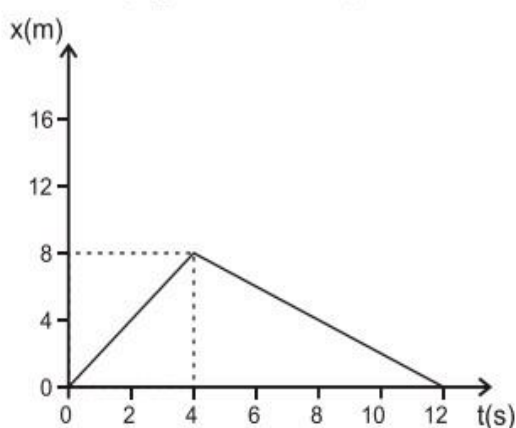
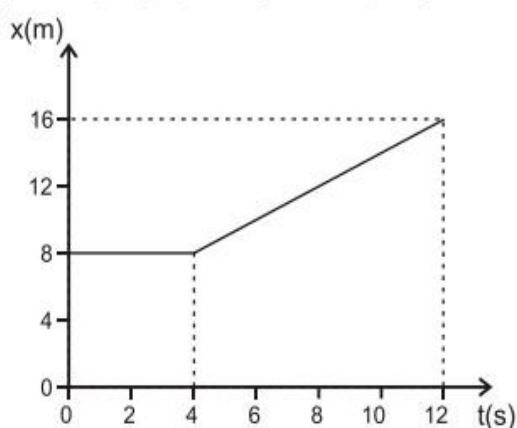


ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

1. Δύο σώματα αμελητέων διαστάσεων με μάζες m_1 και m_2 συγκρούονται κεντρικά σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η θέση x κάθε σώματος στην ευθεία γραμμή, που τα ενώνει, μετρείται από κοινή αρχή. Η γραφική παράσταση της θέσης του σώματος m_1 φαίνεται στο Σχήμα 4 και του σώματος m_2 στο Σχήμα 5. Δίνεται ότι $m_1 = 1\text{kg}$ και ότι η διάρκεια της επαφής των δύο σωμάτων κατά την κεντρική κρούση είναι αμελητέα. Η κρούση των δύο σωμάτων είναι:



Σχήμα 4



Σχήμα 5

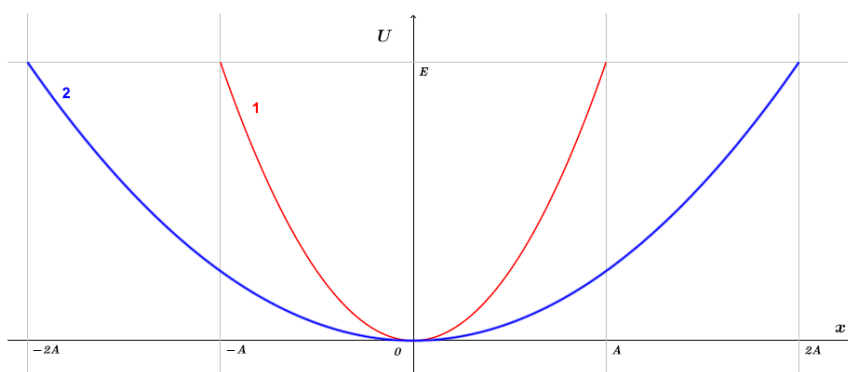
α. Ελαστική

β. ανελαστική

γ. Πλαστική

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. **Επαναληπτικές Πανελλήνιες - Ιούνης 2015.**

2. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα διαγράμματα της δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας για δύο συστήματα μάζας ελατηρίου που εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση. Αν γνωρίζουμε ότι οι περίοδοι ταλάντωσης συνδέονται με τη σχέση $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2}$, τότε ο λόγος των μαζών $\frac{m_1}{m_2}$ είναι:



των μαζών $\frac{m_1}{m_2}$ είναι:

α. 2

β. 1

γ. 1/2

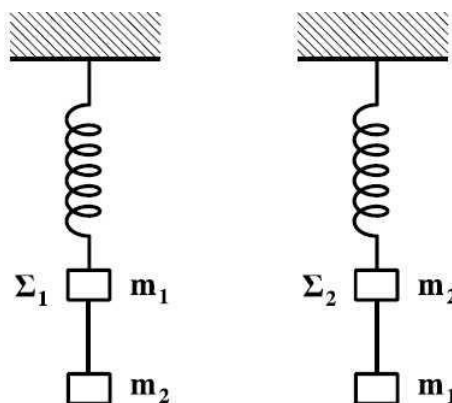
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

3. Ένα σώμα μάζας $m = 1\text{ kg}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση της οποίας η απομάκρυνση περιγράφεται από τη σχέση $x = 0,2\eta\mu(4\pi t)(\text{S.I.})$. Η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x περιγράφεται από την σχέση :

(α) $K = 0,4\pi^2 x^2 (\text{S.I.})$ (β) $K = 0,1\pi^2 - 16\pi^2 x^2 (\text{S.I.})$ (γ) $K = 0,32\pi^2 - 8\pi^2 x^2 (\text{S.I.})$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας, στην συνέχεια σχεδιάστε την συνάρτηση σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες.

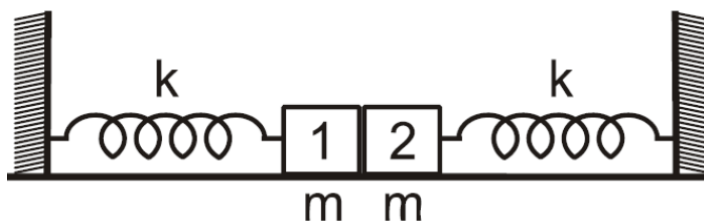
4. Δύο όμοια ιδανικά ελατήρια κρέμονται από δύο ακλόνητα σημεία. Στα κάτω άκρα των ελατηρίων δένονται σώματα Σ_1 μάζας m_1 και Σ_2 μάζας m_2 . Κάτω από το σώμα Σ_1 δένουμε μέσω αβαρούς νήματος άλλο σώμα μάζας m_2 , ενώ κάτω από το Σ_2 σώμα μάζας m_1 ($m_1 \neq m_2$), όπως φαίνεται στο σχήμα. Αρχικά τα σώματα είναι ακίνητα. Κάποια στιγμή κόβουμε τα νήματα και τα σώματα αρχίζουν να ταλαντώνονται. Αν η ενέργεια της ταλάντωσης του Σ_1 είναι E_1 και του Σ_2 είναι E_2 τότε ισχύει:



α. $\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1}{m_2}$ β. $\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}$ γ. $\frac{E_1}{E_2} = 1$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

5. Δύο όμοια σώματα, ίσων μαζών m το καθένα, συνδέονται με όμοια ιδανικά ελατήρια σταθεράς k το καθένα, των οποίων τα άλλα άκρα είναι συνδεδεμένα σε ακλόνητα σημεία, όπως στο σχήμα. Οι άξονες των δύο ελατηρίων βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τα ελατήρια βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος l_0 και το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο βρίσκονται είναι λείο.



Μετακινούμε το σώμα 1 προς τα αριστερά κατά d και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Το σώμα 1 συγκρούεται πλαστικά με το σώμα 2. Το συσσωμάτωμα που προκύπτει εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = 2k$. Αν A_1 το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος 1 πριν τη κρούση και A_2 το πλάτος του συσσωματώματος μετά την κρούση, τότε ο λόγος $\frac{A_1}{A_2}$ είναι:

α. 1

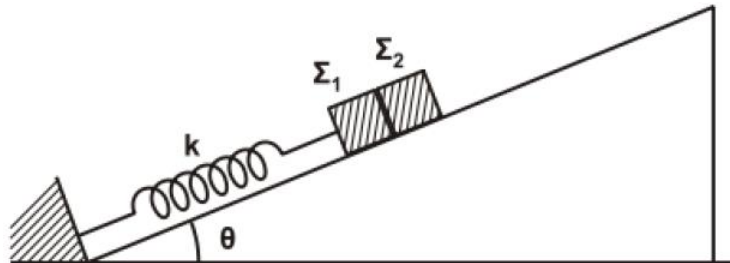
β. $\frac{1}{2}$

γ. 2

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Πανελλήνιες - Ιούνης 2014

6. Σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ είναι τοποθετημένα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, που εφάπτονται μεταξύ τους. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k , ενώ το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Μετακινώντας τα δύο σώματα προς τα κάτω, το σύστημα τίθεται σε ταλάντωση πλάτους A . Η συνθήκη για να μην αποχωριστεί το Σ_1 από το Σ_2 είναι:



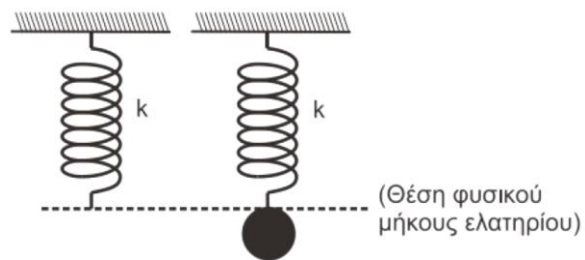
Σχήμα 2

- (α) $Ak < (m_1 + m_2)g\eta\mu\theta$
 (β) $Ak > (m_1 + m_2)g\eta\mu\theta$
 (γ) $Ak > (m_1 + m_2)^2g\eta\mu\theta$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Πανελλήνιες - Ιούνης 2015.

7. Ένα κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k έχει το άνω άκρο του στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο και βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και ενώ αυτό βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους, στερεώνεται μάζα m . Από τη θέση αυτή το σύστημα αφήνεται ελεύθερο και αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου κατά τη διάρκεια της απλής αρμονικής ταλάντωσης του σώματος είναι ίση με :



Σχήμα 1

α. $\frac{m^2 g^2}{k}$

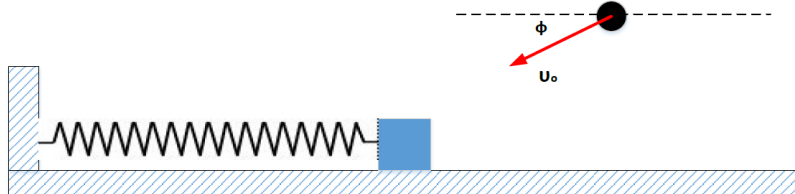
β. $\frac{2m^2 g^2}{k}$

γ. $\frac{m^2 g^2}{2k}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Πανελλήνιες - Ιούνης 2017

8. Βλήμα μάζας m κινούμενο με ταχύτητα u_0 , που σχηματίζει γωνία ϕ ως προς τον οριζόντα σφηνώνεται σε ακίνητο σώμα μάζας M το οποίο είναι στερεωμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k , το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου μετά την κρούση είναι:



(α) $\Delta l = \frac{mv_0 \sin \phi}{\sqrt{k(M+m)}}$ (β) $\Delta l = \sqrt{\frac{M+m}{k}} v_0 \sin \phi$ (γ) $\Delta l = \sqrt{\frac{k}{M+m}} v_0 \sin \phi$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

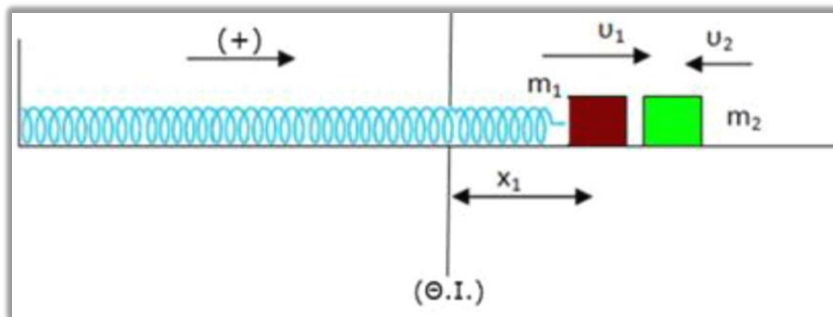
9. Ένα σώμα μάζας $m_1=4\text{Kg}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

πλάτους $A=\sqrt{\frac{5}{4}}\text{m}$

πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στην άκρη

οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 16\text{N/m}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ που το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_1 = 1\text{m}$ και κινείται από τη θέση ισορροπίας προς τη θέση μέγιστης απομάκρυνσης συγκρούεται ελαστικά με δεύτερο σώμα μάζας $m_2 = 12\text{kg}$ που κινείται με ταχύτητα μέτρου $u_2 = 1\text{m/s}$ αντίθετης φοράς από αυτή της u_1 . Να υπολογίσετε:

- (α) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος m_1 ελάχιστα πριν την κρούση.
 (β) τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την ελαστική κρούση.
 (γ) το νέο πλάτος της ταλάντωσης του σώματος m_1 .
 (δ) το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του m_1 όταν αυτό βρίσκεται στη νέα ακραία θέση της ταλάντωσης του.

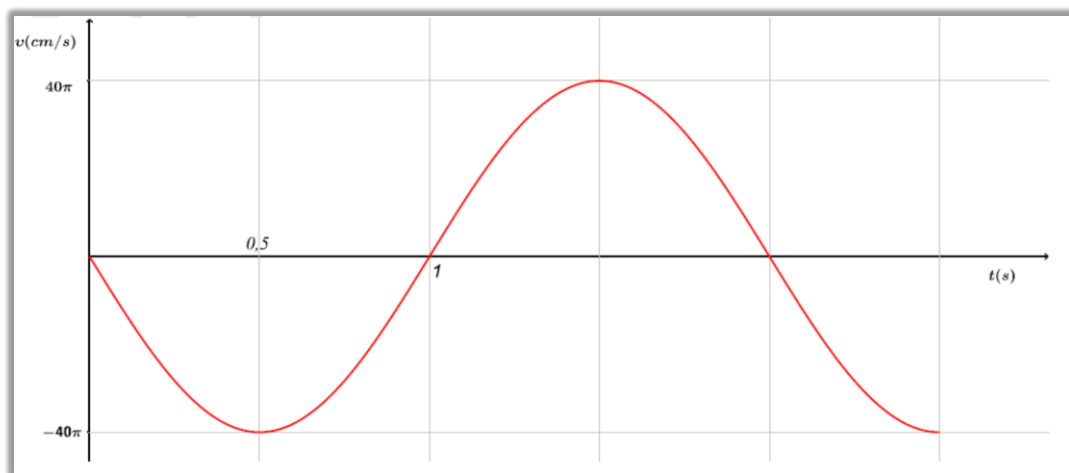


10. Μια σφαίρα μάζας $m = 2\text{kg}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γωνιακής συχνότητας $\omega = 10\text{rad/s}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση όπου έχει τη μέγιστη τιμή της δύναμης επαναφοράς της ταλάντωσης $F_{\max} = +20\text{N}$.
 (α) Να υπολογίσετε τη περίοδο και το πλάτος της ταλάντωσης
 (β) Να γράψετε τη συνάρτηση απομάκρυνσης – χρόνου και να την παραστήσετε γραφικά σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες. Η αρχική φάση έχει πεδίο τιμών $[0, 2\pi)$.
 (γ) Να βρείτε την ταχύτητα της σφαίρας τη στιγμή $t_1 = 4\text{sec}$.

(δ) Να βρείτε τη δυναμική και την κινητική ενέργεια ταλάντωσης της σφαίρας τη στιγμή t_1 .

- 11.** Ένα σώμα μάζας $m=2\text{Kg}$, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η απόσταση των ακραίων θέσεων του υλικού σημείο είναι $d=0,4\text{m}$ και τη χρονική στιγμή $t_0=0$ διέρχεται από τη θέση $x_1=0,1\text{m}$, έχοντας ταυτόχρονα ταχύτητα μέτρου $v_1=2\sqrt{3}\text{ m/s}$ με φορά προς τη θέση ισορροπίας του.
- α)** Να υπολογίσετε το πλάτος A και τη σταθερά επαναφοράς D της ταλάντωσης.
- (β)** Να παραστήσετε γραφικά την Κινητική του ενέργεια σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του, σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες στο S.I.
- (γ)** Να υπολογίσετε την γωνιακή συχνότητα ω και την αρχική φάση της φ_0 ταλάντωσης. Η αρχική φάση έχει πεδίο τιμών $[0,2\pi)$.
- (δ)** Να βρείτε ποια χρονική στιγμή περνά, για πρώτη φορά, από την ακραία θετική θέση.

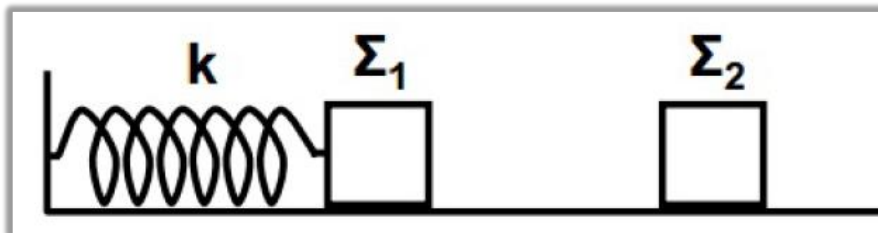
- 12.** Το διάγραμμα του σχήματος παριστάνει την ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο ενός σώματος μάζας $m = 0,5\text{kg}$, που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



- (α)** Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα ω και το πλάτος A της ταλάντωσης.
- (β)** Να βρείτε την αρχική φάση της ταλάντωσης.
- (γ)** Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της συνισταμένης δύναμης, που δέχεται το σώμα. ($\pi^2 \approx 10$)
- (δ)** Να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης στις θέσεις όπου η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης είναι το 75% της ολικής ενέργειας.
- 13.** Σώμα Σ_1 μάζας $M = 3\text{kg}$, είναι στερεωμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\text{N/m}$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου στηρίζεται σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πάνω

σε λείο οριζόντιο επίπεδο με πλάτος $A = 0,2m$. Κατά την διάρκεια της

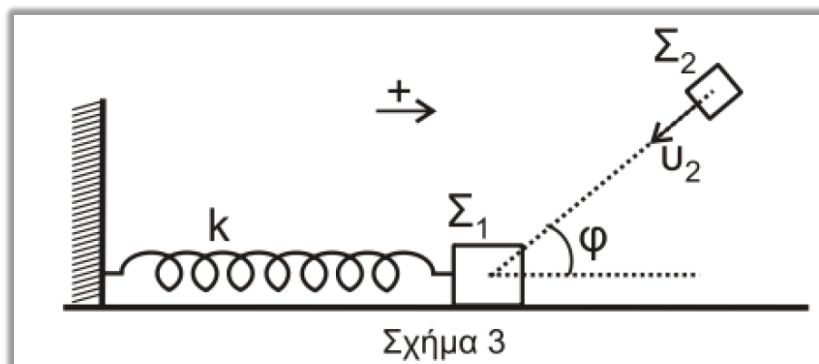
ταλάντωσης το σώμα Σ_1 συγκρούεται πλαστικά και κεντρικά με άλλο ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας



$m = 1kg$. Η κρούση συμβαίνει στη θέση $x = \frac{A}{2}$, όταν το σώμα Σ_1 κινείται προς τα δεξιά. Να υπολογίσετε:

- (α) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση.
- (β) Το ποσοστό ελάττωσης (επί τοις εκατό) της κινητικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων λόγω της κρούσης.
- (γ) Το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος μετά την κρούση.
- (δ) Την απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

14. Σώμα Σ_1 , μάζας $m_1 = 1kg$, είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100N/m$ το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική



ταλάντωση, πλάτους $A = 0,4m$, σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή

που το σώμα Σ_1 έχει απομάκρυνση $x_1 = \frac{A\sqrt{3}}{2}$, κινούμενο κατά τη θετική φορά, συγκρούεται πλαστικά με σώμα Σ_2 , μάζας $m_2 = 3kg$. Το σώμα Σ_2 κινείται, λίγο πριν τη κρούση, με ταχύτητα $u_2 = 8m/s$ σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία φ (συν $\varphi = 1/3$) με το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Το συσσωμάτωμα που προκύπτει μετά τη κρούση, εκτελεί α.α.τ.

- α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος Σ_1 λίγο πριν την κρούση και την ταχύτητα του συσσωματώματος, αμέσως μετά την κρούση.
- β) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
- γ) Να εκφράσετε την κινητική ενέργεια του συσσωματώματος σε συνάρτηση με την απομάκρυνση. Να σχεδιάσετε (με στυλό) σε βαθμολογημένους άξονες την κινητική ενέργεια του συσσωματώματος σε συνάρτηση με την απομάκρυνση.
- δ) Να υπολογίσετε το ποσοστό επί τοις εκατό (%) της κινητικής ενέργειας

του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , ακριβώς πριν την κρούση που μετατράπηκε σε θερμότητα, κατά την κρούση.

Να θεωρήσετε θετική την φορά που φαίνεται στο σχήμα και την διάρκεια της κρούσης αμελητέα.

Επαναληπτικές Πανελλήνιες - Ιούλης 2016

15. Το σύστημα των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , ίσων μαζών $m_1 = m_2 = 10\text{kg}$, ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$. Τα σώματα έχουν αμελητέες διαστάσεις. Το Σ_1 είναι δεμένο στο ελατήριο, ενώ αβαρές νήμα μικρού μήκους συνδέει τα Σ_1 και Σ_2 . Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κόβουμε το νήμα που συνδέει τα δύο σώματα, οπότε το Σ_1 αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

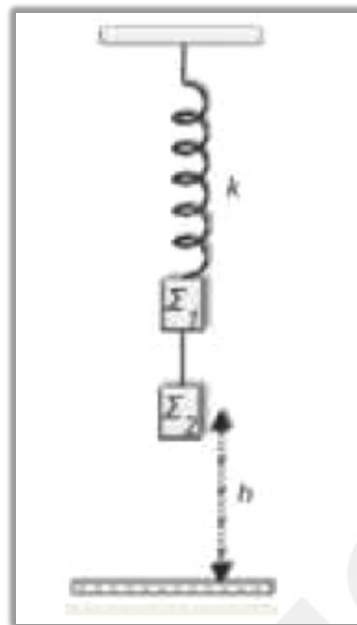
(α) Να προσδιορίσετε τη θέση ισορροπίας του συστήματος των Σ_1 Σ_2 και στη συνέχεια τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του Σ_1 μετά το κόψιμο του νήματος.

(β) Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης A καθώς και την ολική της ενέργεια E .

(γ) Θεωρώντας θετική φορά την προς τα πάνω, να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης $x - \text{χρόνου } t$. Στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες, στη διάρκεια της 1ης περιόδου.

(δ) Αν το σώμα Σ_2 έχει ως προς το δάπεδο, που βρίσκεται κάτω του, στη θέση ισορροπίας του συστήματος, βαρυτική δυναμική ενέργεια $U_{\text{βαρ}} = 180\text{J}$, να βρείτε ποιο απ' τα δύο θα φτάσει πρώτο : το Σ_2 στο έδαφος ή το Σ_1 στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του.

Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$. Θεωρήστε ότι: $\pi^2 = 10$.



16. ΧΑΣΙΜΟ ΕΠΑΦΗΣ

Το κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\text{N/m}$ είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο. Στο πάνω άκρο του είναι δεμένος δίσκος Σ_1 μάζας $m_1 = 0,8\text{kg}$. Πάνω στο δίσκο είναι τοποθετημένος κύβος Σ_2 μάζας $m_2 = 0,2\text{kg}$. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί. Πιέζουμε το σύστημα κατακόρυφα προς τα κάτω μεταφέροντας ενέργεια στο σύστημα ίση με $E = 2\text{J}$ και το αφήνουμε ελεύθερο.

(α) Να βρείτε το πλάτος ταλάντωσης A του συστήματος, τη γωνιακή συχνότητα ω καθώς και το χρόνο Δt στον οποίο θα περάσει για 1η φορά απ' τη θέση ισορροπίας του.

(β) Να γράψετε τη συνάρτηση της δύναμης επαφής N , που δέχεται ο κύβος από το δίσκο Σ_1 , σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του.

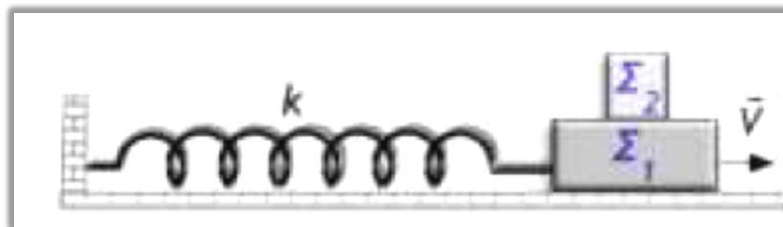
(γ) Να υπολογίσετε την απόσταση y από τη Θέση ισορροπίας του, στην

οποία ο κύβος θα χάσει την επαφή με το δίσκο

(δ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κύβου τη χρονική στιγμή, που εγκαταλείπει το δίσκο και το ύψος στο οποίο θα φθάσει πάνω από τη θέση που εγκαταλείπει το δίσκο.

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και $g = 10\text{m/s}^2$.

17. Το αριστερό άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400\text{N/m}$ στερεώνεται ακλόνητα και στο δεξιό άκρο του προσδένεται σώμα



Σ_1 μάζας $m_1 = 3\text{kg}$, το οποίο μπορεί να κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Πάνω στο Σ_1 τοποθετείται δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 1\text{kg}$. Εκτοξεύουμε προς τα δεξιά το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του, με ταχύτητα μέτρου V και παράλληλη με το οριζόντιο επίπεδο, όπως στο σχήμα, οπότε το σύστημα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση. Τα δυο σώματα διατηρούν την επαφή στη διάρκεια της ταλάντωσης.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης καθώς και τις σταθερές ταλάντωσης $D_{ολ}$, D_1 και D_2 του συστήματος και των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα.

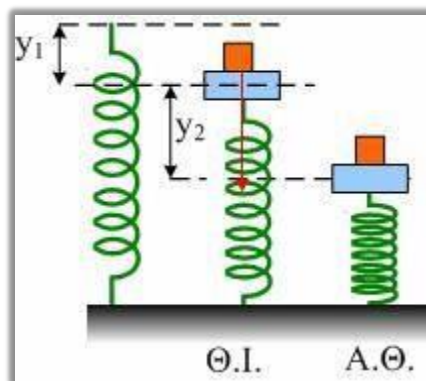
(β) Να τοποθετήσετε το σύστημα σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσης του, να σχεδιάσετε και να περιγράψετε σε τρία κατάλληλα σχήματα τις δυνάμεις, που δέχονται: (i) το σύστημα $\Sigma_1 - \Sigma_2$, (ii) το Σ_1 και (iii) το Σ_2 .

(γ) Να παραστήσετε γραφικά την αλγεβρική τιμή της στατικής τριβής από το Σ_1 στο Σ_2 σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του, για πλάτος ταλάντωσης $A = 3\text{cm}$.

(δ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της αρχικής ταχύτητας εκτόξευσης V_{max} , του συστήματος των Σ_1 , Σ_2 ώστε το σώμα Σ_2 να μην ολισθήσει πάνω στο σώμα Σ_1 .

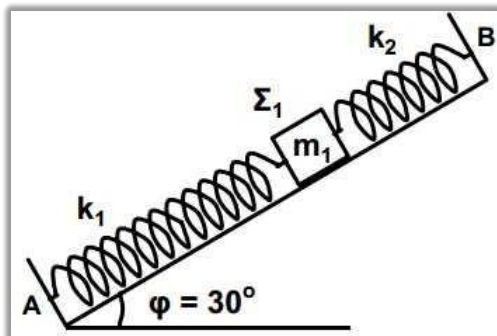
Δίνεται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$ και ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι $\mu_s = 0,5$.

18. Το ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου είναι στερεωμένο σε οριζόντιο επίπεδο. Στο άλλο άκρο του συνδέεται σταθερά σώμα Α μάζας $M = 3\text{kg}$. Πάνω στο σώμα Α είναι τοποθετημένο σώμα Β μάζας $m = 1\text{kg}$ και το σύστημα ισορροπεί με το ελατήριο συσπειρωμένο από το φυσικό του μήκος κατά $y_1 = 0,4\text{m}$. Στη συνέχεια εκτρέπουμε το σύστημα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $y_2 = 0,8\text{m}$ από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο τη χρονική στιγμή $t = 0$.



- (α) Να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητα ω της ταλάντωσης του συστήματος και τη σταθερά επαναφοράς D κάθε μιας μάζας ξεχωριστά.
 (β) Να δείξετε ότι το σώμα Β θα εγκαταλείψει το σώμα Α και να βρείτε τη θέση και την ταχύτητα του τότε.
 Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

19. Λείο κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης $\varphi = 30^\circ$. Στα σημεία Α και Β στερεώνουμε τα άκρα δύο ιδανικών ελατηρίων με σταθερές $k_1 = 60\text{N/m}$ και $k_2 = 140\text{N/m}$ αντίστοιχα. Στα ελεύθερα άκρα των ελατηρίων, δένουμε σώμα Σ_1 , μάζας $m_1 = 2\text{kg}$ και το κρατάμε στη θέση όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος (όπως φαίνεται στο σχήμα). Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνουμε το σώμα Σ_1 ελεύθερο.



(α) Να αποδείξετε ότι το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

(β) Να γράψετε τη σχέση που δίνει την απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο. Να θεωρήσετε θετική φορά τη φορά από το Α προς το Β.

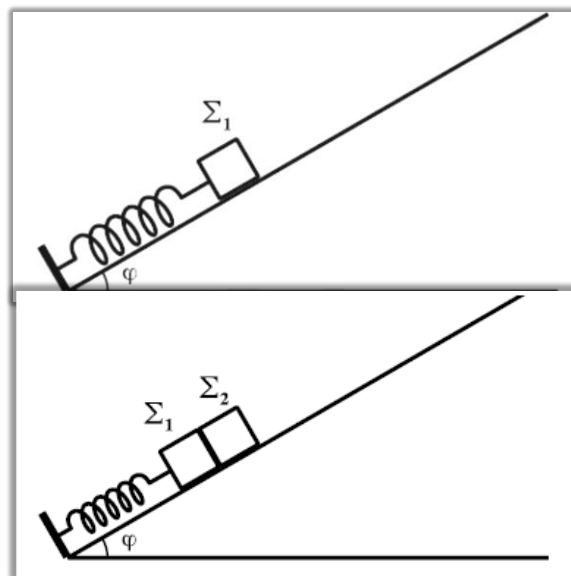
Κάποια χρονική στιγμή που το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην αρχική του θέση, τοποθετούμε πάνω του (χωρίς αρχική ταχύτητα) ένα άλλο σώμα Σ_2 μικρών διαστάσεων μάζας $m_2 = 6\text{kg}$. Το σώμα Σ_2 δεν ολισθαίνει πάνω στο σώμα Σ_1 λόγω της τριβής που δέχεται από αυτό. Το σύστημα των δύο σωμάτων κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

(γ) Να βρείτε τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 .

(δ) Να βρείτε τον ελάχιστο συντελεστή οριακής στατικής τριβής που πρέπει να υπάρχει μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , ώστε το Σ_2 να μην ολισθαίνει σε σχέση με το Σ_1 .

Πανελλήνιες Εξετάσεις - Μάης 2012

20. Σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1\text{kg}$ ισορροπεί πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία $\varphi = 30^\circ$. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο στην άκρη ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\text{N/m}$ το άλλο άκρο του οποίου στερεώνεται στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Εκτρέπουμε το σώμα Σ_1 κατά $d_1 = 0,1\text{m}$ από τη θέση ισορροπίας του κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και το αφήνουμε ελεύθερο.



(α) Να αποδείξετε ότι το σώμα Σ_1

εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

(β) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του μέτρου του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_1 .

Μετακινούμε το σώμα Σ_1 προς τα κάτω κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου μέχρι το ελατήριο να συμπιεστεί από το φυσικό του μήκος κατά $\Delta A = 0,3\text{m}$. Τοποθετούμε ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 1\text{kg}$ στο κεκλιμένο επίπεδο, ώστε να είναι σε επαφή με το σώμα Σ_1 , και ύστερα αφήνουμε τα σώματα ελεύθερα.

(γ) Να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_2 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του.

Να υπολογίσετε σε πόση απόσταση από τη θέση που αφήσαμε ελεύθερα τα σώματα χάνεται η επαφή μεταξύ τους.

Επαναληπτικές Πανελλήνιες Ιούλης 2010

21. **ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ (ΑΛΛΑΓΗ Θ.Ι)** Ένα σώμα μάζας $M = 3\text{kg}$ ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\text{N/m}$.

Δεύτερο σώμα μάζας $m = 1\text{kg}$, βάλλεται από το έδαφος από το σημείο K με αρχική ταχύτητα $u_0 = 10\text{m/s}$ και μετά από χρόνο $t = 0,8\text{s}$ συγκρούεται ανελαστικά με το M . Μετά την κρούση το σώμα m εξέρχεται από το M με ταχύτητα μέτρου $u' = 0,5\text{m/s}$. Το σώμα M εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Να υπολογίσετε:

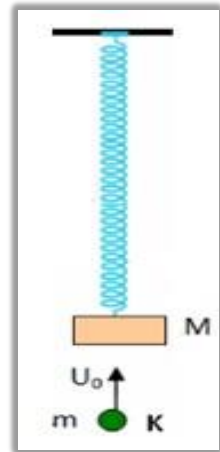
(α) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος m ελάχιστα πριν την κρούση.

(β) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος M αμέσως μετά την κρούση.

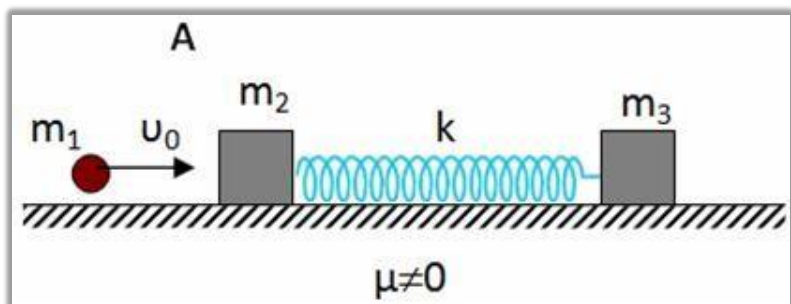
(γ) το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα μάζας M .

(δ) την αρχική μηχανική ενέργεια του συστήματος ελατήριο – σώμα μάζας m – σώμα μάζας M θεωρώντας σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής βαρυτικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από το σημείο K .

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.



22. Στο σχήμα το σώμα μάζας $m_1 = 5\text{kg}$ συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με το σώμα μάζας $m_2 = 5\text{kg}$. Αν είναι γνωστό ότι το ιδανικό ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό μήκος του, ότι η μάζα του σώματος m_3 είναι $m_3 = 10\text{kg}$, η σταθερά του



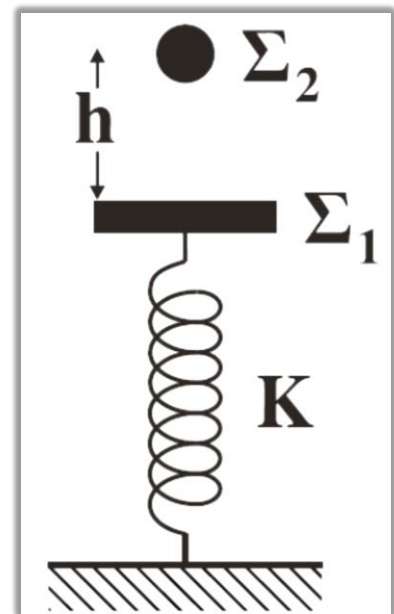
ελατηρίου είναι $k = 10\text{N/m}$, ο συντελεστής τριβής μεταξύ σωμάτων και επιπέδου είναι $\mu = 0,4$ και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\text{m/s}^2$, να υπολογίσετε:

- (α) τη μέγιστη επιτρεπτή παραμόρφωση του ελατηρίου ώστε να μην κινηθεί το m_3 .
- (β) τη μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να έχει το m_1 ώστε να μην κινηθεί το m_3 .
- (γ) το μέτρο της μεταβολής της ορμής του m_1 στη διάρκεια της κρούσης.
- (δ) τη θερμότητα που αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια του φαινομένου του ερωτήματος α.

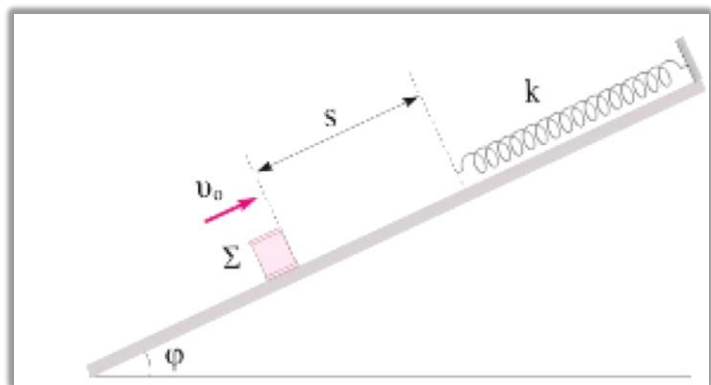
23. Σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 7\text{kg}$ ισορροπεί δεμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο δάπεδο. Από ύψος $h = 3,2\text{m}$ πάνω από το Σ_1 στην ίδια κατακόρυφο με τον άξονα του ελατηρίου αφήνεται ελεύθερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 1\text{kg}$, το οποίο συγκρούεται με το Σ_1 κεντρικά και πλαστικά. Να υπολογίσετε:

- (α) το μέτρο της ταχύτητας u_2 του Σ_2 οριακά πριν αυτό συγκρουστεί με το Σ_1 .
 - (β) το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
 - (γ) το πλάτος A της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
 - (δ) τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.
- Δίνεται ότι: $g = 10\text{m/s}^2$

Πανελλήνιες - Σεπτέμβρης 2009



24. Η μια άκρη ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\text{N/m}$ είναι στερεωμένη στο πάνω μέρος του πλάγιου επιπέδου γωνίας $\varphi = 30^\circ$, όπως στο σχήμα. Από ένα σημείο του πλάγιου επιπέδου που απέχει $s = 0,25\text{m}$ από το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου, εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $u_0 = 2\text{m/s}$, κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου προς τα πάνω ένα σώμα Σ μάζας $m = 2\text{kg}$. Όταν το σώμα ακουμπήσει στο ελατήριο, ενώνεται με αυτό και αρχίζει να εκτελεί αρμονική ταλάντωση.



- (α) Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το ελατήριο.

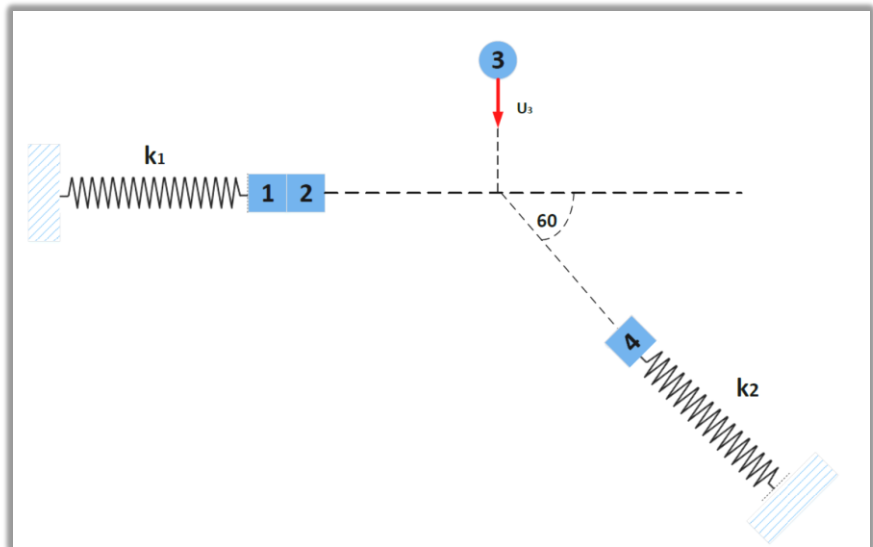
(β) Να βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.

(γ) Να γράψετε τη συνάρτηση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο, θεωρώντας $t = 0$ τη στιγμή της ένωσης του σώματος με το ελατήριο και τα θετικά προς τα πάνω.

(δ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής κινητικής ενέργειας του σώματος τη στιγμή που διέρχεται από το σημείο εκτόξευσης για δεύτερη φορά.

Δίνεται: $g = 10\text{m/s}^2$

25. Τα ελατήρια του σχήματος και τα σώματα $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ και Σ_4 βρίσκονται στο ίδιο λείο οριζόντιο επίπεδο. Τα ελατήρια έχουν σταθερές $k_1 = k_2 = 200\text{N/m}$ και τα σώματα μάζες $m_1 = m_2 = 1\text{kg}$ και $m_4 = 2\text{kg}$. Τα σώματα Σ_1 και Σ_4 ηρεμούν



στερεωμένα στα άκρα των ελατηρίων των οποίων τα άλλα άκρα είναι ακλόνητα στερεωμένα. Η διεύθυνση ταλάντωσης του συστήματος $k_2 \Sigma_4$ σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^\circ$ με την διεύθυνση ταλάντωσης του συστήματος $k_1 \Sigma_2$. Ακουμπάμε το σώμα Σ_2 στο Σ_1 και συμπιέζουμε αργά το ελατήριο k_1 κατά $0,2\text{m}$. Την στιγμή $t = 0$ ελευθερώνουμε τα σώματα Σ_1 και Σ_2 .

Το σώμα Σ_2 αποσπάται (χάνει επαφή) από το Σ_1 και συγκρούεται πλαστικά σε απόσταση $d_1 = 0,2\pi\text{m}$ από το σημείο που αποσπάστηκε με το σώμα Σ_3 , το οποίο εκκινεί με σταθερή ταχύτητα $u_3 = 2\sqrt{3}\text{m/s}$, σε διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση κίνησης του Σ_2 . Το συσσωμάτωμα που σχηματίστηκε κινήθηκε σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^\circ$ με την αρχική διεύθυνση του Σ_2 και συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με το Σ_4 . Να βρείτε:

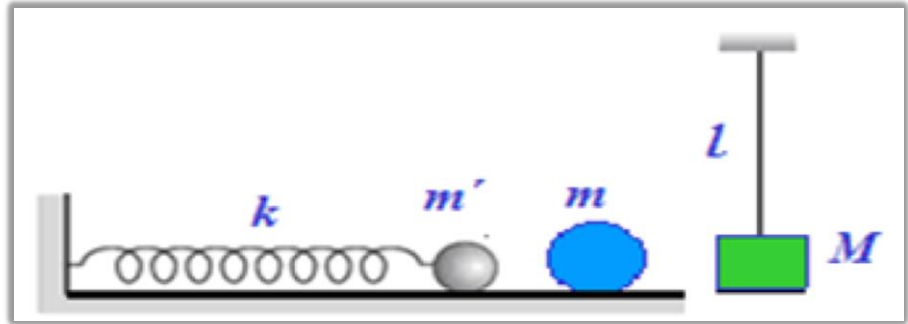
(α) την σταθερά επαναφοράς του Σ_2 πριν χάσει την επαφή του με το Σ_1

(β) την ταχύτητα του Σ_2 τη χρονική στιγμή που έχασε την επαφή του με το Σ_1 .

(γ) τη οριζόντια απόσταση του Σ_3 , από το σημείο σύγκρουσης, τη στιγμή που ελευθερώσαμε τα σώματα Σ_1 και Σ_2 .

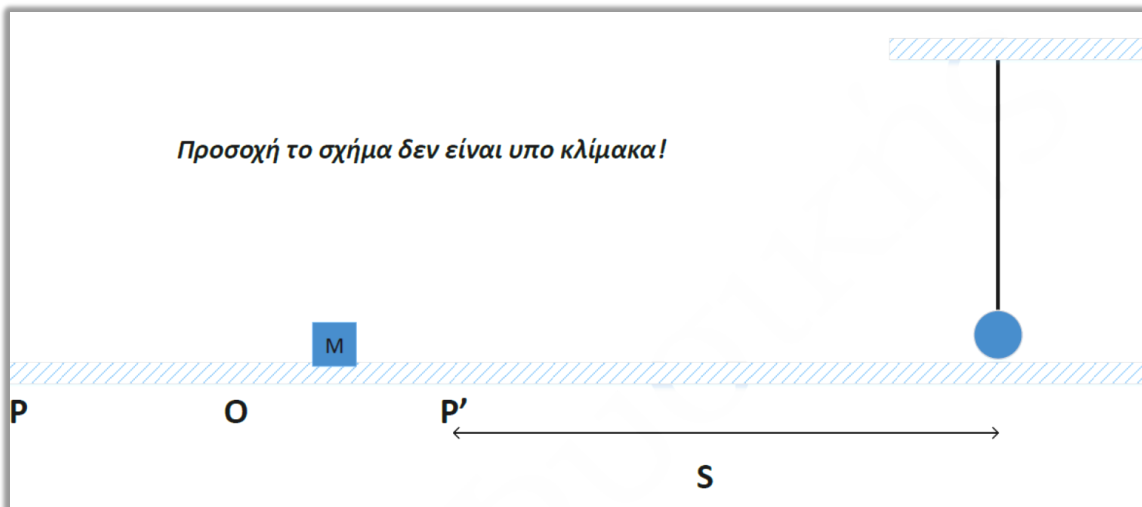
(δ) τη μάζα του σώματος Σ_3

26. Ένα σώμα μάζας $m = 3\text{kg}$, είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Λόγω εσωτερικής αιτίας το



σώμα διασπάται σε δύο κομμάτια με μάζες m_1 , m_2 αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει $m_1 = 2m_2$. Μετά τη διάσπαση το κομμάτι μάζας m_1 συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας $m' = 2\text{kg}$, το οποίο είναι στερεωμένο στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το δημιουργούμενο συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και η ταχύτητα του μηδενίζεται κάθε $\frac{\pi}{10}\text{ sec}$.

Το κομμάτι μάζας m_2 συγκρούεται πλαστικά με το ακίνητο σώμα μάζας $M = 3\text{kg}$, το οποίο κρέμεται από νήμα μήκους $l = 2\text{m}$. Αμέσως μετά την κρούση η δύναμη που ασκεί το νήμα στο συσσωμάτωμα των μαζών m_2 και M είναι $F = 90\text{N}$. Να βρεθούν:

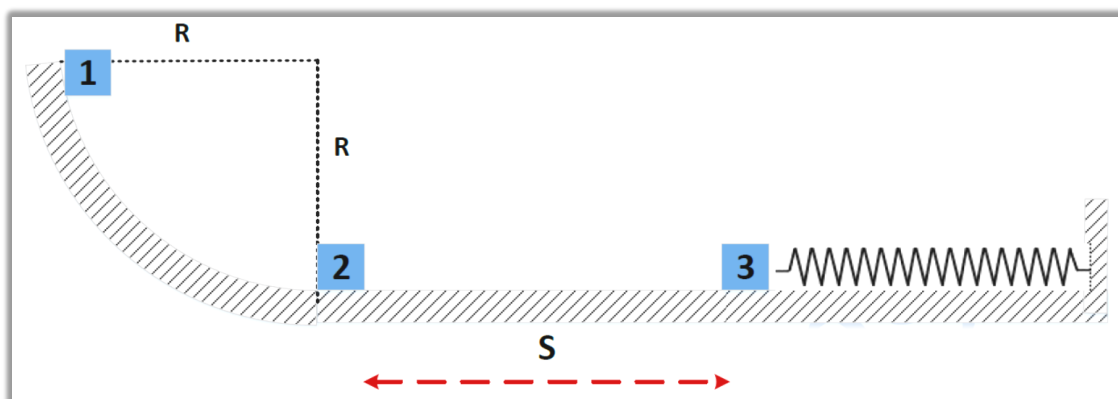


- (α) Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος των μαζών m_2 και M αμέσως μετά την κρούση.
 (β) Το συνημίτονο της μέγιστης γωνίας εκτροπής του νήματος.
 (γ) Οι ταχύτητες των κομματιών με μάζες m_1 και m_2 αμέσως μετά τη διάσπαση
 (δ) Η συνάρτηση που περιγράφει πως μεταβάλλεται η δύναμη επαναφοράς του συσσωματώματος των μαζών m_1 και m' σε σχέση με το χρόνο. Να θεωρήσετε $t = 0$ τη στιγμή της κρούσης και θετική φορά του άξονα προς τα δεξιά.
 Δίνεται: $g = 10\text{m/s}^2$.

27. Ελαστική κρούση

Από την κορυφή λείου κατακόρυφου οδηγού σχήματος

τεταρτοκυκλίου και ακτίνας $R = 1,25\text{m}$ αφήνεται σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 2\text{kg}$. Όταν το σώμα φτάνει στην βάση του τεταρτοκυκλίου συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3\text{kg}$. Μετά την κρούση το Σ_2 ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο τραχύ δάπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_1 = 0,1$ και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με σώμα Σ_3 μάζας $m_3 = 6\text{kg}$, αφού διανύσει απόσταση $S = 3,5\text{m}$. Το Σ_3 είναι στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο οριζοντίου ιδανικού ελατηρίου, που βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και έχει το άλλο άκρο του ακλόνητο σε κατακόρυφο τοίχο. Η σταθερά του ελατηρίου δίνεται $k = 112,5\text{N/m}$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο συσσωμάτωμα των Σ_2 και Σ_3 με το δάπεδο δίνεται $\mu_2 = 0,125$. **(α)** Να βρεθούν οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 μετά την μεταξύ τους κρούση.



(β) Να βρεθεί η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου.

(γ) Να βρεθεί το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας του Σ_1 που μετατράπηκε σε ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου, όταν το ελατήριο είναι στην θέση μέγιστης παραμόρφωσης.

(δ) Να βρεθεί το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του Σ_1 την στιγμή που φτάνει στο μέγιστο ύψος μετά την κρούση του με το Σ_2 .

Σας δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$. Επίσης να θεωρήσετε τις διαστάσεις των σωμάτων αμελητέες και την διάρκεια των κρούσεων αμελητέα.

28. Σώμα Σ μάζας $M = 0,5\text{kg}$, έχει στο εσωτερικό του ωρολογιακό εκρηκτικό μηχανισμό, ο οποίος ενεργοποιείται την χρονική στιγμή $t = 0$. Με κατάλληλο τρόπο το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A σε λείο δάπεδο ανάμεσα σε δύο ακραίες θέσεις P, P' που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 10\text{m}$. Η εξίσωση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας

Ο θα δίνεται στο S.I. από την σχέση $x = A\sin(10t + \frac{\pi}{3})$

(α) Για την ταλάντωση του σώματος Σ να γράψετε την εξίσωση της Δυναμικής και της Κινητικής ενέργειας σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την Θέση ισορροπίας $f(x)$ και να σχεδιάσετε τα αντίστοιχα διαγράμματα σε κοινό σύστημα βαθμολογημένων αξόνων.

(β) Την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{60}\text{sec}$ γίνεται η προγραμματισμένη έκρηξη, με αποτέλεσμα τη δημιουργία θραυσμάτων Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = m_2$ τα οποία συνεχίζουν να

κινούνται στο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητες $|\vec{v}_1| = \frac{v_{\max}}{5}$, $v_{\max}$ η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης τότε να υπολογιστούν:

(β-1) η θέση και η ταχύτητα το σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 .

(β-2) η ταχύτητα u_1 του Σ₁ μετά την έκρηξη.

γ) Μετά την έκρηξη το σώμα Σ₂ κινείται προς τα δεξιά και εισέρχεται σε τμήμα του δαπέδου μήκους $s=6\text{m}$ με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,6$ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σώμα Σ₃ μάζας m_3 που είναι στερεωμένο στο κάτω άκρο νήματος $l=0,4\text{m}$ και ισορροπεί κρεμασμένο από την οροφή.

Μετά την κρούση το Σ₃ εκτρέπεται γωνιακά από την κατακόρυφο κατά γωνία $\theta=60^\circ$. Να υπολογιστούν:

(γ-1) το μέτρο της ταχύτητας του Σ₃ αμέσως μετά την κρούση,

(γ-2) ο λόγος των μαζών $\frac{m_2}{m_3}$

(γ-3) το ποσοστό της αρχικής ενέργειας του σώματος Σ που μετατράπηκε σε βαρυτική δυναμική ενέργεια.

(γ-4) η τάση του νήματος στην θέση μέγιστης γωνιακής εκτροπής του σώματος Σ₃.

Δίνονται: $g=10\text{m/s}^2$, $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\eta \mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Φθίνουσα ταλάντωση

- 29.** Το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μικρής απόσβεσης που εκτελεί ένας ταλαντωτής μειώνεται εκθετικά με το χρόνο με τον τύπο $A=A_0 e^{-\Lambda t}$ (Λ =σταθερά). Τη χρονική στιγμή $t=0$ το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με $0,8\text{m}$, ενώ τη χρονική στιγμή $t_1=20\text{s}$ ισούται με $0,2\text{m}$. Στη χρονική διάρκεια $0 < t < t_1$ ο ταλαντωτής έχει εκτελέσει 10 πλήρεις ταλαντώσεις.

A) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση του πλάτους και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση σε βαθμολογημένους άξονες. Στο σχήμα σας να φαίνεται και ο χρόνος ημιζωής του πλάτους.

B) Να υπολογίσετε το πλάτος τη χρονική στιγμή t_2 που έχουν ολοκληρωθεί 15 ταλαντώσεις.

Γ) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης αντίστασης στην κίνηση για τη χρονική διάρκεια $0 < t < t_1$, αν δίνεται ότι η σταθερά επαναφοράς του ταλαντωτή ισούται με $D=100\text{N/m}$.

[**AΠ:** A) $A=0,8e^{-0,1(\ln 2)t}$ (S.I), B) $A_2=0,1\text{m}$, Γ) 30J]

- 30.** Σώμα μάζας $m=1\text{Kg}$ εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση μικρής απόσβεσης και το πλάτος της μειώνεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A=0,1e^{-\Lambda t}$ (A σε m και Λ =σταθ.). Τη χρονική στιγμή $t=0$ η ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος ισούται με $E_0=2\text{J}$ και τη χρονική στιγμή t_1 το πλάτος της ταλάντωσης έχει υποδιπλασιαστεί σε σχέση με το αρχικό.

Να υπολογίσετε:

A) Το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_2=4t_1$.

Β) Την περίοδο της ελεύθερης, αμείωτης ταλάντωσης που θα εκτελούσε το σώμα αν έπαιε να ασκείται η δύναμη της αντίστασης στην κίνηση,
Γ) Το ποσοστό επί τοις εκατό της αρχικής μηχανικής ενέργειας του σώματος που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον κατά τη διάρκεια της φθίνουσας ταλάντωσης από τη χρονική στιγμή $t=0$ που ξεκίνησε η φθίνουσα ταλάντωση μέχρι τη χρονική στιγμή $t'=2t_1$.
[ΑΠ: Α) 1/160m, Β) 0,1pts, Γ) 93,75%]

- 31.** Σύστημα μάζα- οριζόντιο ελατήριο εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση μικρής απόσβεσης με περίοδο $T=0,2s$ και με πλάτος που μειώνεται εκθετικά με το χρόνο, καθώς το σώμα δέχεται δύναμη αντίστασης στην κίνησή του της μορφής $F'=-bu$ ($b=\text{σταθ.}$). Το σώμα αφέθηκε ελεύθερο τη χρονική στιγμή $t=0$ από τη θέση Δ η οποία απέχει από τη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου ($x=0$) απόσταση $0,8m$, ενώ τη χρονική στιγμή που ολοκληρώνεται η 1^η περίοδος βρίσκεται στη θέση Μ η οποία απέχει από τη Δ απόσταση $0,1m$.
Α) Να υπολογίσετε την απόσταση του σώματος από τη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου τη χρονική στιγμή που ολοκληρώνεται η 2^η περίοδος της ταλάντωσης.
Β) Να βρείτε την απόσταση του σώματος από τη θέση δ τη χρονική στιγμή που ολοκληρώνεται και η 4^η περίοδος της ταλάντωσης.
Γ) Να σχεδιάσετε σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση $x=0$ σε συνάρτηση με το χρόνο ($x=f(t)$).
 Στο σχήμα σας να φαίνονται και οι τιμές της απομάκρυνσης τις χρονικές στιγμές $T, 2T, 3T$ και $4T$.
[ΑΠ: Α) 0.6125m, Β) 0,33m]

- 32.** Μικρό σώμα μάζας $m=4kg$ είναι δεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθερά $k=100N/m$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στην οροφή. Το σώμα ισορροπεί ακίνητο με το ελατήριο επιμηκυμένο κατά ΔL . Μετακινούμε κατακόρυφα προς τα πάνω το σώμα κατά $\Delta y=0,5m$ και τη χρονική στιγμή $t=0$ το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί από τη θέση όπου το εκτρέψαμε χωρίς αρχική ταχύτητα.
Α) Αν δεν υπάρχουν τριβές κατά την κίνηση του σώματος,;
 i) Να υπολογίσετε τη συχνότητα της α.α.τ. που εκτελεί το σώμα,
 ii) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης και να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις σε κοινό σύστημα βαθμολογημένων αξόνων, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά της αρχικής εκτροπής,
 iii) Να υπολογίσετε το μέτρο της ορμής του σώματος τη χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται από τη θέση y_1 όπου το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $5\Delta L/8$
Β) Αν κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος ασκείται και δύναμη αντίστασης από τον αέρα, τότε το σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση μικρής απόσβεσης με πλάτος που δίνεται από τη σχέση: $A=A_0 e^{-(0,01\pi \ln 5)t}$, όπου

Αρχική εκτροπή ($A_0 = \Delta y = 0,5\text{m}$).

i) Να βρείτε στο τέλος ποιας περιόδου το σώμα απέχει από τη Θέση ισορροπίας του απόσταση $y_2 = 0,1\text{m}$.

ii) Να υπολογίσετε την απώλεια ενέργειας λόγω της δύναμης αντίστασης στην κίνηση από την $t=0$ έως το τέλος της περιόδου που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα.

Θεωρήστε ότι η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης ισούται με την ιδιοπερίοδο ταλάντωσης του συστήματος.

Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$ και $\pi^2 = 10$.

[ΑΠ: Α) i) $2,5/\pi\text{Hz}$, ii) $U = 12,5\sin^2 5t$, (S.I), $K = 12,5\mu\text{m}^2 5t$, (S.I), Β) i) $25^{\text{η}}$ ταλάντ., ii) 12J]

33. Σώμα μάζας $m = 2\text{Kg}$ εκτελεί α.α.τ. πλάτους $A = 1,2\text{m}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση με $x = +\frac{A}{2}$ και ο ρυθμός μεταβολής της θέσης του είναι

$\frac{dx}{dt} > 0$. Τη στιγμή $t_1 = 6,1\text{s}$ το σώμα περνάει για $11^{\text{η}}$ φορά από τη θέση με $x = +\frac{A\sqrt{3}}{2}$

A) Να υπολογίσετε:

α) Την αρχική φάση ϕ_0 της α.α.τ.

β) Την περίοδο T και την κυκλική συχνότητα ω .

γ) Το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας $(\frac{dU}{dt})$ της α.α.τ τη χρονική στιγμή t_1 .

B) Τη χρονική στιγμή $t_2 = 6T/6$ ακριβώς δρα στο σώμα μια δύναμη αντίστασης της μορφής $F_{\text{αντ}} = -bv$, οπότε στη συνέχεια το σώμα εκτελεί φθίνουσα αρμονική ταλάντωση που το πλάτος της μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$. Ο ρυθμός ανάπτυξης θερμότητας στον ταλαντωτή κάποια στιγμή που η ταχύτητά του είναι $v = 2\pi\text{ m/s}$ έχει μέτρο $dQ/dt = 16\text{J/s}$. Δίνεται επίσης ότι η σταθερά Λ προκύπτει από τη σχέση $\Lambda = \frac{b}{2m}$ και ότι $\pi^2 = 10$.

α) Αν θεωρήσουμε ως τη χρονική στιγμή $t=0$ έναρξης της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_2 , να υπολογίσετε την αρχική φάση ϕ_0 της φθίνουσας ταλάντωσης.

β) Να προσδιορίσετε την εξίσωση απομάκρυνσης -χρόνου $x=f(t)$ για τη φθίνουσα ταλάντωση. (Θεωρήστε ότι και μετά τη δράση της δύναμης $F_{\text{αντ}}$ και τη μετατροπή της α.α.τ. σε φθίνουσα η περίοδος T παραμένει η ίδια)

[ΑΠ: Α) α) $\pi/6\text{rad}$, β) $1,2\text{s}$, $5\pi/3\text{ rad/s}$, γ) $100\pi\sqrt{3}/3\text{J/s}$, Β) α) $\pi/2\text{rad}$,

β) $x = 1,2e^{-0,1t}\mu(\frac{5\pi}{3}t + \frac{\pi}{2})$]

Εξαναγκασμένη ταλάντωση

34. Ένα σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση πλάτους A και συχνότητας $f = 15\text{Hz}$. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι 17Hz . Αν

η συχνότητα του διεγέρτη γίνει 16Hz τότε το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης :

- α. θα γίνει μικρότερο από A .
- β. θα γίνει μεγαλύτερο από A .
- γ. θα παραμείνει A .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

36. Μηχανικό σύστημα αποτελείται από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k στο οποίο είναι κρεμασμένο ένα σώμα μάζας m και το σύστημα αυτό εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση μικρής απόσβεσης. Δίνεται ότι ο διεγέρτης έχει συχνότητα f_0 και το σύστημα έχει ιδιοσυχνότητα $f_0 = 2f_0$. Αν αντικαταστήσουμε το σώμα με άλλο, μάζας $m' = 4m$, διατηρώντας την f_0 , το νέο σύστημα :

- α. θα ταλαντώνεται με $A' < A$
- β. θα βρεθεί σε συντονισμό
- γ. θα ταλαντώνεται με $A' = A$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Πηγή: ΟΕΦΕ 2015

37. Ένα σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση συχνότητας $f = 30\text{Hz}$ και πλάτους A . Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι 25Hz . Αν αυξήσουμε τη σταθερά απόσβεσης b του συστήματος χωρίς να μεταβάλλουμε τη συχνότητα του διεγέρτη, τότε :

- α. το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης θα μειωθεί.
- β. η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης θα γίνει λίγο μικρότερη από 30Hz .
- γ. η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης θα γίνει λίγο μικρότερη από 25Hz .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

38. Απλός αρμονικός ταλαντωτής ελατήριο- μάζα, με σταθερά ελατηρίου $k=100\text{N/m}$ και μάζα $m=1\text{Kg}$ εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα διεγέρτη $f = (8/\pi)\text{Hz}$. Αν η συχνότητα του διεγέρτη αυξηθεί, τότε το πλάτος της ταλάντωσης:

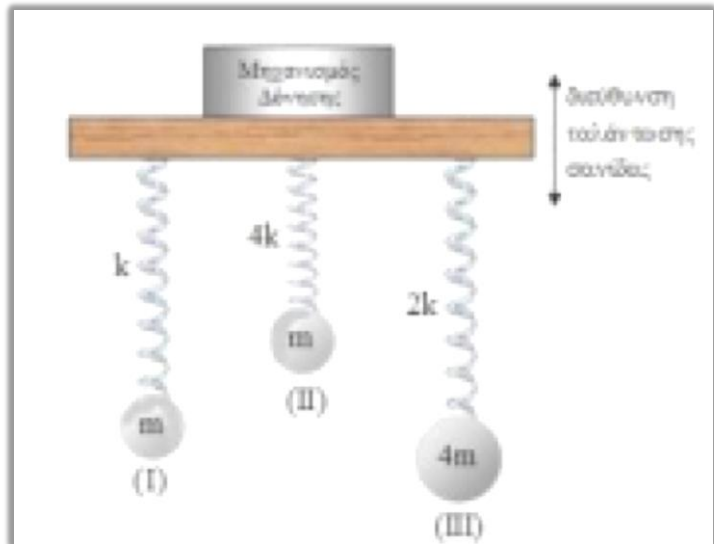
- i) Μειώνεται
- ii) Αυξάνεται
- iii) Μένει σταθερό

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Επαναληπτικές 2013

39. Στην οριζόντια σανίδα του παρακάτω σχήματος έχουμε προσαρμόσει τρία συστήματα μάζας - ελατηρίου με τα χαρακτηριστικά μεγέθη (μάζα σώματος - σταθερά ελατηρίου) που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Όλα τα σώματα αρχικά ισορροπούν. Μέσω κατάλληλου μηχανισμού δόνησης θέτουμε τη σανίδα σε εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα



που έχει τιμή $\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα μάζας-ελατηρίου, που θα ταλαντωθεί με το μέγιστο δυνατό πλάτος θα είναι το:

α. (I) β. (II) γ. (III)

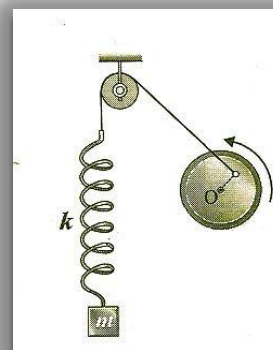
Να θεωρήσετε ότι η επίδραση των αποσβέσεων είναι μικρή με αποτέλεσμα η συχνότητα συντονισμού κάθε συστήματος να ταυτίζεται με την ιδιοσυχνότητά του.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Πηγή: ΟΕΦΕ 2016

40. Σώμα μάζας $m = 2\text{ kg}$ ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 200\text{ N/m}$, το πάνω άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση και η δύναμη απόσβεσης που επενεργεί πάνω του είναι της μορφής $F' = -0.5v(\text{S.I.})$. Εφαρμόζουμε στο σύστημα περιοδική δύναμη διέγερσης με συχνότητα $(5/\pi)\text{ Hz}$, οπότε αποκαθίσταται ταλάντωση σταθερού πλάτους που είναι ίσο με $0,2\text{ m}$. Αν η αρχική φάση της ταλάντωσης σταθερού πλάτους είναι $\phi_0 = 0$, τότε:
- α. Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας της εξαναγκασμένης ταλάντωσης.
- β. Να υπολογίσετε το μέγιστο ρυθμό απορρόφησης ενέργειας του ταλαντωτή από τον διεγέρτη, κατά τη διάρκεια μιας περιόδου.
- γ. Αν αυξήσουμε τη συχνότητα του διεγέρτη το πλάτος της ταλάντωσης θα αυξηθεί ή θα ελαττωθεί;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

41. Στο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=400\text{N/m}$ είναι κρεμασμένο μικρό σώμα μάζας $m=1\text{Kg}$. Το σύστημα ελατήριο- σώμα εξαναγκάζεται να εκτελεί ταλάντωση πολύ μικρής απόσβεσης με τη βοήθεια ενός τροχού, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του μεγιστοποιείται κάθε $0,01\text{s}$.



- A) Η συχνότητα του διεγέρτη ισούται με:
i) 100Hz , ii) 25Hz , iii) 50Hz
B) Το σύστημα:
i) Βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού.
ii) Δε βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Να επιλέξετε τις σωστές προτάσεις και να δικαιολογήσετε τις επιλογές σας.
20. Σώμα μάζας m είναι κρεμασμένο από ελατήριο σταθεράς k και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση πλάτους A_1 και συχνότητας f_1 . Παρατηρούμε ότι, αν η συχνότητα του διεγέρτη αυξηθεί και γίνει f_2 , το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι πάλι A_1 . Για να γίνει το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μεγαλύτερο του A_1 , πρέπει η συχνότητα f του διεγέρτη να είναι:
- A) $f > f_2$ B) $f < f_1$ Γ) $f_1 < f < f_2$

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Επαναληπτικές

2004

43. Μηχανικό σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση μικρής απόσβεσης με συχνότητα f_1 και πλάτος $A_1=0,2\text{m}$. Μικραίνοντας τη συχνότητα του διεγέρτη παρατηρούμε αύξηση του πλάτους και στη συνέχεια μείωση αυτού μέχρι μια συχνότητα διεγέρτη f_2 για την οποία το πλάτος ισούται ξανά με A_1 . Κατά τη διάρκεια της μείωσης της συχνότητας η μεγαλύτερη διαφορά πλάτους που παρατηρήθηκε σε σχέση με το αρχικό πλάτος A_1 ισούται με $0,15\text{m}$.
A) Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του συστήματος όταν αυτό βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού ισούται με:
i) $0,45\text{m}$, ii) $0,05\text{m}$, iii) $0,35\text{m}$
B) Αν αυξήσουμε τη συχνότητα του διεγέρτη από την τιμή f_1 , τότε το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης:
i) Θα παραμείνει σταθερό, ii) θα αυξηθεί, iii) Θα μειωθεί.
Να επιλέξετε τις σωστές προτάσεις και να δικαιολογήσετε τις επιλογές σας.
44. Μηχανικό σύστημα μάζας $m=1\text{Kg}$ εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με τη βοήθεια εξωτερικής αρμονικής δύναμης F_{ex} . Η αλγεβρική τιμή της δύναμης αυτής μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $F_{\text{ex}}=40\sin 20t$ (S.I), ενώ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $x=0,5\eta\mu\omega t$ (S.I). Κατά τη διάρκεια της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ασκείται δύναμη τριβής ανάλογης της ταχύτητας του σώματος, που είναι κάθε χρονική στιγμή αντίθετη προς τη δύναμη F_{ex} . Η ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης του συστήματος ισούται με

$$f_0 = 10/\pi \text{ Hz.}$$

A) Να υπολογίσετε τη σταθερά απόσβεσης b .

B) Να υπολογίσετε το ρυθμό με τον οποίο απορροφά ενέργεια από το σώμα η δύναμη της τριβής τη χρονική στιγμή $t_1 = 33\pi/80 \text{ s}$.

Γ) Τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης σταματά ακαριαία να ενεργεί η εξωτερική δύναμη F_{ex} . Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης τριβής για χρονική διάρκεια $\Delta t = 0,95 \text{ s}$ μετά τη στιγμή που σταμάτησε να ενεργεί η δύναμη F_{ex} .

Θεωρήστε γνωστό ότι η φθίνουσα ταλάντωση έχει γωνιακή συχνότητα ίση με τη

ιδιοσυχνότητα του συστήματος και σταθερά Λ που υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Lambda = b/2m.$$

Επίσης δίνεται ότι: $e^{-1,9} = 0,15$,

[ΑΠ: A) 4 Kg/s , B) 200 J/s , Γ) $-48,875 \text{ J}$]

45. Μηχανικό σύστημα αποτελείται από σώμα μάζας $m = 2 \text{ Kg}$ και ελατήριο που έχει σταθερά $k = 800 \text{ N/m}$. Στο σύστημα ασκείται δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση με εξίσωση της μορφής $F' = -2u$ (S.I). Για να διατηρείται το πλάτος της ταλάντωσης σταθερό και ίσο με $0,2 \text{ m}$, προσφέρεται ενέργεια στο σύστημα μέσω μιας εξωτερικής περιοδικής δύναμης της μορφής $F_{\text{ex}} = F_0 \sin 20t$ (S.I), οπότε το σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης της μορφής $x = A \eta \omega t$.

Να υπολογίσετε:

A) Την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = \pi/80 \text{ s}$.

B) Το μέγιστο ρυθμό της προσφερόμενης ενέργειας στο σύστημα μέσω της εξωτερικής δύναμης.

[ΑΠ: A) $2\sqrt{2} \text{ m/s}$, B) 32 J/s]

ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

46. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των δυο συνιστωσών ταλαντώσεων που εκτελεί ταυτόχρονα ένας αρμονικός ταλαντωτής και οι οποίες εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας.

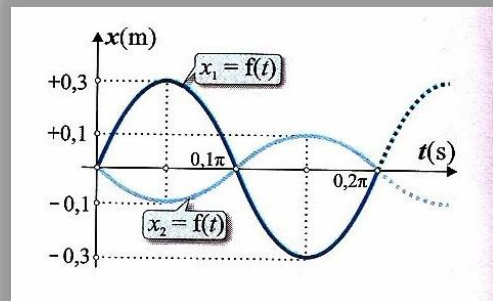
A) Οι εξισώσεις των συνιστωσών ταλαντώσεων είναι οι:

i) $x_1 = 0,3 \eta \mu 10t$ (S.I) και $x_2 = 0,1 \eta \mu (10t + \pi)$ (S.I)

ii) $x_1 = 0,3 \eta \mu 20t$ (S.I) και $x_2 = 0,1 \eta \mu 20t$ (S.I)

iii) $x_1 = 0,3 \eta \mu (10t + \pi)$ (S.I) και $x_2 = -0,1 \eta \mu 10t$ (S.I)

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



B) Η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι η:

i) $x = 0,4\eta\mu 10t$ (S.I) ii) $x = 0,2\eta\mu 10t$ (S.I) iii) $x = 0,1\eta\mu(10t + \pi)$ (S.I)

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

47. Σώμα Σ εκτελεί ταυτόχρονα δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο, στην ίδια διεύθυνση, με εξισώσεις:

$x_1 = 5\eta\mu 10t$ (S.I) και $x_2 = 8\eta\mu(10t + \pi)$ (S.I)

Η απομάκρυνση του σώματος κάθε χρονική στιγμή θα δίνεται από την εξίσωση:

A) $x = 3\eta\mu(10t + \pi)$ (S.I) , B) $x = 3\eta\mu 10t$ (S.I) , Γ) $x = 11\eta\mu(10t + \pi)$ (S.I)

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Επαναληπτικές 2006

48. Ένα μικρό σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις, με εξισώσεις:

$x_1 = A_1 \eta\mu\omega t$ (S.I) και $x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \pi/2)$

και με ενέργειες ταλάντωσης E_1 και E_2 αντίστοιχα. Οι ταλαντώσεις γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο και στην ίδια διεύθυνση. Η ενέργεια ταλάντωσης E της σύνθετης ταλάντωσης είναι ίση με:

A) $E = E_1 + E_2$

B) $E = (E_1 + E_2)/2$

Γ) $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Επαναληπτικές 2016

49. Ένας αρμονικός ταλαντωτής εκτελεί ταυτόχρονα δυο α.α.τ. $x_1 = f(t)$ και $x_2 = f(t)$, οι οποίες έχουν ίσες συχνότητες, εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, έχουν διαφορά φάσης φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$ rad) και τα πλάτη τους ικανοποιούν τη σχέση $A_1 = 2A_2$. Η ενέργεια του ταλαντωτή όταν αυτός εκτελεί τη συνισταμένη ταλάντωση ισούται με E , ενώ όταν εκτελεί τις συνιστώσες x_1 και x_2 ξεχωριστά ισούται με E_1 και E_2 αντίστοιχα. Οι τρεις αυτές ενέργειες ικανοποιούν τη σχέση: $E = E_1 - E_2$.

A) Αν το πλάτος της ταλάντωσης $x_2 = f(t)$ ισούται με $A_2 = 0,2\text{m}$, τότε το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης ισούται με: i) $0,2\text{m}$, ii) $0,4\text{m}$, iii) $0,2\sqrt{3}\text{m}$

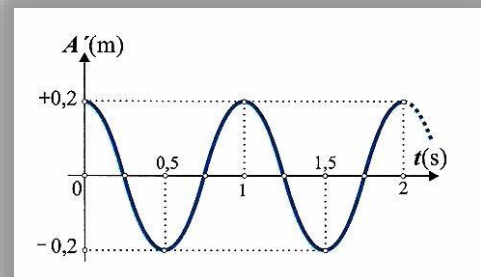
Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

B) Η διαφορά φάσης μεταξύ της συνιστώσας ταλάντωσης $x_1 = f(t)$ και της συνισταμένης ταλάντωσης $x = f(t)$ ισούται με: i) 30° ii) 60° iii) 90° Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

50. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δυο συνιστώσες ταλαντώσεις $x_1 = f(t)$ και $x_2 = f(t)$, ίσου πλάτους και μηδενικής αρχικής φάσης, οι οποίες εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και έχουν παραπλήσιες συχνότητες f_1, f_2 με $f_1 > f_2$. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση του μεγέθους A' σε συνάρτηση με το χρόνο για τη συνισταμένη ταλάντωση $x = A'\eta\mu 200\pi t$ (S.I) που εκτελεί το σώμα. Οι δυο συνιστώσες ταλαντώσεις έχουν εξισώσεις:

A) $x_1 = 0,1\eta\mu 202\pi t$ (S.I) και $x_2 = 0,1\eta\mu 198\pi t$ (S.I)

B) $x_1 = 0,2\eta\mu 200\pi t$ (S.I) και $x_2 = 0,2\eta\mu 198\pi t$ (S.I) Γ) $x_1 = 0,1\eta\mu 202\pi t$ (S.I) και



$$x_2 = 0,1\eta\mu 200\pi t \text{ (S.I.)}$$

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

51. Ένα σώμα μετέχει σε δυο αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο με το ίδιο πλάτος και γωνιακές συχνότητες, που διαφέρουν πολύ λίγο. Οι εξισώσεις των δυο ταλαντώσεων είναι:

$$x_1 = 0,2\eta\mu 998\pi t \text{ (S.I.) και } x_2 = 0,2\eta\mu 1002\pi t \text{ (S.I.)}$$

Ο χρόνος ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους της ιδιόμορφης ταλάντωσης (διακροτήματος) του σώματος είναι: Α) 2s Β) 1s Γ) 0,5s

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Πανελλήνιες 2008

52. Κατά τη σύνθεση δυο απλών αρμονικών ταλαντώσεων με παραπλήσιες συχνότητες f_1, f_2 , ίδιας διεύθυνσης και ίδιου πλάτους, που γίνονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, με $f_1 > f_2$, παρουσιάζονται διακροτήματα με περίοδο διακροτήματος $T_\Delta = 2\text{s}$. Αν κατά τη διάρκεια του χρόνου αυτού πραγματοποιούνται 200 πλήρεις ταλαντώσεις οι συχνότητες f_1 και f_2 είναι:

Α) $f_1 = 200,5\text{Hz}$, $f_2 = 200\text{Hz}$.

Β) $f_1 = 100,25\text{Hz}$, $f_2 = 99,75\text{Hz}$.

Γ) $f_1 = 50,2\text{Hz}$, $f_2 = 49,7\text{Hz}$.

Πανελλήνιες 2014

53. Μικρή σφαίρα εκτελεί ταυτόχρονα δυο α.α.τ. $x_1 = f(t)$ και $x_2 = f(t)$ ίδιας συχνότητας $f = 5\text{Hz}$, οι οποίες εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και εμφανίζουν μεταξύ τους διαφορά φάσης 90° με τη $x_2 = f(t)$ να προηγείται. Η συνισταμένη ταλάντωση που εκτελεί η σφαίρα έχει πλάτος $A = 2\text{m}$ και ενέργεια $E = 20\text{J}$. Αν η σφαίρα εκτελούσε μόνο την ταλάντωση $x_1 = f(t)$, τότε οι ακραίες θέσεις της ταλάντωσης της θα απέχαν μεταξύ τους απόσταση $2\sqrt{3}\text{m}$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ θα περνούσε από τη θέση ισορροπίας της με θετική ταχύτητα.

Α) Να βρείτε τη μέγιστη της δύναμης που δέχεται η σφαίρα κατά τη διάρκεια της συνισταμένης ταλάντωσης που εκτελεί.

Β) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση $x_2 = f(t)$.

Γ) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της σφαίρας κατά τη διάρκεια της συνισταμένης ταλάντωσης.

Δ) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης επαναφοράς που δέχεται η σφαίρα κατά τη διάρκεια της συνισταμένης ταλάντωσης της από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή που φτάνει για 1^η φορά σε ακραία θέση της ταλάντωσης της.

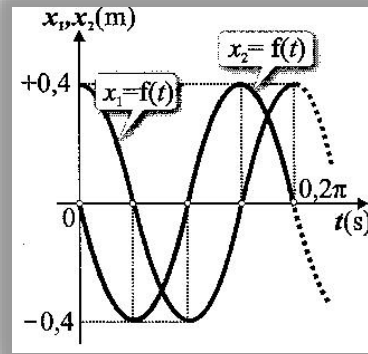
Δίνεται ότι: $\pi^2 = 10$.

[ΑΠ:Α) $x_2 = 1\eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{2})$ (S.I.), Β) $u = 20\pi \sin(10\pi t + \frac{\pi}{6})$ (S.I.),

Γ) $a = -2000\eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{6})$ (S.I.), Δ) -15J]

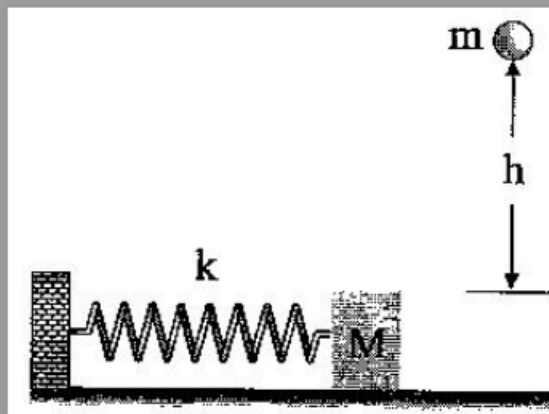
54. Ένα σώμα μάζας $m = 0,1\text{Kg}$ εκτελεί ταυτόχρονα δυο α.α.τ. (1) και (2) που έχουν ίσες συχνότητες, ίδια διεύθυνση και εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Στο διάγραμμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των χρονικών εξισώσεων απομάκρυνσης $x_1 = f(t)$ και $x_2 = f(t)$ των δυο συνιστωσών ταλαντώσεων
- Α) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης
- Β) Να γράψετε τις εξισώσεις της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης και της κινητικής ενέργειας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

Γ) Αν η εξίσωση της απομάκρυνσης $x_1=0,5\sqrt{2}\eta\mu(10t+\frac{3\pi}{4})$ (S.I), ποια θα έπρεπε να είναι η εξίσωση απομάκρυνσης $x_2=f(t)$, ώστε η εξίσωση απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης να είναι αυτή που υπολογίσατε στο ερώτημα (Α);
 [ΑΠ: Α) $x_1=0,4\sqrt{2}\eta\mu(10t+\frac{3\pi}{4})$ (S.I), Β) $U=1,6\eta\mu^2(10t+\frac{3\pi}{4})$ (S.I), $K=1,6$
 $\sigma\upsilon\nu^2(10t+\frac{3\pi}{4})$ (S.I), Γ) $x_1=0,1\sqrt{2}\eta\mu(10t+\frac{7\pi}{4})$ (S.I)]



55. Ένα υλικό σημείο εκτελεί ταυτόχρονα δυο α.α.τ. της μορφής $x_1=0,4\eta\mu\omega t$ (S.I) και $x_2=0,4\eta\mu\omega 2t$ (S.I), οι οποίες εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Σε χρονική διάρκεια $\Delta t=2s$ το σώμα εκτελεί 98 πλήρεις ταλαντώσεις εξαιτίας της $x_1=f(t)$ και 102 πλήρεις ταλαντώσεις εξαιτίας της $x_2=f(t)$.
 Α) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης.
 Β) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη στιγμή $t_1=1/8s$.
 Γ) Να υπολογίσετε το χρόνο μεταξύ δυο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων του πλάτους.
 Δ) Να βρείτε πόσες φορές το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του και πόσες φορές γίνεται μέγιστο το πλάτος της ταλάντωσης σε χρόνο ίσο με 2s.
 [ΑΠ: Α) $x=0,8\sigma\upsilon\nu 2\pi t.\eta\mu 100\pi t$ (S.I), Β) $x_1=0,4\sqrt{2}m$, Γ) 0,5s, Δ) 200φορές, 4φορές]
56. Η ταλάντωση που εκτελεί ένα σώμα εμφανίζει διακροτήματα και προκύπτει από τη σύνθεση δυο α.α.τ. $x_1=f(t)$ και $x_2=f(t)$, που εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι δυο ταλαντώσεις έχουν το ίδιο πλάτος, μηδενική αρχική φάση και παραπλήσιες συχνότητες f_1, f_2 με $f_1 > f_2$. Τη χρονική στιγμή $t_1=1/8s$ η διαφορά φάσης των δυο ταλαντώσεων $x_1=f(t)$ και $x_2=f(t)$ ισούται με $\pi/2$ rad. Το σώμα κατά τη διάρκεια της σύνθετης ταλάντωσης διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 200 φορές το δευτερόλεπτο, ενώ η μεγαλύτερη τιμή του πλάτους της ταλάντωσης ισούται με 0,5m.
 Α) Να υπολογίσετε την περίοδο των διακροτημάτων.
 Β) Να γράψετε τις εξισώσεις απομάκρυνσης των συνιστωσών ταλαντώσεων $x_1=f(t)$ και $x_2=f(t)$.
 Γ) Να υπολογίσετε ποια χρονική στιγμή μηδενίζεται το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης για 1^η φορά μετά την $t=0$ και να βρείτε τις απομακρύνσεις x_1 και x_2 των συνιστωσών ταλαντώσεων την ίδια χρονική στιγμή.
 [ΑΠ: Α) 0,5s, Β) $x_1=0,25\eta\mu 202\pi t$ (S.I) και $x_2=0,25\eta\mu 198\pi t$ (S.I), Γ) 0,25s, $x_1=+0,25m$, $x_2=-0,25m$]

57. **A)** Το οριζόντιο ελατήριο του σχήματος έχει σταθερά $k=400\text{N/m}$ και το σώμα μάζας $M=1\text{Kg}$ που είναι στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο το εκτελεί α.α.τ. με πλάτος A_1 στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Από ύψος $h=2\text{m}$ πάνω από το σώμα M αφήνουμε ένα άλλο σώμα μάζας $m=3\text{Kg}$, το οποίο κατά την κάθοδό του και ενώ βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το M συγκρούεται



πλαστικά και ακαριαία με αυτό. Κατά την κρούση των δυο σωμάτων παράγεται η μέγιστη δυνατή θερμότητα, που είναι $Q=84\text{J}$. Επίσης, δίνεται ότι $g=10\text{m/s}^2$.

- α) Να βρείτε το πλάτος A_1 της α.α.τ. του σώματος M πριν από την κρούση. β) Να βρείτε το πλάτος A_2 της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
 γ) Δίνεται ότι λίγο πριν από την κρούση το σώμα M είχε $u>0$. Να γράψετε την εξίσωση $x=f(t)$, δηλαδή την εξίσωση απομάκρυνσης του συσσωματώματος των M και m σε σχέση με το χρόνο.

B) Ένα άλλο σώμα μάζας $m_2=2\text{Kg}$ εκτελεί α.α.τ. πλάτους A_2 . Το σώμα χρειάζεται χρόνο $\Delta t=\pi/54\text{s}$, ώστε από τη θέση $x=+\frac{A_2}{2}\sqrt{3}$ με $u>0$ να μεταβεί για 1^η φορά στη θέση $x=+A_2$. Όταν ο ταλαντωτής αυτός βρίσκεται στη θέση $x=+\frac{A_2}{2}\sqrt{2}$, η δυναμική του ενέργεια είναι $1,62\text{J}$, ενώ τη χρονική στιγμή $t=0$ έχει κινητική ενέργεια $K=3,24\text{J}$ και

$u>0$. Να προσδιορίσετε την εξίσωση $x_2=f(t)$ της α.α.τ. αυτού του ταλαντωτή.

Γ) Ένα τρίτο σώμα εκτελεί ταυτόχρονα τις ταλαντώσεις του συσσωματώματος της περίπτωσης Α και της μάζας m_2 της περίπτωσης Β, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στην ίδια διεύθυνση. Να υπολογίσετε:

- α) Το είδος και τη συχνότητα της συνισταμένης κίνησης που προκύπτει.
 β) Τον χρόνο μεταξύ δυο μεγιστοποιήσεων ή μηδενισμών του πλάτους της συνισταμένης ταλάντωσης.
 γ) Τον αριθμό των μεγιστοποιήσεων ή μηδενισμών του πλάτους σε χρόνο $t=62,5\text{s}$.
 [ΑΠ: Α) α) $0,4\text{m}$, β) $0,2\text{m}$, γ) $x=0,2\eta\mu 10t$ (S.I.) ,Β) $x=0,2\eta\mu 9t$ (S.I.), Γ) α) $(4,75/\pi)\text{Hz}$, β) $6,25\text{s}$, γ) $N=10$ μεγιστ.]