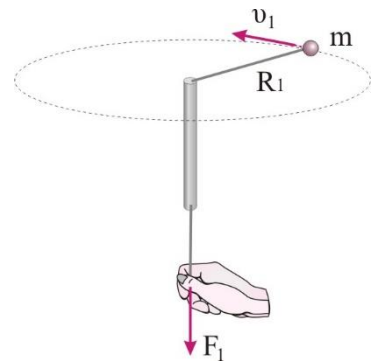
Το σφαιρίδιο του σχήματος διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας R_1 με γραμμική ταχύτητα μέτρου v_1 πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Τραβάμε το αβαρές σχοινί το οποίο περνά από το σωλήνα μέχρι η ακτίνα περιστροφής του σώματος να μειωθεί στο μισό. Θεωρούμε ότι σ' όλη τη διάρκεια του φαινομένου δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ του σχοι-νιού και του σωλήνα. Αν το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο χέρι μας όταν το σφαιρίδιο κινείται κυκλικά σε τροχιά ακτίνας R_1 είναι F_1 , το μέτρο της δύναμης F_2 που ασκείται στο χέρι μας όταν η ακτίνα περιστροφής R_2 μειωθεί στο μισό είναι

α. $2F_1$.

β. $4F_1$.

γ. $8F_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.



Λύση

Σωστό είναι το (γ).

Η δύναμη F μεταφέρεται μέσω του νήματος στο σφαιρίδιο και παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

$$F_1 = m \frac{v_1^2}{R_1}, \quad (1)$$

Η δύναμη F είναι κάθετη στην ταχύτητα περιστροφής και δεν προκαλεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής, επομένως η στροφορμή του σφαιριδίου διατηρείται.

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \Rightarrow m v_1 R_1 = m v_2 R_2 \Rightarrow v_1 R_1 = v_2 \frac{R_1}{2} \Rightarrow v_2 = 2 v_1$$

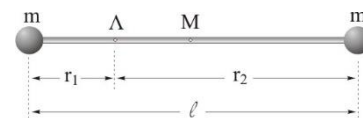
το μέτρο της δύναμης F_2 που ασκείται στο χέρι μας όταν η ακτίνα περιστροφής μειωθεί στο μισό είναι

$$F_2 = m \frac{v_2^2}{R_2} = m \frac{(2v_1)^2}{\frac{R_1}{2}} \Rightarrow F_2 = 8F_1$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ένας αλτήρας αποτελείται από δύο σημειακά σώματα με μάζες $m=1\text{kg}$ το καθένα, συνδεδεμένα με αβαρή ράβδο μήκους $\ell=0,3\text{m}$. Ο αλτήρας μπορεί να στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται είτε από το μέσο M της ράβδου, είτε από το σημείο Λ που απέχει $r_1=0,1\text{m}$ από τη μια σφαίρα. Το σύστημα τίθεται σε περιστροφή με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega=10\text{rad/s}$, αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού. Να υπολογιστεί η στροφορμή του συστήματος, όταν η περιστροφή γίνεται γύρω από τον άξονα που διέρχεται από



- α. το σημείο Λ .
- β. το μέσο M της ράβδου.

Λύση

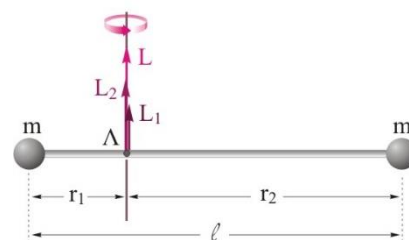
α. Η στροφορμή της μιας σφαίρας έχει μέτρο

$$L_{1(A)} = m v_1 r_1$$

Αλλά $v_1 = \omega r_1$, οπότε $L_{1(A)} = m \omega r_1^2$

Όμοια, το μέτρο της στροφορμής της άλλης σφαίρας είναι

$$L_{2(A)} = m \omega r_2^2$$



Τα διανύσματα $\mathbf{L}_1$ και $\mathbf{L}_2$ έχουν και τα δύο φορά προς τα πάνω, οπότε η συνολική στροφορμή του συστήματος έχει μέτρο

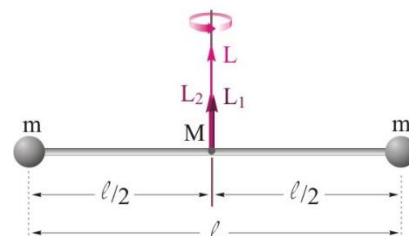
$$L_A = L_{1(A)} + L_{2(A)} \Rightarrow L_A = m \omega r_1^2 + m \omega r_2^2 \Rightarrow L_A = m \omega (r_1^2 + r_2^2) \quad \text{ή}$$

$$L_A = 1\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} (0,1^2 + 0,2^2) \text{m}^2 \Rightarrow L_A = 0,5 \text{ kg m}^2 / \text{s}$$

β. Όμοια εργαζόμενοι βρίσκουμε:

$$L_{(B)} = m \omega \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + m \omega \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \Rightarrow L_{(B)} = 0,45 \text{ kg m}^2 / \text{s}$$

Παρατηρούμε ότι η στροφορμή εξαρτάται από τον άξονα περιστροφής.

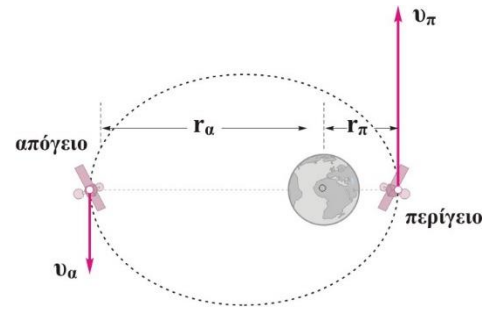


Άσκηση 2.

Ένας τεχνητός δορυφόρος περιστρέφεται γύρω από τη Γη όπως δείχνεται στην εικόνα. Το πλησιέστερο σημείο της τροχιάς του δορυφόρου (περίγειο) απέχει από το κέντρο της Γης $r_{\pi}=8,42 \cdot 10^6 \text{m}$ και το απώτερο σημείο (απόγειο) $r_{\alpha}=25,26 \cdot 10^6 \text{m}$. Ο δορυφόρος διέρχεται από το περίγειο με ταχύτητα $v_{\pi}=6.900 \text{m/s}$.

α. Να εξηγηθεί γιατί η στροφορμή του δορυφόρου ως προς το κέντρο της Γης παραμένει χρονικά σταθερή.

β. Να βρεθεί η ταχύτητα διέλευσης του δορυφόρου από το απόγειο.



Λύση

α. Η βαρυτική δύναμη που ασκεί η Γη στο δορυφόρο δεν προκαλεί ροπή, επειδή ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο του δορυφόρου. Αν αγνοήσουμε τις πολύ μικρές δυνάμεις που ασκούν τα άλλα ουράνια σώματα στο δορυφόρο, τότε για τον δορυφόρο ισχύει $\Sigma \tau = 0$, άρα η στροφορμή του θα διατηρείται σταθερή.

β.

$$L = \text{σταθ.} \quad \text{ή} \quad L_{\text{απόγειο}} = L_{\text{περίγειο}}. \quad (1)$$

Θεωρώντας το δορυφόρο υλικό σημείο, η στροφορμή του δίνεται από τη σχέση $L = mvr$ και η σχέση (1) γράφεται:

$$m v_{\alpha} r_{\alpha} = m v_{\pi} r_{\pi} \Rightarrow v_{\alpha} = v_{\pi} \frac{r_{\pi}}{r_{\alpha}} = 6.900 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{8,42 \cdot 10^6 \text{m}}{25,26 \cdot 10^6 \text{m}} \Rightarrow v_{\alpha} = 2.300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα του δορυφόρου είναι ανεξάρτητη της μάζας του και ελαττώνεται, όταν αυξάνεται η ακτίνα περιστροφής.

Σχόλιο: Ο Kepler, στο 2^ο νόμο του για τις κινήσεις των ουρανίων σωμάτων, στηριζόμενος στη διατήρηση της στροφορμής, απέδειξε ότι τα ουράνια σώματα κινούνται γύρω από τον Ήλιο με τέτοια ταχύτητα ώστε η επιβατική τους ακτίνα να διαγράφει σε ίσους χρόνους ίσα εμβαδά.

