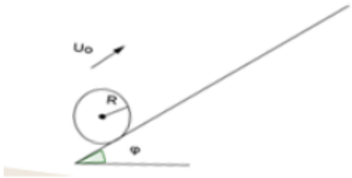
Άσκηση 2.

Από τη βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου κλίσης $\varphi = \frac{\pi}{6}$ rad εκτοξεύεται προς τα πάνω τροχός ακτίνας $R = 0,2\,m$ με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 10\ m/s$.



Ο τροχός φτάνει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου που βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος, σταματά στιγμιαία και μετά αρχίζει να κατεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο.

Θεωρούμε ότι η επιβράδυνση του τροχού κατά την άνοδο είναι ίση κατά μέτρο με την επιτάχυνση που απέκτησε ο τροχός κατά την κάθοδό του και ισχύει:

$\left|\alpha_{cm}(\alpha\nu\acute{o}\delta o\upsilon)\right| = \alpha_{cm}(\kappa\alpha\theta\acute{o}\delta o\upsilon) = 2\,m/s^2$. Να βρεθούν:

α) Ο χρόνος ανόδου.

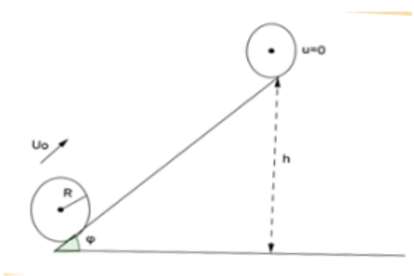
β) Το μέγιστο ύψος h από το έδαφος που φτάνει ο τροχός.

γ) Τη γωνία που θα διαγράψει μια ακτίνα R του τροχού κατά την κάθοδό του.

δ) Το διάγραμμα του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο $(\omega - t)$, για όλη την κίνηση.

Λύση

α) Κατά την άνοδο ισχύουν:



$$s = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2\ (1)$$

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 - \alpha_{cm} t\ (2)$$

Στην εξίσωση (2) για u=0 (γιατί ο τροχός στο υψηλότερο σημείο σταματά στιγμιαία) έχουμε:

$0 = \upsilon_0 - \alpha_{cm} t \Rightarrow \alpha_{cm} t = \upsilon_0 \Rightarrow$

$t = \dfrac{\upsilon_o}{\alpha_{cm}} = \dfrac{10}{2} s = 5s.$

β) $(1) \Rightarrow s = (10 \cdot 5 - \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2) m = 25 m$

Αλλά $h = s \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow h = 25 \cdot \dfrac{1}{2} m = 12,5 m$

γ) Κατά την κάθοδο ο τροχός εκτελεί μια σύνθετη κίνηση που αποτελείται από μια ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική και μια ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση και ισχύουν οι εξισώσεις (το χρονικό διάστημα Δt που εμφανίζεται στις παρακάτω εξισώσεις μετριέται από την στιγμή που ξεκίνησε η κάθοδος του τροχού)

$\omega = a_\gamma \Delta t (3)$

$\theta = \dfrac{1}{2} a_\gamma \cdot \Delta t^2 (4)$

$s_2 = \dfrac{1}{2} \alpha_{cm} \cdot \Delta t^2 (5)$

όπου s_2 το διάστημα που διανύει ο τροχός κατεβαίνοντας

και $a_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{\alpha_{cm}}{R} = \dfrac{2}{0,2} \dfrac{rad}{s^2} = 10 rad/s^2$

Από την (5) και επειδή $s_2 = s$ έχουμε:

$s_2 = s \Rightarrow s = \dfrac{1}{2} \alpha_{cm} \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t^2 = \dfrac{25 \cdot 2}{\alpha_{cm}} \Rightarrow$

$\Delta t = \sqrt{\dfrac{25 \cdot 2}{\alpha_{cm}}} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\dfrac{25 \cdot 2}{2}} s \Rightarrow \Delta t = \sqrt{25} s = 5s$

$(3) \Rightarrow \omega = a_\gamma \cdot \Delta t \Rightarrow$

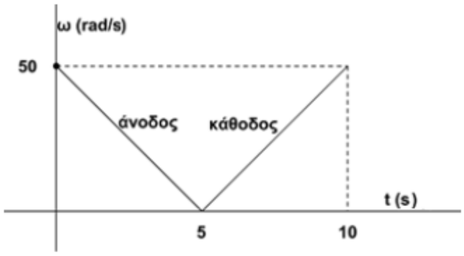
$\omega = 10 \cdot 5 \ rad/s = 50 rad/s$

$(4) \Rightarrow \theta = \dfrac{1}{2} \cdot a_\gamma \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \theta = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5^2 \ rad = 125 rad$

δ) Βρίσκουμε την αρχική και τελική γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega_0 = \frac{\upsilon_0}{R} = \frac{10}{0,2}\ rad/s = 50\ rad/s$$

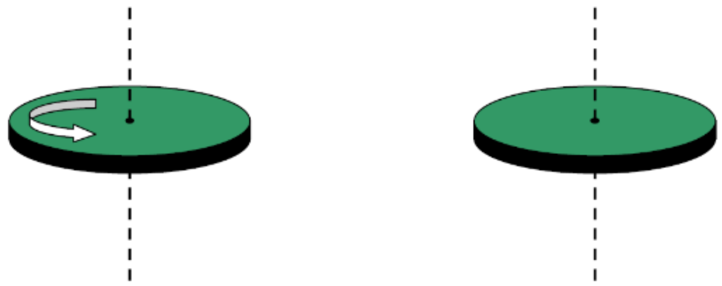
$$\omega_{τελ} = 50\ rad/s$$



και παρατηρούμε ότι στα πρώτα $5s$ κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη ενώ στα υπόλοιπα $5s$ ομαλά επιταχυνόμενη. Επομένως το διάγραμμα του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας είναι αυτό που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Άσκηση 3.

Ο ομογενής και ισοπαχής δίσκος του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, που περνά από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος. Τη στιγμή $t_0=0$ ξεκινά να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $2\,\frac{rad}{s^2}$. Τη στιγμή $t_A = 4s$, ο δίσκος αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $4\,\frac{rad}{s^2}$, μέχρι να σταματήσει.



α) Στο πρώτο σχήμα να σχεδιαστεί το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}_1$ και το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης $\vec{a}_{\gamma 1}$ του δίσκου κάποια στιγμή κατά τη διάρκεια της επιταχυνόμενης κίνησής του.

β) Στο δεύτερο σχήμα να σχεδιαστούν τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}_2$ και της γωνιακής επιτάχυνσης $\vec{a}_{\gamma 2}$ του δίσκου κάποια στιγμή κατά τη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησής του.

Θεωρώντας θετική τη φορά περιστροφής:

γ) Να γραφούν οι χρονικές εξισώσεις $\omega = f(t)$ της γωνιακής ταχύτητας για όλη τη διάρκεια της κίνησης.

δ) Να γίνει η γραφική παράσταση ω-t για τη συνολική κίνηση.

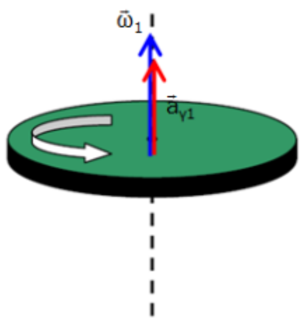
ε) Να γραφεί η χρονική εξίσωση $\theta = f(t)$ της γωνίας στροφής στην επιταχυνόμενη κίνηση.

στ) Να υπολογιστεί η γωνία στροφής Δθ, κατά τη διάρκεια του 2ου δευτερολέπτου της επιβραδυνόμενης κίνησης.

ζ) Να βρεθεί ο συνολικός αριθμός των περιστροφών N, που εκτέλεσε ο τροχός από $t_0=0$ μέχρι να σταματήσει.

<u>Λύση</u>

α)

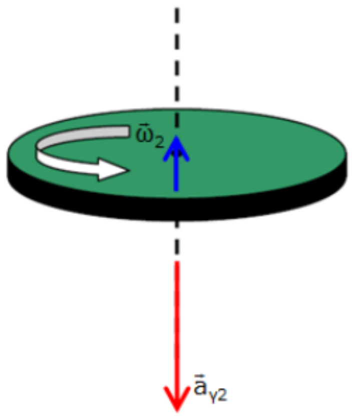


Επειδή ο δίσκος περιστρέφεται αριστερόστροφα, με χρήση του κανόνα του δεξιού χεριού, βρίσκουμε ότι η κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας είναι εκείνη του σχήματος.

Επειδή η κίνηση του δίσκου είναι επιταχυνόμενη, ισχύει ότι: $\vec{a}_\gamma \uparrow\uparrow \vec{\omega}$.

Επομένως, η γωνιακή επιτάχυνση θα έχει την κατεύθυνση του σχήματος.

β)



Στην επιβραδυνόμενη κίνηση η κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας παραμένει η ίδια με αυτήν της επιταχυνόμενης κίνησης, επειδή η φορά περιστροφής παραμένει ίδια.

Επειδή η κίνηση του δίσκου είναι επιβραδυνόμενη, ισχύει ότι: $\vec{a}_\gamma \uparrow\downarrow \vec{\omega}$.

Επομένως, η γωνιακή επιτάχυνση θα έχει την κατεύθυνση του σχήματος.

γ) Από τον ορισμό της γωνιακής επιτάχυνσης $a_\gamma = \dfrac{d\omega}{dt}$, για $a_\gamma = \sigma\tau\alpha\theta.$ έχουμε: $a_\gamma = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

Επομένως:

$$a_{\gamma 1} = +2\,\frac{rad}{s^2} \Rightarrow 2 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow 2 = \frac{\omega - 0}{t - 0} \Rightarrow \omega = 2t \ \text{(S.I.)},\ 0 \le t < 4\,s \quad (1)$$

Η γωνιακή ταχύτητα που αποκτά ο δίσκος την t_A=4s αποτελεί την αρχική γωνιακή ταχύτητα με την οποία ξεκινά η επιβραδυνόμενη κίνηση.
Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει ω_A=+8 rad/s. Επομένως:

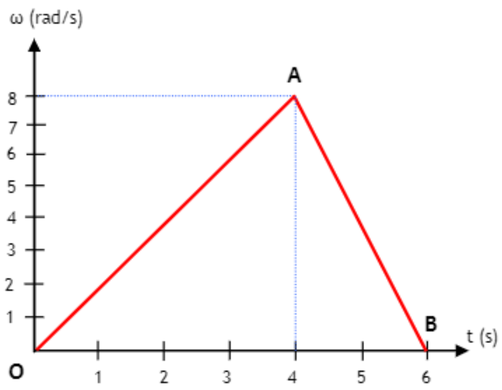
$$a_{\gamma 2} = -4\,\frac{rad}{s^2} \Rightarrow -4 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow -4 = \frac{\omega - 8}{t - 4} \Rightarrow \omega = -4t + 24 \ \text{(S.I.)} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (2) ω= 0 rad/s βρίσκουμε τη χρονική στιγμή που ο δίσκος σταματά. Προκύπτει t=6s. Άρα το πεδίο ορισμού για τη σχέση (2) είναι $4s \le t \le 6\,s$.

δ) Οι εξισώσεις του ερωτήματος 3 είναι πρώτου βαθμού ως προς t, επομένως, οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις είναι ευθύγραμμα τμήματα. Για το σχεδιασμό καθενός ευθυγράμμου τμήματος, απαιτείται η γνώση δύο σημείων στο διάγραμμα ω-t. Τα σημεία αυτά έχουν ήδη βρεθεί στο ερώτημα 3:

- για t=0 s → ω_0=0 rad/s (σημείο Ο)
- για t=4 s → ω_A=+8 rad/s (σημείο Α)
- για t=6 s → ω_B=0 rad/s (σημείο Β)

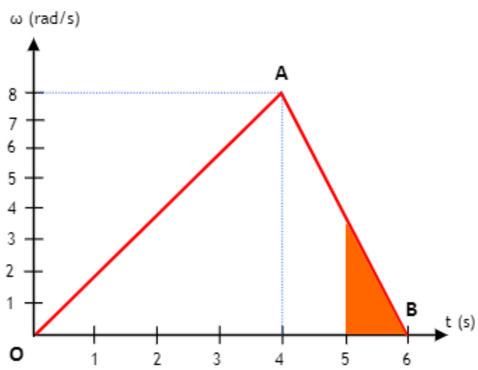
Με χρήση αυτών των σημείων, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος:



ε) Από τη σχέση $x_{cm} = \upsilon_{cm,0} t + \frac{1}{2} a_{cm} t^2$, με αντιστοίχιση των μεγεθών της μεταφορικής και της στροφικής κίνησης, εξάγεται η σχέση:

$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} a_{\gamma 1} t^2$. Αντικαθιστώντας τα μεγέθη ω_0 και $a_{\gamma 1}$ που μας δίνονται στην εκφώνηση προκύπτει $\theta = t^2$ (S.I.), $0 \le t < 4$ s

στ) Το δεύτερο δευτερόλεπτο της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι από t=5s ως t'=6s. Η γωνία στροφής υπολογίζεται από το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου:



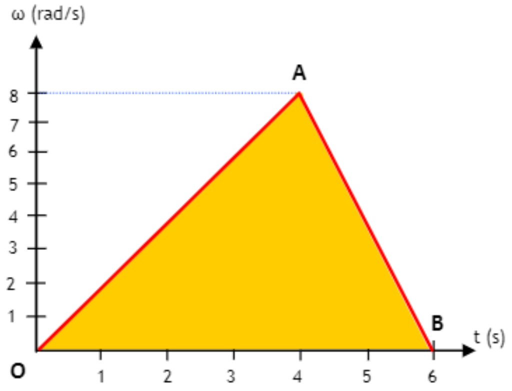
Από τη σχέση (2) του ερωτήματος 3, για t=5s εξάγεται ότι ω_5=+4 rad/s. Επομένως:

$$\Delta\theta = \text{Εμβ}_{\tau\rho\iota\gamma} \left(= \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}\right) \Rightarrow \Delta\theta = \frac{1 \cdot 4}{2}\,\text{rad} \Rightarrow \Delta\theta = 2\,\text{rad}$$

ζ) Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$N = \frac{\Delta\theta_{o\lambda}}{2\pi}$$

όπου $\Delta\theta_{o\lambda}$ = συνολική γωνία στροφής
Η συνολική γωνία στροφής βρίσκεται από το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του παρακάτω σχήματος:



$$\Delta\theta_{ολ} = Εμβ_{τριγ} \left(= \frac{β \cdot υ}{2}\right) \Rightarrow \Delta\theta_{ολ} = \frac{6 \cdot 8}{2}\, rad \Rightarrow \Delta\theta_{ολ} = 24\, rad$$

Επομένως:

$$N = \frac{\Delta\theta_{ολ}}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{12}{\pi}$$ περιστροφές.

Άσκηση 4.

Οι τροχοί ενός ποδηλάτου έχουν ακτίνα $R = 40\ cm$.

Α. Το ποδήλατο ανηφορίζει με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{cm} = 0,4\ \frac{m}{s}$ σε πλαγιά και οι τροχοί του κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν.

1. Να βρεθεί το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής κάθε τροχού.
2. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του ανώτερου σημείου από το έδαφος κάθε τροχού.

Β. Το ποδήλατο φτάνει σε κατηφόρα και αρχίζει να επιταχύνεται. Η γωνιακή επιτάχυνση κάθε τροχού έχει μέτρο $a_\gamma = 2\ \frac{rad}{s^2}$.

3. Να βρεθεί το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας α_{cm} του ποδηλάτου.

Γ. Κατά τη διάρκεια όλης της πορείας του ποδηλάτου (ανηφόρα + κατηφόρα) κάθε τροχός έχει διαγράψει $N = \frac{2000}{\pi}$ περιστροφές.

4. Να βρεθεί το μήκος της τροχιάς που κάλυψε το ποδήλατο.

<u>Λύση</u>

Μετατροπή στο SI:

$R = 40\ cm \Rightarrow R = 0,4\ m$

1. Η κοινή γωνιακή ταχύτητα ω των δύο τροχών υπολογίζεται ως εξής:

$$\upsilon_{cm} = \omega R \Rightarrow 0,4\ \frac{m}{s} = \omega \cdot 0,4m \Rightarrow \omega = 1\ \frac{rad}{s}$$

2. Η κοινή ταχύτητα $\upsilon_{\alpha\nu.\sigma}$ των ανωτέρων σημείων των δύο τροχών υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\upsilon_{\alpha\nu.\sigma} = 2\upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_{\alpha\nu.\sigma} = 0,8\ \frac{m}{s}$$

3. Το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του ποδηλάτου υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\alpha_{cm} = a_\gamma R \Rightarrow \alpha_{cm} = 2 \cdot 0,4\ \frac{m}{s^2} \Rightarrow \alpha_{cm} = 0,8\ \frac{m}{s^2}$$

4. Αρχικά θα υπολογίσουμε τη συνολική γωνία στροφής Δθ:

$$N = \frac{2000}{\pi} = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow \Delta\theta = 2\pi N = 4000\ rad$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το μήκος της τροχιάς που κάλυψε το ποδήλατο από τον τύπο:

$$\Delta x = \Delta\theta \cdot R \Rightarrow \Delta x = 4000 \cdot 0,4\,m \Rightarrow \Delta x = 1600\ m$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Ένα τρακτέρ έχει τροχούς με διαμέτρους δ_1=1m και δ_2=0,5m και αρχικά κινείται με ταχύτητα $\upsilon_0 = 10 m/s$. Ο οδηγός πατάει φρένο για κάποιο λόγο και οι τροχοί αρχίζουν να επιβραδύνονται. Αν γνωρίζουμε ότι η επιτάχυνση του τρακτέρ είναι σταθερή και ίση με $\alpha_{cm} = -2 m/s^2$, να βρεθούν:

α) Η αρχική γωνιακή ταχύτητα του κάθε τροχού καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση που θα αποκτήσει κάθε τροχός.
β) Το συνολικό διάστημα μέχρι το τρακτέρ να σταματήσει.
γ) Μετά από μετατόπιση $S = 16 m$ από τη στιγμή που άρχισε να επιβραδύνεται το τρακτέρ, από το ψηλότερο σημείο του μεγαλύτερου τροχού ξεκολλάει ένα κομμάτι λάσπης μάζας m.
i) Με τι ταχύτητα ξεκολλάει αυτό το κομμάτι μάζας m;
ii) Η συνολική εφαπτομενική επιτάχυνση που έχει το κομμάτι λάσπης ελάχιστα πριν ξεκολλήσει.

<u>Λύση</u>

α) Ο κάθε τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και εκτελεί ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, άρα ισχύουν οι γενικές εξισώσεις για τον καθένα:

$$u_{cm} = u_o + \alpha_{cm} t \,(1)$$

$$s = u_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha_{cm} \cdot t^2 \,(2)$$

$$\omega = \omega_0 + a_\gamma t \,(3)$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} a_\gamma t^2 \,(4)$$

$$u_{cm} = \omega R \,(5)$$

$$\alpha_{cm} = a_\gamma R \,(6)$$

Οι τροχοί έχουν ίδια μεταφορική ταχύτητα οπότε θα έχουν και την ίδια μεταφορική επιτάχυνση