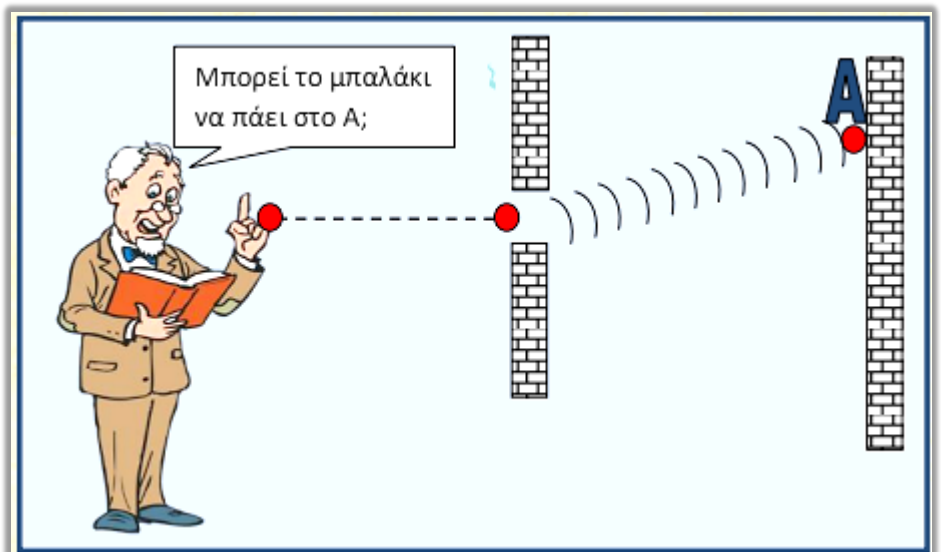
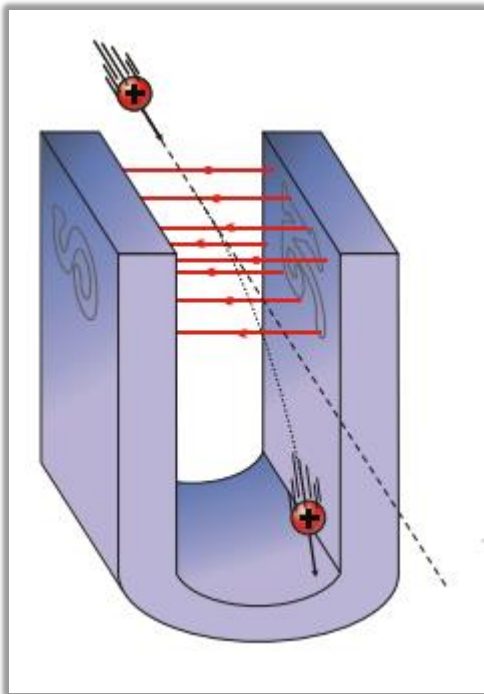


ΦΥΣΙΚΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ



Κρούσεις

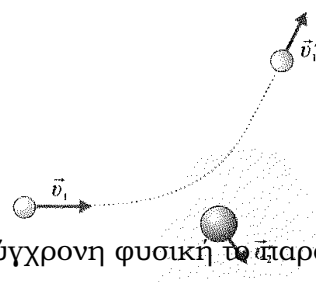
Στην μηχανική με τον όρο κρούση εννοούμε τη σύγκρουση δύο σωμάτων που κινούνται το ένα σχετικά με το άλλο. Το φαινόμενο της κρούσης έχει δύο χαρακτηριστικά:

- Έχει πολύ μικρή χρονική διάρκεια.
- Κατά τη διάρκεια της επαφής των δύο σωμάτων αναπτύσσονται πολύ ισχυρές δυνάμεις, ισχυρότερες από όλες τις άλλες που μπορεί να ασκούνται στα σώματα (π.χ. βαρύτητα). Οι δυνάμεις αυτές έχουν σχέση "δράσης - αντίδρασης" και το μέτρο τους μεταβάλλεται κατά την διάρκεια της κρούσης.

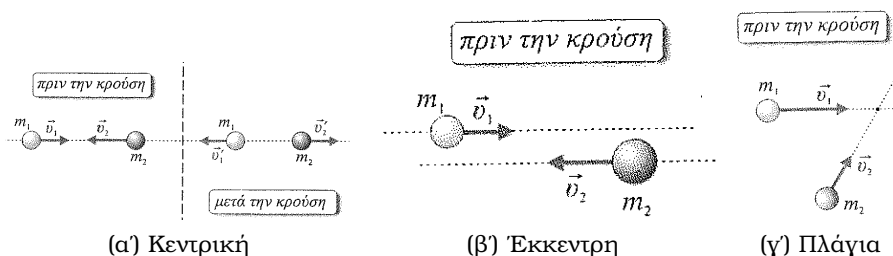
Στην ατομική και πυρηνική φυσική η έννοια της κρούσης επεκτείνεται, ώστε να περιλαμβάνει και την αλληλεπίδραση μεταξύ σωματιδίων τα οποία δεν έρχονται σε επαφή.

Για παράδειγμα η εκτόξευση ενός ηλεκτρονίου προς ένα φορτισμένο σωματίδιο, έχει ως αποτέλεσμα την απότομη αλλαγή της κινητικής κατάστασης των σωματιδίων, τα οποία αν και δεν έρχονται σε επαφή, εμφανίζουν τα χαρακτηριστικά της κρούσης.

Ονομάζουμε κρούση κάθε φαινόμενο και του μικρόκοσμου, στο οποίο δύο σώματα αλληλεπιδρούν με σχετικά μεγάλες δυνάμεις για πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Στην σύγχρονη φυσική το παραπάνω φαινόμενο ονομάζεται και **σκέδαση**.



4.1 Τα είδη της κρούσης, ανάλογα με την διεύθυνση κίνησης των σωμάτων πριν συγκρουστούν.



- **Κεντρική ή μετωπική κρούση** ονομάζεται η κρούση, στην οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται βρίσκονται πάνω στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα μάζας τους.

- **Έκκεντρη** ονομάζεται η κρούση στην οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται είναι παράλληλα μεταξύ τους.
- **Πλάγια** ονομάζεται η κρούση στην οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται δεν έχουν την ίδια διεύθυνση.

Η διατήρηση της ορμής στις κρούσεις

Επειδή κατά την διάρκεια της κρούσης δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στα σώματα ή η συνισταμένη τους είναι μηδέν θεωρούμε το σύστημα των σωμάτων **μονωμένο**. Άρα:

$$\Sigma \vec{F}_{\epsilon\varsigma} = \frac{d\vec{P}_{o\lambda}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{o\lambda} = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \vec{P}_{o\lambda(\pi\rho\nu)} = \vec{P}_{o\lambda(\mu\epsilon\tau\alpha)}$$

Η ολική ορμή ενός συστήματος σωμάτων, κατά την διάρκεια της κρούσης διατηρείται.

4.2 Τα είδη της κρούσης ανάλογα με την διατήρηση της κινητικής ενέργειας των συγκρουόμενων σωμάτων.

Σε αντίθεση με την Ορμή που παραμένει σταθερή σε όλες τις περιπτώσεις κρούσεων που θα μελετήσουμε, δεν συμβαίνει το ίδιο με την μηχανική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων. Σε κάθε κρούση υπάρχουν δύο βασικά στάδια:

Στο πρώτο στάδιο τα σώματα έρχονται σε επαφή μεταξύ τους και αρχίζουν να παραμορφώνονται, μέχρι να αποκτήσουν κοινή στιγμιαία ταχύτητα. Η απαιτούμενη ενέργεια για την παραμόρφωση τους προέρχεται από την αρχική τους μηχανική ενέργεια. Επειδή η κρούση γίνεται σε μικρό χρονικό διάστημα, θεωρούμε ότι τα σώματα δεν αλλάζουν θέση, άρα δεν μεταβάλλεται η Βαρυτική δυναμική τους ενέργεια, παρά μόνο η κινητική τους.

Στο δεύτερο στάδιο, ανάλογα με την φύση των σωμάτων που παραμορφώνονται η κρούση διακρίνεται σε ελαστική ή σε ανελαστική.

Ελαστική Κρούση

Η παραμόρφωση εξαφανίζεται και το σύστημα αποκτά πάλι την κινητική ενέργεια που είχε πριν την κρούση. Η αιτία είναι οι φύση των δυνάμεων που ασκούνται στα σώματα κατά την διάρκεια της κρούσης, καθώς είναι ελαστικές δυνάμεις δεν προκαλούν μόνιμες παραμορφώσεις. Άρα **η κρούση στην οποία η Κινητική Ενέργεια του συστήματος των σωμάτων παραμένει σταθερή ονομάζεται ελαστική**

Η διατύπωση της Διατήρησης της Κινητικής ενέργειας κατά την ελαστική κρούση διατυπώνεται ως εξής:

$$K_{o\lambda(\pi\rho\nu)} = K_{o\lambda(\mu\epsilon\tau\alpha)}$$

Η ελαστική κρούση είναι ιδανική περίπτωση, αλλά μπορούμε να θεωρήσουμε ελαστικές τις κρούσεις ανάμεσα σε σκληρά σώματα (π.χ. μπάλες μπιλιάρδου). Στην περίπτωση όμως του μικρόκοσμου οι κρούσεις (σκεδάσεις) είναι απόλυτα ελαστικές.

Ανελαστική Κρούση

Η παραμόρφωση των σωμάτων δεν εξαφανίζεται τελείως και ένα μέρος της αρχικής Κινητικής ενέργειας που δαπανήθηκε για την παραμόρφωση δεν γίνεται πάλι Κινητική ενέργεια, αλλά θερμότητα ή ενέργεια μόνιμης παραμόρφωσης. Η αιτία είναι πάλι η φύση των δυνάμεων που ασκούνται στα σώματα, καθώς είναι δυνάμεις που προκαλούν μόνιμες παραμορφώσεις. Άρα **η κρούση στην οποία μέρος της Κινητικής Ενέργειας του συστήματος των σωμάτων μετατρέπεται σε θερμότητα ονομάζεται ανελαστική κρούση**

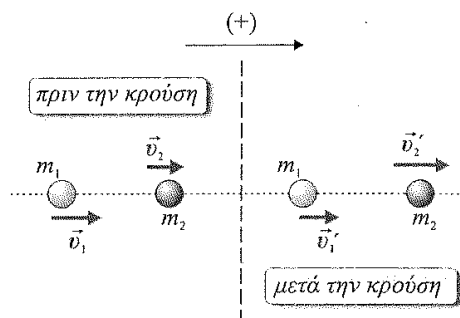
Μια ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης είναι εκείνη κατά την οποία τα σώματα μετά την κρούση γίνονται συσσωμάτωμα και κινούνται με κοινή ταχύτητα. Η κρούση αυτή λέγεται **πλαστική** και έχει μελετηθεί στην Α Λυκείου. Η διατύπωση της διατήρησης της ενέργειας κατά την ανελαστική κρούση διατυπώνεται ως εξής:

$$K_{ολ(πριν)} - E_{απωλ} = K_{ολ(μετα)} \Rightarrow K_{ολ(πριν)} > K_{ολ(μετα)}$$

όπου βέβαια $E_{απωλ}$ είναι οι ενεργειακές απώλειες σε θερμότητα και ανελαστικές παραμορφώσεις.

4.2.1 Η κεντρική Ελαστική κρούση

Θεωρούμε δύο υλικά Σώματα με μάζες m_1 και m_2 , που κινούνται σε οριζόντιο λείο επίπεδο με ταχύτητας $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$. Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά και μετά την κρούση αποκτούν νέες ταχύτητες $\vec{v}'_1$ και $\vec{v}'_2$, τις οποίες θέλουμε να υπολογίσουμε. Ο υπολογισμός είναι απλός αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τις βασικές ιδέες - αρχές που αναπτύχθηκαν παραπάνω.



Διατήρηση της Ορμής

$$\vec{P}_{ολ(πριν)} = \vec{P}_{ολ(μετα)} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (4.1)$$

προσέχουμε το πρόσημο των ταχυτήτων γιατί δεν ξεχνάμε τον διανυσματικό χαρακτήρα της σχέσης μας.

Διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας

$$K_{ολ(πριν)} = K_{ολ(μετα)} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \quad (4.2)$$

Η εξίσωση (4.1) γράφεται:

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)$$

Η εξίσωση (4.2) γράφεται:

$$m_1(v_1^2 - v'^2_1) = m_2(v'^2_2 - v_2^2)$$

Διαιρούμε κατα μέλη τις παραπάνω σχέσεις:

$$\frac{v_1 - v'_1}{v_1^2 - v'^2_1} = \frac{v'_2 - v_2}{v'^2_2 - v_2^2}$$

και προκύπτει εύκολα ότι $v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2 \Rightarrow v'_2 = v_1 + v'_1 - v_2$

Αντικαθιστώντας στην (4.1) και λύνοντας ως προς v'_1 βρίσκουμε τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 \quad (4.3)$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2 \quad (4.4)$$

Βέβαια κατά τον υπολογισμό μας υποθέσαμε μια συγκεκριμένη φορά για τις ταχύτητες πριν και μετά την κρούση, είναι προφανές ότι σε περίπτωση αντίθετης φοράς από την παραπάνω οι σχέσεις μας οδηγούν σε αρνητικές τιμές για τις ταχύτητες. **Οι παραπάνω σχέσεις δεν είναι τόσο εύκολο να απομνημονευτούν, αλλά είναι ευκολότερο να αποδειχθούν από τις βασικές αρχές!**

Ειδικές περιπτώσεις

α. **Τα δύο σώματα έχουν ίσες μάζας** $m_1 = m_2 = m$

Από τις παραπάνω σχέσεις (4.3), (4.4) με αντικατάσταση των μαζών προκύπτει:

$$v'_1 = v_2 \quad \text{και} \quad v'_2 = v_1$$

Δηλαδή, **κατά την κεντρική ελαστική κρούση δύο σωμάτων που έχουν ίσες μάζες, τα σώματα ανταλλάσσουν τις ταχύτητες τους.**

Βέβαια στο παραπάνω συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε αν ξεκινήσουμε από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής και την Διατήρηση της Ενέργειας, όπως κάναμε παραπάνω.

β. **Το ένα σώμα είναι ακίνητο πριν την κρούση** ($v_2 = 0$) Από τις σχέσεις (4.3), (4.4) προκύπτει:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \quad (4.5)$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (4.6)$$

Βέβαια στην περίπτωση που έχουν και ίσες μάζες και το ένα σώμα είναι ακίνητο, τότε το αρχικά κινούμενο σταματάει μετά την κρούση ($v'_1 = 0$) και το αρχικά ακίνητο σώμα αποκτά ταχύτητα $v'_2 = v_1$

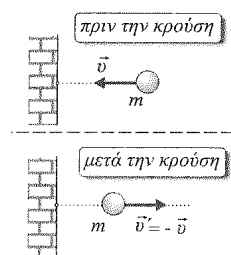
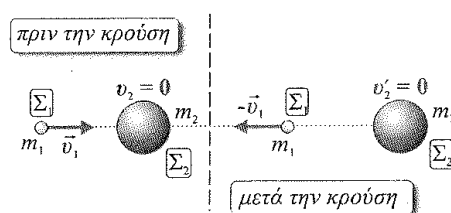
Ελαστική Κρούση σώματος με άλλο ακίνητο πολύ μεγάλης μάζας

Αν το ένα σώμα έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα σε σχέση με το άλλο ($m_1 \ll m_2$) και είναι ακίνητο πριν την κρούση ($v_2 = 0$) τότε:

$$m_1 \ll m_2 \text{ ή } \frac{m_1}{m_2} \ll 1 \text{ ή } \frac{m_1}{m_2} \cong 0.$$

άρα οι παραπάνω σχέσεις μας δίνουν:

$$v'_1 \cong -v_1 \quad \text{και} \quad v'_2 \cong 0$$



Δηλαδή: **ένα σώμα μικρής μάζας που συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα πολύ μεγαλύτερης μάζας αντανakλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς από αυτή που είχε πριν την κρούση. Το σώμα μεγάλης μάζας μένει πρακτικά ακίνητο.**

Σύμφωνα με τα παραπάνω, όταν ένα σώμα μικρής μάζας προσκρούει ελαστικά και κάθετα στην επιφάνεια ενός τοίχου ή σε ένα δάπεδο, τότε ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς.

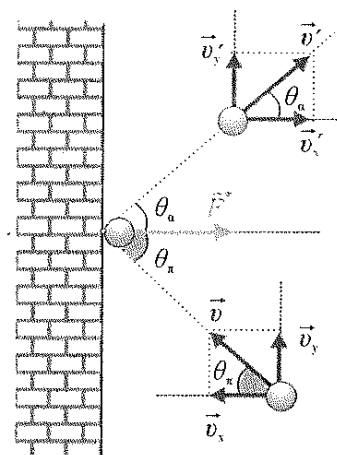
Αν το σώμα προσκρούει ελαστικά και πλάγια σε ένα τοίχο με ταχύτητα v , αναλύουμε την ταχύτητα του σε δύο συνιστώσες, μια κάθετη στον τοίχο και μια παράλληλη σε αυτόν, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σύμφωνα με τα παραπάνω η κάθετη συνιστώσα στον τοίχο θα αλλάξει φορά και θα διατηρήσει το μέτρο της ($v'_x = -v_x$). Η παράλληλη στον τοίχο συνιστώσα δεν μεταβάλλεται ($v'_y = v_y$). Άρα το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μετά την κρούση v' θα είναι $v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y}$.

Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω, το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό:

$$v' = v$$

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να φτάσουμε βέβαια και με την Διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας κατά την κρούση.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 \Rightarrow v' = v$$



Αν θ_{pi} και θ_α οι γωνίες που σχηματίζουν με την κάθετη στον τοίχο οι ταχύτητες του σώματος πριν και μετά την κρούση τότε ισχύει:

$$\eta\mu\theta_\pi = \frac{v_y}{v} \quad \sigma\upsilon\nu\theta_\alpha = \frac{v'_y}{v'}$$

επειδή $v_y = v'_y$ και $v = v'$ προκύπτει ότι η γωνία πρόσπτωσης στον τοίχο είναι ίση με την γωνία ανάκλασης από αυτόν.

$$\theta_\pi = \theta_\alpha \quad (4.7)$$

Το αποτέλεσμα είναι παρόμοιο με την νόμο της ανάκλασης για το φως που προσπίπτει πάνω σε ένα καθρέπτη. Απόηλητα συμβατό βέβαια με την σωματιδιακή φύση του φωτός, αρκεί να φανταστούμε ότι τα φωτόνια συμπεριφέρονται ως σωματίδια και ανακλώνται όπως το παραπάνω σωματίδιο.

4.2.2 Η Κεντρική Ανελαστική κρούση

Θεωρούμε τώρα δύο υλικά σώματα με μάζες m_1 και m_2 που κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$. Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και μετά την κρούση κινούνται με ταχύτητες $\vec{v}'_1$ και $\vec{v}'_2$.

Διατήρηση της Ορμής

$$\vec{P}_{ολ(\pi\rho\nu)} = \vec{P}_{ολ(\mu\epsilon\tau\alpha)} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

προσέχουμε το πρόσημο των ταχυτήτων γιατί δεν ξεχνάμε τον διανυσματικό χαρακτήρα της σχέσης μας.

Διατήρηση της Ενέργειας

$$K_{ολ(\pi\rho\nu)} - E_{απωλ} = K_{ολ(\mu\epsilon\tau\alpha)} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - E_{απωλ} = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2$$

όπου βέβαια $E_{απωλ}$ είναι οι απώλειες λόγω των ανελαστικών φαινομένων. Αν μετά την κρούση τα δύο σώματα δημιουργήσουν ένα συσσωμάτωμα που έχει μια ταχύτητα $\vec{V}$, η ανελαστική κρούση ονομάζεται **Πλαστική**. Σε μια πλαστική κρούση είναι επίσης προφανές ότι έχουμε απώλειες της ενέργειας σε ενέργεια πλαστικής παραμόρφωσης και θερμότητα. Το πρόβλημα αυτό έχει μελετηθεί στην Α Λυκείου.

4.2.3 Η Πλάγια ελαστική κρούση

Στην περίπτωση που τα σώματα δεν συγκρούονται κεντρικά, αλλά έκκεντρα ή πλάγια τότε θα αποκτούν νέες ταχύτητες με διευθύνσεις πάνω στο επίπεδο. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα δυο υλικά σώματα με μάζες m_1 και m_2 με το δεύτερο να είναι αρχικά ακίνητο. Μετά την κρούση τα σώματα θα κινηθούν με ταχύτητες $\vec{v}'_1$ και $\vec{v}'_2$. Αναλύουμε τις ταχύτητες σε κατάλληλες συνιστώσες και προχωράμε στην εφαρμογή των βασικών αρχών.

Διατήρηση της Ορμής στον άξονα $x'Ox$

$$P_{ολ(πρην)}(x) = P_{ολ(μετα)}(x) \Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$

Διατήρηση της Ορμής στον άξονα $y'Oy$

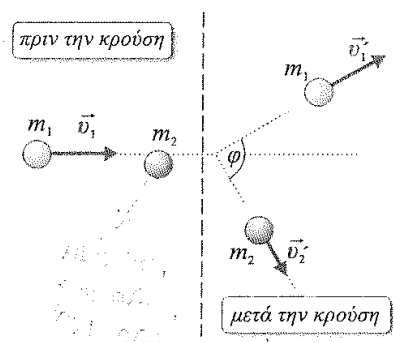
$$P_{ολ(πρην)}(y) = P_{ολ(μετα)}(y) \Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v'_{1y} - m_2 v'_{2y}$$

Διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας

$$K_{ολ(πρην)} = K_{ολ(μετα)} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ένα σύστημα τριών εξισώσεων, αλλά με 4 αγνώστους καθώς είναι άγνωστη η κατεύθυνση και το μέτρο των ταχυτήτων μετά την κρούση. Μπορούμε βέβαια να λύσουμε το πρόβλημα εφόσον μας είναι γνωστό ένα ακόμα μέγεθος (για παράδειγμα μια γωνία).

Το πρόβλημα της πλάγιας πλαστικής κρούσης λύνεται πάλι με την διατήρηση της ορμής σε κάθε άξονα. Δεν ξεχνάμε βέβαια ότι σε αυτή την περίπτωση δεν διατηρείται σταθερή η Κινητική Ενέργεια του συστήματος των σωμάτων.



4.3 Δυναμική Ενέργεια μέγιστης ελαστικής παραμόρφωσης

Όταν τα δύο σημειακά σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, τότε κάποια στιγμή t , κατά την διάρκεια της επαφής τους, οι ταχύτητες των δύο σφαιρών γίνονται ίσες (κατά μέτρο και κατεύθυνση) και η παραμόρφωση των σωμάτων είναι η μέγιστη δυνατή.

Αν υποθέσουμε ότι η κοινή ταχύτητα τους είναι η $\vec{V}$ τότε ονομάζουμε U_{max} την μέγιστη ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης τους. Για να την υπολογίσουμε αρκεί να εφαρμόσουμε την *Αρχή Διατήρησης της Ορμής* και την *Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας* για την χρονική στιγμή αυτή.

Από την διατήρηση της ορμής προκύπτει:

$$\vec{P}_{ολ(πρην)} = \vec{P}_{ολ(t)} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V + m_2 V \Rightarrow V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Από την διατήρηση της ενέργειας προκύπτει:

$$K_{ολ(πρην)} = K_{ολ(t)} + U_{max} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V^2 + \frac{1}{2} m_2 V^2 + U_{max}$$

Άρα υπολογίζω την U_{max} η οποία στην συνέχεια θα μετατραπεί πάλι σε Κινητική Ενέργεια καθώς στην ελαστική κρούση η Κινητική Ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

Κεφάλαιο 3

Μηχανική Στερεού Σώματος

3.1 Η κινηματική της κυκλικής κίνησης

Κυκλική Κίνηση

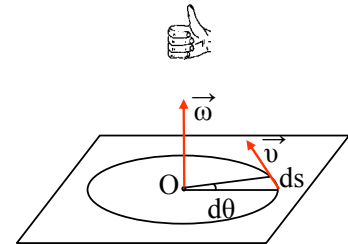
Θεωρούμε ένα υλικό σημείο, το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R , όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν υποθέσουμε ότι σε χρονικό διάστημα dt διαγράφει μήκος τόξου ds που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $d\theta$.

Γραμμική Ταχύτητα

Ονομάζουμε γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$ του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t , ένα διάνυσμα, το οποίο έχει μέτρο ίσο με το πηλίκο του τόξου ds προς τον αντίστοιχο χρόνο dt .

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (3.1)$$

Η γραμμική ταχύτητα εφάπτεται της κυκλικής τροχιάς στη θέση που βρίσκεται κάθε φορά το υλικό σημείο και έχει τη φορά της κίνησης του. Η μονάδα μέτρησης είναι το $1m/s$.



Γωνιακή Ταχύτητα

Ονομάζουμε γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t ένα διάνυσμα, το οποίο έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς του και μέτρο ίσο με το πηλίκο της γωνιάς $d\theta$ προς τον αντίστοιχο χρόνο dt .

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (3.2)$$

Η κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η μονάδα μέτρησης της γωνιακής ταχύτητας είναι το $1rad/s$.

Σχέση γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας

Η επίκεντρη γωνία ορίζεται από την σχέση $\theta = \frac{s}{R}$. Από τον ορισμό της γωνιάς έχουμε:

$$d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow ds = R \cdot d\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = \omega \cdot R$$

Κεντρομόλος επιτάχυνση

Στην κυκλική κίνηση λόγω της μεταβολής της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας του, το υλικό σημείο έχει κεντρομόλο επιτάχυνση, της οποίας το μέτρο δίνεται από την σχέση:

$$\alpha_{\kappa} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R \quad (3.3)$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι υπεύθυνη για την μεταβολή της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας. Η διεύθυνση της είναι πάντα κάθετη στην γραμμική ταχύτητα.

Ομαλή κυκλική κίνηση

Όταν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας παραμένει σταθερό, τότε η κίνηση του υλικού σημείου χαρακτηρίζεται ως **Ομαλή Κυκλική Κίνηση**.

Στην κίνηση αυτή παραμένει επίσης σταθερό και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας, οπότε προκύπτει:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - 0}{t - 0} \Rightarrow \theta = \omega \cdot t$$

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το υλικό σημείο σε ίσους χρόνους διανύει ίσα τόξα.

Μεταβαλλόμενη κυκλική Κίνηση

Θεωρούμε ένα υλικό σημείο, το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R . Αν υποθέσουμε ότι σε χρονικό διάστημα dt μεταβάλλεται η γραμμική ταχύτητα κατά $d\vec{v}$ και η γωνιακή ταχύτητα κατά $d\vec{\omega}$ τότε η κίνηση του είναι μια μεταβαλλόμενη κίνηση.

Γραμμική (ή επιτρόχια) επιτάχυνση

Λόγω της μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας, το υλικό σημείο έχει γραμμική επιτάχυνση.

Ονομάζουμε γραμμική επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\epsilon}$ του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t ένα διάνυσμα, του οποίου το μέτρο είναι ίσο με το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της γραμμικής ταχύτητας.

$$\alpha_{\epsilon} = \frac{dv}{dt} \quad (3.4)$$

Η γραμμική επιτάχυνση εφάπτεται της κυκλικής τροχιάς και έχει τη φορά της κίνησης, όταν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας αυξάνεται και φορά αντίθετη από τη φορά της κίνησης, όταν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ελαττώνεται. Η μονάδα μέτρησης της γραμμικής επιτάχυνσης είναι το $1m/s^2$.

Το διανυσματικό άθροισμα της γραμμικής επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_\epsilon$ και της κεντρομόλου επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_\kappa$ δίνει την συνισταμένη επιτάχυνση $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_\epsilon + \vec{\alpha}_\kappa$ του υλικού σημείου σε κάθε θέση της τροχιάς του. Το μέτρο της συνολικής επιτάχυνσης είναι ίσο με $\alpha = \sqrt{\alpha_\epsilon^2 + \alpha_\kappa^2}$

Γωνιακή Επιτάχυνση

Ονομάζουμε γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t ένα διάνυσμα, του οποίου το μέτρο είναι ίσο με το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας.

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} \quad (3.5)$$

Η γωνιακή επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση του διανύσματος $d\vec{\omega}$. Μονάδα μέτρησης της γωνιακής επιτάχυνσης είναι το 1rad/s^2 . Γωνιακή επιτάχυνση 1rad/s^2 σημαίνει ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας είναι 1rad/s σε κάθε 1s .

Σχέση γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας

Η σχέση $v = \omega \cdot R$ μπορεί να γραφτεί:

$$dv = R \cdot d\omega \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha_\epsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$

Ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση

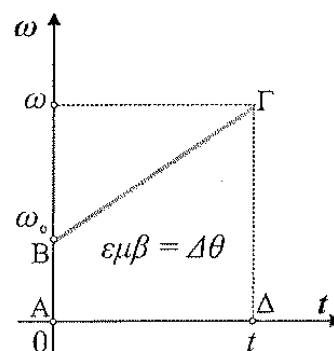
Όταν το μέτρο της επιτροχίας επιτάχυνσης παραμένει σταθερό, τότε η κίνηση του υλικού σημείου χαρακτηρίζεται ως **Ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση**.

Στην κίνηση αυτή παραμένει επίσης σταθερό και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης, άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - 0}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t \quad (3.6)$$



Από το διάγραμμα γωνιακής ταχύτητας (ω) - χρόνου (t) μπορούμε να υπολογίσουμε:

- την γωνιακή επιτάχυνση που είναι ίση με την κλίση της ευθείας $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

- την γωνία θ που διαγράφει το υλικό σημείο από την χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι την στιγμή t με τον υπολογισμό του εμβαδού που περικλείεται κάτω από την ευθεία. Εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \quad (3.7)$$

Στην περίπτωση της ομαλά επιβραδυνόμενης στροφικής κίνησης ($\alpha_{\gamma\omega\nu} < 0$) οι παραπάνω σχέσεις γράφονται: $\omega = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega\nu}|t$ και $\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2} |\alpha_{\gamma\omega\nu}| t^2$.

Παρακάτω ακολουθεί ένας πίνακας αντιστοιχιών μεταξύ γραμμικών και στροφικών μεγεθών της κυκλικής κίνησης.

Γραμμικά μεγέθη	Γωνιακά μεγέθη
Μήκος τόξου s	γωνία στροφής θ
γραμμική ταχύτητα v	γωνιακή ταχύτητα ω
γραμμική επιτάχυνση $\alpha_\epsilon = \frac{dv}{dt}$	γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$
Ομαλή Κυκλική Κίνηση	
$s = vt$	$\theta = \omega t$
Ομαλά Επιταχυνόμενη Κυκλική Κίνηση	
$v = v_0 + \alpha_\epsilon t$	$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t$
$s = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha_\epsilon t^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$
Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κυκλική Κίνηση	
$v = v_0 - \alpha_\epsilon t$	$\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t$
$s = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha_\epsilon t^2$	$\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$

3.2 Κινήσεις Στερών Σωμάτων

3.2.1 Υλικό σημείο και μηχανικό στερεό

Υλικά σημεία λέγονται τα σώματα που θεωρούμε ότι έχουν όλες τις άλητες ιδιότητες της ύλης, εκτός από διαστάσεις. Ένα υλικό σημείο, αφού δεν έχει διαστάσεις, μπορεί να εκτελεί μόνο μεταφορικές κινήσεις. Τέτοιες κινήσεις έχουμε περιγράψει στην Φυσική της Α Λυκείου.

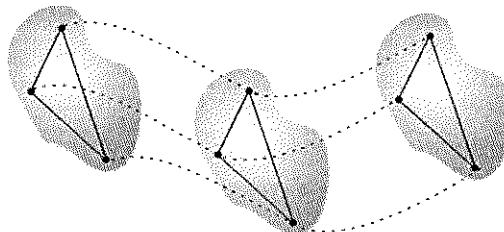
Μηχανικά Στερεά λέγονται τα σώματα που έχουν διαστάσεις, τις οποίες δεν μπορούμε να αγνοήσουμε και που δεν παραμορφώνονται όταν σε αυτά ασκούνται δυνάμεις. Ένα στερεό σώμα, αφού έχει διαστάσεις, εκτός από την μεταφορική κίνηση, μπορεί ακόμα να εκτελέσει περιστροφική (στροφική) κίνηση ή ακόμα και σύνθετη κίνηση (μεταφορική και περιστροφική).

Οι κινήσεις των στερεών σωμάτων

Ένα στερεό μπορεί να κάνει μεταφορική, στροφική ή σύνθετη κίνηση.

Μεταφορική Κίνηση

Λέμε ότι ένα σώμα κάνει μεταφορική κίνηση, όταν κάθε στιγμή όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα κατά μέτρο και κατεύθυνση.



Σχήμα 3.1: Μεταφορική κίνηση στερεού

Η μεταφορική κίνηση δεν είναι κατ'ανάγκη και ευθύγραμμη κίνηση, μπορεί να είναι και καμπυλόγραμμη αρκεί βέβαια να ισχύουν τα παρακάτω:

- οι τροχιές όλων των σημείων του σώματος να είναι παράλληλες
- το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του σώματος να μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του.

Στροφική Κίνηση

Λέμε ότι ένα σώμα κάνει στροφική κίνηση, όταν αλληλάζει προσανατολισμό.

Στη στροφική κίνηση υπάρχει μια ευθεία (ο άξονας περιστροφής) που όλα τα σημεία της παραμένουν ακίνητα, ενώ τα υπόλοιπα σημεία του σώματος κάνουν κυκλική κίνηση, σε επίπεδα κάθετα στον άξονα με τα κέντρα τους πάνω στον άξονα. Ο άξονας περιστροφής δεν είναι απαραίτητο να διέρχεται από το σώμα. Η στροφική κίνηση δεν είναι κατ' ανάγκη κυκλική κίνηση. **Αφού κάθε υλικό σημείο του στερεού εκτελεί μια κυκλική κίνηση, θα ισχύει για αυτό η κινηματική περιγραφή των παραπάνω παραγράφων.** Άρα για την στροφική κίνηση ενός στερεού σώματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες ποσότητες με τις οποίες περιγράψαμε την κυκλική κίνηση ενός υλικού σημείου.

Η έννοια του κέντρου μάζας

Με στόχο την απλοποίηση της μελέτης του στερεού σώματος εισάγουμε την έννοια του κέντρου μάζας του σώματος.

Κέντρο μάζας (cm) ονομάζεται το σημείο εκείνο που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με την μάζας του σώματος, αν σ' αυτό ασκούνται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

Στην ουσία η μελέτη της μεταφορικής κίνησης ενός στερεού σώματος, ανάγεται στη μελέτη της κίνησης του κέντρου μάζας του.

Η κίνηση του κέντρου μάζας ενός σώματος καθορίζεται από την συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα. Σύμφωνα με τον **2ο Νόμο του Νεύτωνα** ισχύει ότι:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{cm} \quad (3.8)$$

Στα ομογενή στερεά σώματα, τα οποία έχουν κέντρο συμμετρίας, το κέντρο μάζας τους συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας. Για παράδειγμα το κέντρο μάζας μιας ομογενούς σφαίρας είναι το κέντρο της σφαίρας. Βέβαια το κέντρο μάζας μπορεί να βρίσκεται και σε σημείο έξω από το σώμα. Για παράδειγμα σε ένα ομογενή δακτύλιο το κέντρο μάζας είναι στο κέντρο K του δακτυλίου.

Σύνθετη Κίνηση

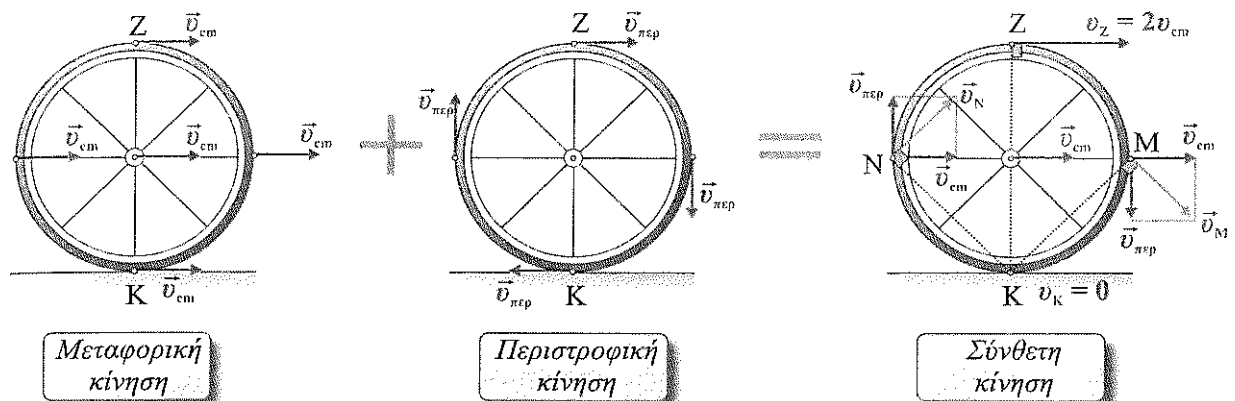
Λέμε ότι ένα σώμα κάνει σύνθετη κίνηση, όταν μετακινείται στον χώρο και ταυτόχρονα αλληλάζει ο προσανατολισμός του.

Για παράδειγμα σύνθετη κίνηση κάνει ο τροχός ενός αυτοκινήτου, όταν αυτό είναι σε κίνηση. Ο τροχός στρέφεται γύρω από τον άξονα του και ταυτόχρονα συμμετέχει στην μεταφορική κίνηση του αυτοκινήτου.

Η σύνθετη κίνηση μπορεί να περιγραφεί ως το αποτέλεσμα της Επαλληλίας (σύνθεσης) μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης.

Το παράδειγμα της κύλισης του τροχού

Παρακάτω βλέπουμε ένα τροχό που κυλιέται σε οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να ολισθαίνει. **Ο τροχός μπορεί να κυλιέται χωρίς ολίσθηση, όταν δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ του σημείου επαφής του τροχού με το δάπεδο.**

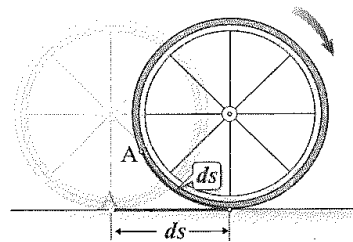


Η κίνηση του τροχού μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της επαλληλίας (σύνθεσης):

- μιας μεταφορικής κίνησης, λόγω της οποίας τα σημεία του τροχού, κάθε στιγμή έχουν την ίδια ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$

- β. μιας στροφικής κίνησης γύρω από τον άξονα του, λόγω της οποίας όλα τα σημεία του τροχού που απέχουν το ίδιο από τον άξονα περιστροφής έχουν ταχύτητες που είναι εφαπτόμενες στην κυκλική τους τροχιά και έχουν μέτρο v

Όταν ένας τροχός ακτίνας R κυλίεται, χωρίς να ολισθαίνει, τότε κάθε σημείο της περιφέρειας του έρχεται διαδοχικά σε επαφή με το δρόμο. Έτσι αν το κέντρο μάζας του τροχού έχει μετακινηθεί κατά διάστημα dx σε ένα χρονικό διάστημα dt , ένα σημείο της περιφέρειας θα έχει στραφεί κατά επίκεντρη γωνία $d\theta$, η οποία αντιστοιχεί σε μήκος τόξου ds , στον ίδιο χρόνο. Όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, λόγω της μη ολίσθησης ($dx = ds$) και με βάση τον ορισμό της επίκεντρης γωνίας έχουμε:



$$d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow ds = R \cdot d\theta \Rightarrow dx = R \cdot d\theta$$

Από τα παραπάνω προκύπτει η **1η Συνθήκη Κύλισης**, η οποία είναι αναγκαία συνθήκη, ώστε ο τροχός να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

$$x = R \cdot \theta \quad (3.9)$$

Με βάση τον ορισμό της ταχύτητας του κέντρου μάζας ($v_{cm} = \frac{dx}{dt}$) και της γωνιακής ταχύτητας ($\omega = \frac{d\theta}{dt}$) προκύπτει ότι:

$$\frac{dx}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v_{cm} = \omega \cdot R \quad (3.10)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί επίσης αναγκαία συνθήκη για την κύλιση χωρίς ολίσθηση και είναι η **2η Συνθήκη Κύλισης**. Επειδή $v = \omega \cdot R$ είναι η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του τροχού προκύπτει ότι $v_{cm} = v$. Συμπεραίνουμε ότι:

Κατά την κύλιση ενός τροχού, χωρίς ταυτόχρονη ολίσθηση, το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του είναι ίσο με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας του.

Με βάση την 2η Συνθήκη Κύλισης μπορούμε να προχωρήσουμε στον **προσδιορισμό της ταχύτητας διαφόρων σημείων της περιφέρειας του τροχού**. Η ταχύτητα κάθε σημείου Σ της περιφέρειας προκύπτει από την "επαλληλία" των επιμέρους κινήσεων ($\vec{v}_{\Sigma} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$). Από το παραπάνω σχήμα σύνθεσης των κινήσεων προκύπτουν:

- Η ταχύτητα του κέντρου Ο του τροχού είναι:

$$v_o = v_{cm}$$

- Η ταχύτητα του σημείου Κ του τροχού είναι:

$$v_k = v_{cm} - v = 0$$

- Η ταχύτητα του σημείου Z του τροχού είναι:

$$v_z = v_{cm} + v = 2v_{cm}$$

- Η ταχύτητα του σημείου M του τροχού είναι:

$$v_M = \sqrt{v_{cm}^2 + v^2} = \sqrt{2}v_{cm}$$

Αν θεωρήσουμε ότι ο τροχός κυλίνεται σε πλάγιο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει, είναι προφανές ότι τόσο η ταχύτητα του κέντρου μάζας, όσο και η γωνιακή ταχύτητα θα αυξάνονται. Έστω ότι σε χρόνο dt η ταχύτητα του κέντρου μάζας αυξάνεται κατά dv_{cm} και η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται κατά $d\omega$. Με βάση τον ορισμό της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας ($\alpha_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt}$) και της γωνιακής επιτάχυνσης ($\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$) έχουμε:

$$v_{cm} = \omega \cdot R \Rightarrow dv_{cm} = R \cdot d\omega \Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (3.11)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί επίσης αναγκαία συνθήκη, ώστε ο τροχός να κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει και είναι η **3η Συνθήκη Κύλισης**. Επειδή $\alpha_{\epsilon} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ είναι η επιρρόχια επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας του τροχού, προκύπτει ότι $\alpha_{cm} = \alpha_{\epsilon}$

Κατά την κύλιση ενός τροχού, χωρίς ταυτόχρονη ολίσθηση, το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του είναι ίσο με το μέτρο της επιρρόχιας επιτάχυνσης των σημείων της περιφέρειας του.

Η επιτάχυνση κάθε σημείου της περιφέρειας του τροχού είναι η συνισταμένη της επιτάχυνσης λόγω της μεταφορικής κίνησης ($\vec{\alpha}_{cm}$), της γραμμικής επιτάχυνσης λόγω της στροφικής κίνησης ($\vec{\alpha}_{\epsilon}$) και της κεντρομόλου επιτάχυνσης ($\vec{\alpha}_{\kappa}$).

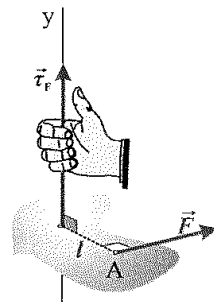
3.3 Ροπή Δύναμης - Ισορροπία Στερεού Σώματος

Ροπή Δύναμης

Η ροπή δύναμης ($\vec{\tau}$) είναι το φυσικό μέγεθος που περιγράφει την ικανότητα μιας δύναμης να στρέφει ένα σώμα.

α) Ροπή Δύναμης ως προς άξονα

Θεωρούμε ένα σώμα, το οποίο έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από τον άξονα zz' . Στο σώμα ασκείται δύναμη $\vec{F}$, η οποία



βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής και ο φορέας της απέχει από τον άξονα απόσταση l (μοχλοβραχίονας).

Ονομάζουμε ροπή δύναμης ως προς άξονα περιστροφής zz' , το διανυσματικό μέγεθος $\vec{\tau}$, το οποίο έχει:

- **διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής**
- **φορά τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού και**
- **μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου F της δύναμης επί την κάθετη απόσταση l της δύναμης από τον άξονα περιστροφής, δηλαδή:**

$$\tau = F \cdot l \quad (3.12)$$

Στο διεθνές σύστημα μονάδων η **μονάδα μέτρησης** της ροπής δύναμης είναι το $1N \cdot m$.

Αν η δύναμη δεν βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής, αλλά σχηματίζει γωνία ϕ με αυτό, τότε την αναλύουμε σε δύο συνιστώσες, μια συνιστώσα (F_x) πάνω σε επίπεδο κάθετο στον άξονα και μια συνιστώσα (F_y) παράλληλη προς τον άξονα. Η ροπή της δύναμης έχει μέτρο:

$$\tau = F_x \cdot l = Fl \sin \phi \quad (3.13)$$

Η ροπή μιας δύναμης ως προς άξονα είναι **ίση με μηδέν**:

- όταν η δύναμη ασκείται στον άξονα
- όταν ο φορέας της δύναμης τέμνει τον άξονα
- όταν ο φορέας της δύναμης είναι παράλληλος προς τον άξονα.

Κατά σύμβαση θεωρούμε θετική την ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από την φορά των δεικτών του ρολογιού και αρνητική τη ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει το σώμα κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Η **συνολική ροπή** ($\Sigma\tau$) που δέχεται ένα σώμα, στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις, **είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών** των δυνάμεων ως προς τον άξονα περιστροφής του σώματος.

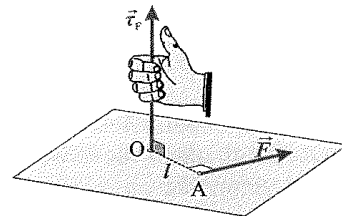
β)Ροπή Δύναμης ως προς σημείο

Αν σ ένα σώμα ελεύθερο να κινηθεί ασκείται δύναμη που ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση. Αν, όμως, ο φορέας της δύναμης δε διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση: μια μεταφορική και μια περιστροφική γύρω από ένα νοητό άξονα

που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζει ο φορέας της δύναμης και το κέντρο μάζας. Στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει σταθερός άξονας περιστροφής χρησιμοποιείται η έννοια της ροπής δύναμης ως προς σημείο.

Ονομάζουμε ροπή δύναμης ως προς σημείο O , το διανυσματικό μέγεθος $\vec{\tau}$, το οποίο έχει:

- διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από το φορέα της δύναμης και το σημείο O
- φορά τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού
- μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου F της δύναμης από την απόσταση l του σημείου O από το φορέα της δύναμης. Δηλαδή:



$$\tau = F \cdot l$$

Η ροπή δύναμης ως προς σημείο είναι **ίση με μηδέν**:

- όταν η δύναμη ασκείται στο σημείο αυτό ή
- όταν ο φορέας της δύναμης διέρχεται από το σημείο αυτό.

γ) Ροπή ζεύγους δυνάμεων

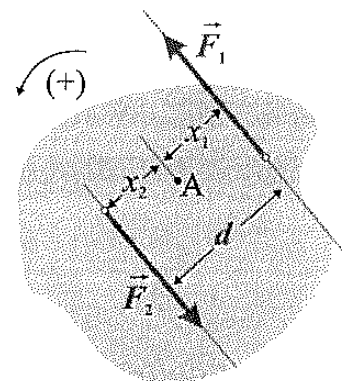
Ζεύγος δυνάμεων ονομάζουμε ένα σύστημα δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, οι οποίες ασκούνται σε δύο διαφορετικά σημεία ενός σώματος, είναι αντίρροπες και έχουν ίσα μέτρα.

Στο διπλανό σχήμα, η αλγεβρική τιμή της ροπής τους ζεύγους, ως προς κάποιο σημείο A θα είναι το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους ροπών των δύο δυνάμεων ($F_1 = F_2$):

$$\tau = F_1 x_1 + F_2 x_2 = F_1 (x_1 + x_2) \Rightarrow \tau = F_1 d$$

Ονομάζουμε ροπή ζεύγους δυνάμεων το διανυσματικό μέγεθος $\vec{\tau}$, το οποίο έχει:

- διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των δύο δυνάμεων,
- φορά την φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού και
- μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου F_1 της μιας από τις δύο δυνάμεις επί τον βραχίονα d του ζεύγους. Δηλαδή:



$$\tau = F_1 \cdot d \quad (3.14)$$

Από τα παραπάνω είναι εύκολα κατανοητό ότι **η ροπή του ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους και ως προς οποιονδήποτε άξονα περιστροφής κάθετο στο επίπεδο του ζεύγους.**

Ισορροπία Στερεού Σώματος

Θεωρούμε ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα, στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις. **Για να ισορροπεί θα πρέπει:**

- α) Η συνισταμένη δύναμη να είναι μηδέν

$$\Sigma \vec{F} = 0 \quad (3.15)$$

Όταν ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη, η επιτάχυνση του σώματος στην μεταφορική κίνηση είναι μηδέν. Επομένως για αρχικά ακίνητο σώμα ($v = 0$), η συνθήκη αυτή αποτελεί συνθήκη ισορροπίας για την μεταφορική κίνηση (Φυσική Α Λυκείου).

- β) Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς οποιοδήποτε σημείο να είναι μηδέν

$$\Sigma \tau = 0 \quad (3.16)$$

Όταν ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη, η επιτάχυνση του σώματος στην στροφική κίνηση είναι μηδέν. Επομένως για αρχικά ακίνητο σώμα ($\omega = 0$), η συνθήκη αυτή αποτελεί συνθήκη ισορροπίας για την στροφική κίνηση.

Στις ασκήσεις ισορροπίας στερεού ακολουθούμε γενικά τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1ο: Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο υπο μελέτη σώμα.

Η κατεύθυνση κάθε δύναμης καθορίζεται από το είδος της (π.χ. βάρος, κάθετη αντίδραση, τάση νήματος). Για τις δυνάμεις που δεν γνωρίζουμε την κατεύθυνση τους είναι χρήσιμη η ακόλουθη πρόταση:

Όταν ένα σώμα ισορροπεί με την επίδραση τριών μη παράλληλων ομοεπίπεδων δυνάμεων, τότε οι φορείς των δυνάμεων αυτών πρέπει να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Βήμα 2ο: Επιλέγουμε τους κατάλληλους ορθογώνιους άξονες x και y και αναλύουμε όλες τις δυνάμεις που δεν είναι παράλληλες σε αυτούς.

Βήμα 3ο: Εφαρμόζουμε τις συνθήκες ισορροπίας ομοεπίπεδων δυνάμεων:

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma \tau = 0$$

Κατάλληλο σημείο για να εφαρμόσουμε την τρίτη συνθήκη είναι συνήθως, εκείνο από το οποίο διέρχεται ο φορέας μιας άγνωστης δύναμης. Στην περίπτωση αυτή επειδή η ροπή της είναι μηδέν, εξαφανίζεται από την εξίσωση που προκύπτει.

Βήμα 4ο: Λύνουμε το σύστημα των τριών εξισώσεων που προκύπτει. Με την λύση του συστήματος μπορούμε να υπολογίσουμε μέχρι τρία άγνωστα μεγέθη.

- Για την τροχαλία γράφουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την στροφική κίνηση ως προς τον άξονα περιστροφής της:

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

- Αν χρειάζεται για την τροχαλία γράφουμε τις εξισώσεις της περιστροφικής κίνησης:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\tau} t, \quad \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$$

- Επειδή δεχόμαστε πάντα ότι το σχοινί που περιβάλλει την τροχαλία δεν ολισθαίνει πάνω σε αυτήν, γράφουμε την **συνθήκη μη ολίσθησης του σχοινιού**. Σύμφωνα με την συνθήκη αυτή υποθέτουμε ότι αν το σώμα που αναρτάται στο σχοινί διανύει διάστημα x τότε η τροχαλία στρέφεται κατά τόξο μήκους $s = R\theta = x$.

3.6 Στροφορμή-Διατήρηση Στροφορμής

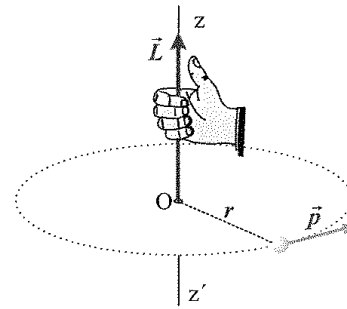
Στην Φυσική της Α Λυκείου, μελετώντας την μεταφορική κίνηση ενός υλικού σημείου γνωρίσαμε την έννοια της ορμής ($\vec{P}$). **Το αντίστοιχο μέγεθος της ορμής για την στροφική κίνηση ενός στερεού, είναι η στροφορμή που την συμβολίζουμε με το σύμβολο $\vec{L}$.**

α) Στροφορμή Υλικού σημείου.

Θεωρούμε ένα υλικό σημείο μάζας m που κινείται στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας r , έχοντας στιγμιαία ορμή $\vec{P}$, όπως στο σχημα.

Ονομάζουμε Στροφορμή του υλικού σημείου, ως προς έναν άξονα zz' που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδο της, ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{L}$ που έχει:

- διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής
- φορά τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού
- μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου p της ορμής του υλικού σημείου επί την ακτίνα r της κυκλικής τροχιάς. Δηλαδή:



$$L = pr \Rightarrow L = mvr \quad (3.22)$$

Μονάδα μέτρησης της στροφορμής υλικού σημείου στο $S.I.$ είναι το $1kgm^2/s$.

Αν ω είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του υλικού σημείου, τότε η σχέση (3.22) γράφεται:

$$L = m(\omega r)r \Rightarrow L = mr^2\omega \quad (3.23)$$

Ο τρόπος ορισμού της στροφορμής έχει "πολλά κοινά" με τον ορισμό της ροπής ($\tau = Fr$). Τα διανύσματα της στροφορμής και της ροπής έχουν την ίδια διεύθυνση και η φορά τους προσδιορίζεται με τον ίδιο τρόπο. Άρα δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η απόσταση r από τον άξονα περιστροφής είναι η κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας ($\vec{v}$), ακριβώς όπως και ο μοχλοβραχίονας μιας δύναμης στην περίπτωση της ροπής.

Η στροφορμή του σώματος είναι το άθροισμα των στροφορμών των στοιχειωδών μαζών που το αποτελούν. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 + \dots + L_\nu \Rightarrow \\ L &= m_1 \omega r_1^2 + m_2 \omega r_2^2 + \dots + m_\nu \omega r_\nu^2 \Rightarrow \\ L &= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_\nu r_\nu^2) \omega \end{aligned}$$

όπου βέβαια $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_\nu r_\nu^2$ η ροπή αδράνειας του στερεού, ως προς τον άξονα περιστροφής zz' . Επομένως:

Η στροφορμή ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από άξονα είναι ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{L}$,

- διεύθυνση τη διεύθυνση του άξον
- φορά τη φορά που ορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού

Η σύμβαση για την αλγεβρική τιμή της στροφορμής είναι η ίδια με εκείνη της ροπής. Έτσι θεωρούμε ως θετική την αλγεβρική τιμή της στροφορμής, ενός σώματος που στρέφεται αντίθετα προς την φορά των δεικτών του ρολογιού και αρνητική όταν στρέφεται με την φορά των δεικτών του ρολογιού.

Το σπίν: Η περιστροφή που μπορεί να κάνει ένα σώμα γύρω άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του έχει στροφορμή που την ονομάζουμε "**σπίν**". Για παράδειγμα η γη έχει σπιν εξαιτίας της περιστροφής της γύρω από τον άξονα της και τροχιακή στροφορμή λόγω της περιστροφής της γύρω από τον Ήλιο. Επίσης τα στοιχειώδη σωματίδια, όπως το ηλεκτρόνιο έχουν σπιν συγκεκριμένου μέτρου που τα διακρίνει σε φερμιόνια και μποζονια (αλλά δεν μας αφορά σε αυτό το μάθημα).

γ) Στροφορμή συστήματος σωματιδίων

Ονομάζουμε στροφορμή ενός συστήματος σωμάτων το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα.

Δηλαδή αν οι στροφορμές των σωμάτων που απαρτίζουν ένα σύστημα είναι $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \dots, \vec{L}_\nu$ τότε η στροφορμή $\vec{L}$ του συστήματος είναι:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_\nu$$



3.6.1 Διατήρηση της Στροφορμής

Αν στην γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδη νόμου της στροφικής κίνησης θέσουμε $\Sigma \tau = 0$ τότε :

$$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = \text{σταθ.}$$

Δηλαδή: **Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που δρουν σε ένα στερεό σώμα (ως προς κάποιο άξονα) είναι μηδέν, η στροφορμή του σώματος (ως προς τον ίδιο άξονα) παραμένει σταθερή.**

Για ένα σύστημα σωμάτων είναι προφανές ότι αν $\Sigma \tau_{\epsilon\xi} = 0$ η στροφορμή του συστήματος των σωμάτων θα παραμένει σταθερή.

Κεφάλαιο 1

Ταλαντώσεις

1.1 Απλή Αρμονική Ταλάντωση

1.1.1 Περιοδικά Φαινόμενα

Ονομάζονται τα φαινόμενα που επαναλαμβάνονται κατά τον ίδιο τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα. Τέτοια φαινόμενα είναι η κυκλική ομαλή κίνηση, η κίνηση του εκκρεμούς κ.ά. Κάθε περιοδικό φαινόμενο χαρακτηρίζεται από την **Περίοδο** (T), τη **Συχνότητα** (f) και την **γωνιακή συχνότητα** (ω)

- **Περίοδος (T)** ενός περιοδικού φαινομένου είναι ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη επανάληψη του φαινομένου. Αν σε χρόνο t γίνονται N επαναλήψεις του φαινομένου, τότε η περίοδος είναι ίση με το πηλίκο:

$$T = \frac{t}{N} \quad (1.1)$$

Μονάδα μέτρησης της περιόδου είναι το 1 s.

- **Συχνότητα (f)** ενός περιοδικού φαινομένου είναι το πηλίκο του αριθμού N των επαναλήψεων του φαινομένου σε ορισμένο χρόνο t , προς το χρόνο t . Δηλαδή:

$$f = \frac{N}{t} \quad (1.2)$$

Μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι το 1 Hz ή 1 s⁻¹

Από τον ορισμό τους, τα μεγέθη περίοδος και συχνότητα είναι αντίστροφα και συνδέονται με την σχέση:

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.3)$$

- Η **γωνιακή συχνότητα (ω)** είναι ένα μέγεθος που αναφέρεται σε όλα τα περιοδικά φαινόμενα και δίνεται από την σχέση:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (1.4)$$

Η γωνιακή συχνότητα είναι ίση με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας στην ομαλή κυκλική κίνηση και εκφράζει τον αριθμό των επαναλήψεων ενός φαινομένου σε χρόνο $2\pi \text{ sec}$.

Μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι το 1 rad/sec.

1.1.2 Οι εξισώσεις της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης

Ταλάντωση ονομάζεται μια παλινδρομική περιοδική κίνηση. **Γραμμική ταλάντωση** ονομάζεται η ταλάντωση που εξελίσσεται πάνω σε ευθεία τροχιά. Μια ειδική περίπτωση γραμμικής ταλάντωσης είναι η **απλή αρμονική ταλάντωση (α.α.τ.)**.

Έστω ένα σώμα που κινείται παλινδρομικά πάνω σε ένα άξονα γύρω από την αρχή Ο του άξονα, που είναι το μέσον της τροχιάς του. Αν η απομάκρυνση x του σώματος από το σημείο Ο είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου t , δηλαδή δίνεται από την σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad (1.5)$$

τότε η κίνηση του σώματος λέγεται *απλή αρμονική ταλάντωση*. Το **A** είναι η μέγιστη απομάκρυνση, δηλαδή η μέγιστη απόσταση από το σημείο Ο στην οποία φτάνει το σώμα και ονομάζεται **Πλάτος** της ταλάντωσης. Η γωνία $\phi = \omega t + \phi_0$ που η τιμή της καθορίζει και την τιμή της απομάκρυνσης x του σώματος την χρονική στιγμή t ονομάζεται **φάση της ταλάντωσης**. Το σημείο Ο είναι η **θέση ισορροπίας** της ταλάντωσης.

Η φάση αυξάνεται συνεχώς με τον χρόνο και σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T$ αντιστοιχεί σε αύξηση της φάσης κατά $\Delta\phi = 2\pi \text{ rad}$

Η ποσότητα ϕ_0 είναι η φάση της ταλάντωσης για την χρονική στιγμή $t = 0$ και γι'αυτό ονομάζεται **αρχική φάση**. Ουσιαστικά η αρχική φάση καθορίζεται από τις "αρχικές συνθήκες" της απλής αρμονικής ταλάντωσης (θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση). Για την αρχική φάση ισχύει:

$$0 \leq \phi_0 < 2\pi$$

Η **ταχύτητα** του σώματος κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την σχέση:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \quad (1.6)$$

όπου $v_{\max} = \omega A$ η μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας του σώματος. Το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα, όταν διέρχεται από την θέση ισορροπίας Ο ($x = 0$).

Η **επιτάχυνση** του σώματος κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την σχέση:

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = -\alpha_{\max} \eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad (1.7)$$

όπου $\alpha_{\max} = \omega^2 A$ η μέγιστη τιμή του μέτρου της επιτάχυνσης του σώματος. Το σώμα έχει μέγιστη επιτάχυνση, όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσης της ταλάντωσης ($x = \pm A$).

Οι χρονικές εξισώσεις (1.5), (1.6), (1.7) απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι η "ταυτότητα" της κάθε κίνησης στην μηχανική και συγκροτούν την **Κινηματική προσέγγιση** του προβλήματος. Για την περίπτωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης οι εξισώσεις αυτές είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου

Σχέση στιγμιαίας επιτάχυνσης-απομάκρυνσης Η σχέση (1.7) με την βοήθεια της (1.5) γράφεται:

$$\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu(\omega t) = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t) = -\omega^2 x \quad (1.8)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η επιτάχυνση α και η απομάκρυνση x του σώματος έχουν πάντα αντίθετη φορά, ή με άλλα λόγια, ότι η επιτάχυνση έχει πάντοτε φορά προς την θέση ισορροπίας Ο.

Σχέση στιγμιαίας ταχύτητας-απομάκρυνση Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας σε μια τυχαία χρονική στιγμή και της απομάκρυνσης την ίδια χρονική στιγμή συνδέονται με την σχέση:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad (1.9)$$

η απόδειξη της σχέσης προκύπτει με δύο τρόπους παραθέτω τον πρώτο παρακάτω

$$x = A\eta\mu(\omega t) \Rightarrow \frac{x}{A} = \eta\mu(\omega t) \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} = \eta\mu^2(\omega t)$$

και

$$v = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow \frac{v}{\omega A} = \sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = \sigma\upsilon\nu^2(\omega t)$$

προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = \eta\mu^2(\omega t) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t) = 1 \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

1.1.3 Γραφικές παραστάσεις

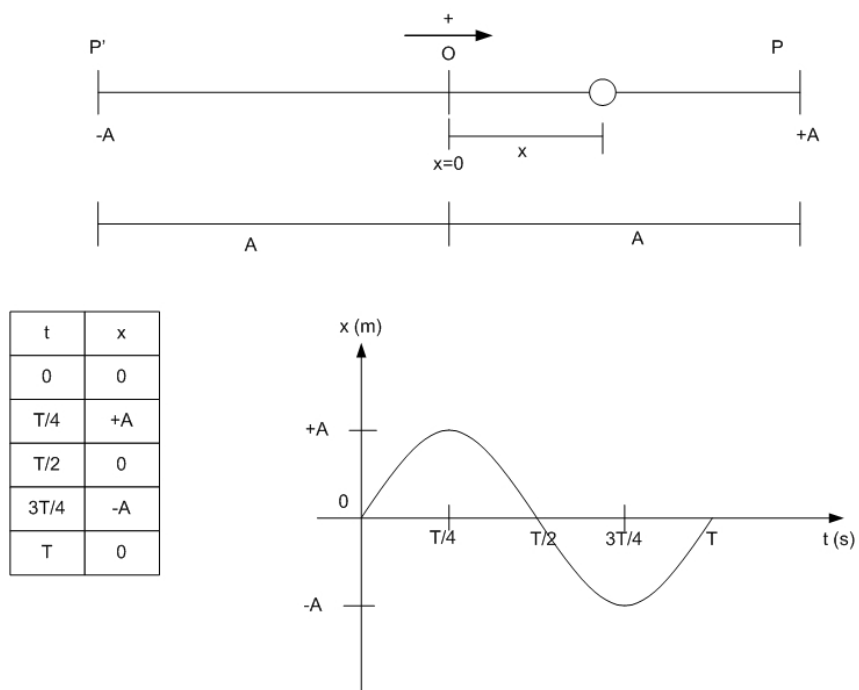
Στα διαγράμματα των παραπάνω σχημάτων αποδίδεται η μεταβολή της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $\phi_0 = 0$.

Τι πληροφορίες μπορούμε να πάρουμε από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις:

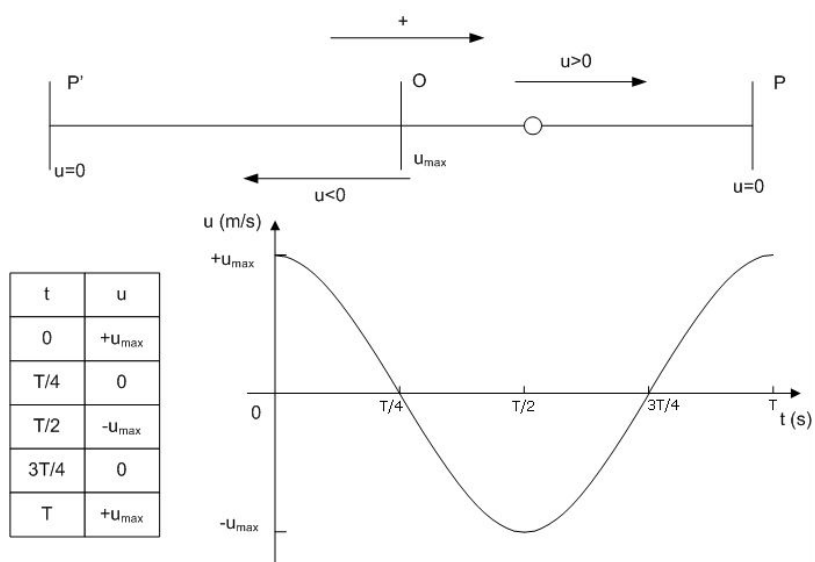
α) Η χρονική στιγμή $t = 0$ μας δίνει την αρχική φάση ϕ_0 .

β) Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται στις ακραίες θέσεις, ενώ μεγιστοποιείται όταν το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας.

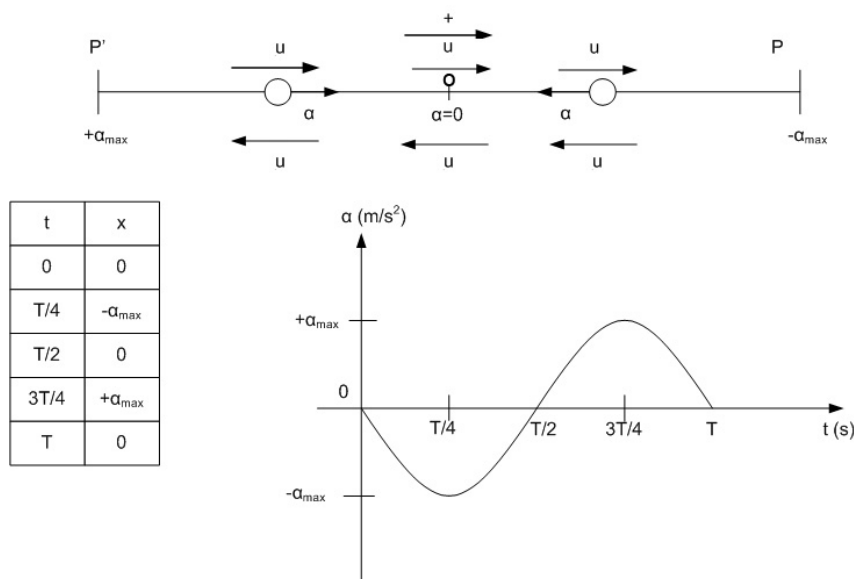
γ) Η επιτάχυνση του σώματος μηδενίζεται όταν το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας του, ενώ μεγιστοποιείται όταν το σώμα φτάνει σε ακραία θέση.



Σχήμα 1.1: Διάγραμμα Απομάκρυνσης - χρόνου



Σχήμα 1.2: Διάγραμμα Ταχύτητας - χρόνου



Σχήμα 1.3: Διάγραμμα Επιτάχυνσης - χρόνου

δ) Τα διανύσματα της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης έχουν:

- Θετική αλγεβρική τιμή όταν έχουν φορά προς τα πάνω ή προς τα δεξιά.
- Αρνητική αλγεβρική τιμή όταν έχουν φορά προς τα κάτω ή αριστερά.

Πολλές φορές η εκφώνηση της άσκησης καθορίζει την θετική φορά

δ) Όταν το σώμα απομακρύνεται από την θέση ισορροπίας, η ταχύτητα του ελαττώνεται κατά μέτρο(άρα επιτάχυνση αντίθετη στην ταχύτητα) , ενώ όταν το σώμα πλησιάζει προς την θέση ισορροπίας, η ταχύτητα του αυξάνεται κατά μέτρο(άρα επιτάχυνση και ταχύτητα στην ίδια φορά)

1.1.4 Παραδείγματα Υπολογισμού Αρχικής φάσης

π.χ.1 Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην ακραία θετική θέση ($x = +A$). Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Λύση Αφού εκτελεί α.α.τ. $\Rightarrow x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ την χρονική στιγμή $t = 0 \Rightarrow +A = A\eta\mu(\phi_0) \Rightarrow \eta\mu(\phi_0) = +1 \Rightarrow \phi_0 = 2k\pi + \pi/2 \Rightarrow \phi_0 = \pi/2\text{rad}$

π.χ.2 Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ξεκινά την χρονική στιγμή $t = 0$ από την θέση ισορροπίας και κινείται με φορά προς την ακραία αρνητική θέση. Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Λύση Αφού εκτελεί α.α.τ. $\Rightarrow x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην θέση $x = 0 \Rightarrow 0 = A\eta\mu(\phi_0) \Rightarrow \eta\mu(\phi_0) = 0 \Rightarrow \phi_0 = 2k\pi$ ή $\phi_0 = 2k\pi + \pi$. Ταυτόχρονα όμως για $t = 0, v = -v_{max} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\phi_0) = -1 \Rightarrow \phi_0 = \pi rad$

π.χ.3 Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση βρίσκεται την χρονική στιγμή $t = 0$ στη θέση $x = +A/2$ και κινείται προς την θέση ισορροπίας. Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Λύση Αφού εκτελεί α.α.τ. $\Rightarrow x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην θέση $x = +A/2 \Rightarrow A/2 = A\eta\mu(\phi_0) \Rightarrow \eta\mu(\phi_0) = 1/2 \Rightarrow \phi_0 = 2k\pi + \pi/6$ ή $\phi_0 = 2k\pi + \pi - \pi/6$.

Ταυτόχρονα όμως για $t = 0, v < 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\phi_0) < 0 \Rightarrow \phi_0 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6 rad$ (2ο τεταρτημόριο) * Αν για την στιγμή $t = 0$ κινούνταν προς την ακραία θετική θέση τότε $v > 0 \Rightarrow \phi_0 = \pi/6 rad$

1.1.5 Η Δύναμη στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Όταν ένα σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, τότε σε μια τυχαία θέση της τροχιάς του έχει επιτάχυνση α , ανεξάρτητα από την κατεύθυνση της κίνησης του. Η συνολική δύναμη που δέχεται το σώμα και είναι υπεύθυνη για την επιτάχυνση του δίνεται από τον θεμελιώδη Νόμο της μηχανικής:

$$\Sigma F = m\alpha \quad (1.10)$$

όμως λόγω της σχέσης (1.8) προκύπτει

$$\Sigma F = -m\omega^2 x \quad (1.11)$$

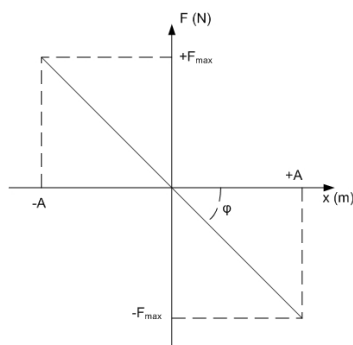
Αν συμβολίσουμε $D = m\omega^2$, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\Sigma F = -Dx \quad (1.12)$$

Η σταθερά αναλογίας D λέγεται **σταθερά επαναφοράς** της ταλάντωσης και η τιμή της εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του ταλαντούμενου συστήματος. Από την σχέση (1.12) φαίνεται ότι όταν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η συνολική δύναμη που δέχεται:

- έχει ως φορέα την ευθεία πάνω στην οποία γίνεται η ταλάντωση του σώματος,
- είναι ανάλογη με την απομάκρυνση του σώματος από την Θέση Ισορροπίας O ,
- έχει αντίθετη φορά από την απομάκρυνση του σώματος και πάντοτε προς την θέση ισορροπίας
- στην θέση ισορροπίας $\Sigma F = 0$

Η σχέση (1.12) ονομάζεται και **Δύναμη Επαναφοράς**, αφού δρα έτσι ώστε να επιταχύνει το σώμα πάντα προς την θέση ισορροπίας και παριστάνεται γραφικά στο διάγραμμα 1.4 **Παρατήρηση:** Η σχέση (1.12) αποτελεί **ικανή και αναγκαία συν-**



Σχήμα 1.4: Διάγραμμα Δύναμης- Απομάκρυνσης

θήκη, ώστε ένα σώμα να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αυτό σημαίνει πως όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η γραμμική ταλάντωση που εκτελεί ένα σώμα είναι και αρμονική, μπορούμε να αποδείξουμε ότι σε κάθε θέση απομάκρυνσης x από την θέση ισορροπίας η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή. Φυσικά ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, τότε η συνισταμένη δύναμη που δέχεται σε κάθε θέση απομάκρυνσης x από την θέση ισορροπίας ικανοποιεί την σχέση (1.12).

Σχέση Περιόδου- σταθεράς επαναφοράς

Από την σχέση $D = m\omega^2$ προκύπτει: $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$
από τον ορισμό της γωνιακής συχνότητας $\omega = \frac{2\pi}{T}$ προκύπτει:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad (1.13)$$

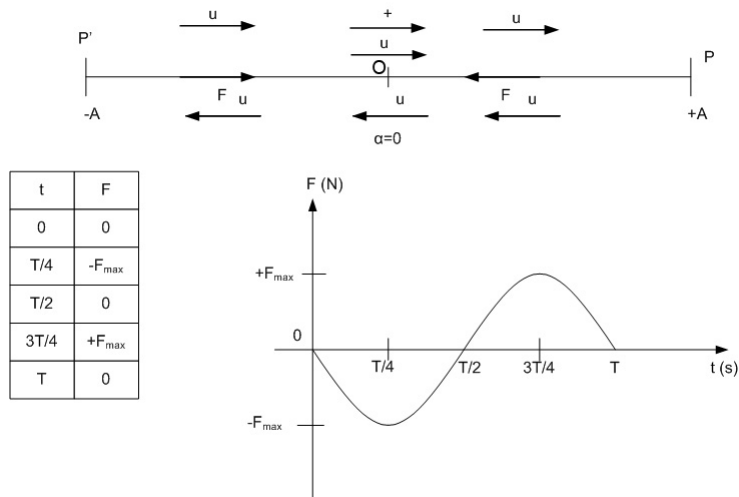
Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι **η περίοδος T δεν εξαρτάται από το πλάτος A της ταλάντωσης.**

Η δύναμη επαναφοράς ως συνάρτηση του χρόνου

Από τις σχέσεις (1.12), (1.5) προκύπτει:

$$\Sigma F = F_{max}\eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad (1.14)$$

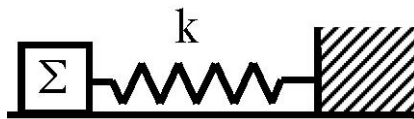
,με την μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης $F_{max} = DA$



Σχήμα 1.5: Διάγραμμα Δύναμης - Χρόνου

1.2 Το σύστημα “Μάζας - Ελατηρίου”

Το πιο χαρακτηριστικό πρόβλημα που θα αντιμετωπίσουμε στις μηχανικές ταλαντώσεις είναι το πρόβλημα της μάζας που είναι στερεωμένη στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου.



Ιδανικό ελατήριο είναι κάθε ελατήριο που μπορεί να θεωρηθεί ως αβαρές και υπακούει στον **Νόμο του Hooke** $F_{\epsilon\lambda} = k\Delta l$ όπου k είναι η σταθερά του ελατηρίου (εξαρτάται από το υλικό του ελατηρίου) και Δl είναι η επιμήκυνση ή συμπίεση του ελατηρίου από την **Θέση Φυσικού μήκους** του. Η δύναμη $F_{\epsilon\lambda}$ έχει τέτοια φορά ώστε να επαναφέρει το ελατήριο στην αρχική του κατάσταση φυσικού μήκους (l_0)

Η Δύναμη Ελατηρίου ($F_{\epsilon\lambda}$) συμπίπτει με την δύναμη επαναφοράς μόνο στην περίπτωση του οριζοντίου ελατηρίου, όπου η θέση ισορροπίας και η θέση φυσικού μήκους συμπίπτουν, αντίθετα στην περίπτωση του κατακόρυφου ή κεκλιμένου συστήματος η θέση ισορροπίας και η θέση φυσικού μήκους είναι διαφορετικές, άρα δεν συμπίπτουν οι δύο δυνάμεις μεταξύ τους.

Πώς αποδεικνύουμε ότι ένα σώμα το οποίο είναι δεμένο σε ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, αν το διεγείρουμε από την κατάσταση ισορροπίας του;

Βήματα - μεθοδολογία σε προβλήματα οριζοντίων και κατακόρυφων ελατηρίων που στο άκρο τους έχουν σώμα μάζας m

- 1ο** : Σχεδιάζουμε το ελατήριο στο φυσικό του μήκος, το σώμα στην θέση ισορροπίας και το σώμα σε μια τυχαία θέση που απέχει x από την θέση ισορροπίας
- 2ο** : Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στην μάζα στην θέση ισορροπίας. Από την συνθήκη ισορροπίας ($\Sigma F = 0$) βρίσκουμε μια σχέση
- 3ο** : Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στην τυχαία θέση και υπολογίζουμε την ΣF . Προσέχουμε στον υπολογισμό της συνισταμένης δύναμης, από τις δυνάμεις που έχουν την ίδια φορά με την απομάκρυνση x να αφαιρούμε εκείνες που έχουν αντίθετη φορά.
- 4ο** : Αφού καταλήξω σε σχέση της μορφής $\Sigma F = -Dx$, με D θετική σταθερά το σώμα θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς D .
- 5ο** : Το πλάτος A της ταλάντωσης είναι ίσο με την αρχική απομάκρυνση του σώματος από την Θέση Ισορροπίας. Η περίοδος υπολογίζεται από την σχέση (1.13) και η εξίσωση της απομάκρυνσης δίνεται από την (1.5) με την κατάλληλη αρχική φάση ϕ_0

1.2.1 Η ενέργεια στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Η ενέργεια της ταλάντωσης E ενός συστήματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ισούται με την ενέργεια που προσφέραμε αρχικά στο σύστημα για να το θέσουμε σε ταλάντωση. Η ενέργεια της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο:

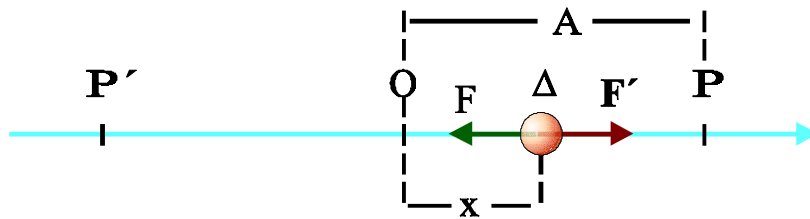
$$E = \frac{1}{2}DA^2 \quad (1.15)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι το πλάτος A καθορίζεται από την ενέργεια της ταλάντωσης, δηλαδή από την ενέργεια που προσφέραμε αρχικά στο σύστημα ώστε να αρχίσει να ταλαντώνεται. Σε όλη την διάρκεια της ταλάντωσης η ενέργεια παραμένει σταθερή. Άρα: **Η ενέργεια μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι σταθερή και ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους της.**

Δυναμική & Κινητική Ενέργεια Ταλάντωσης Στην διάρκεια της ταλάντωσης η ενέργεια εμφανίζεται ως δυναμική ενέργεια ταλάντωσης και ως κινητική ενέργεια ταλάντωσης. Η κινητική και η Δυναμική ενέργεια υπολογίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.16)$$

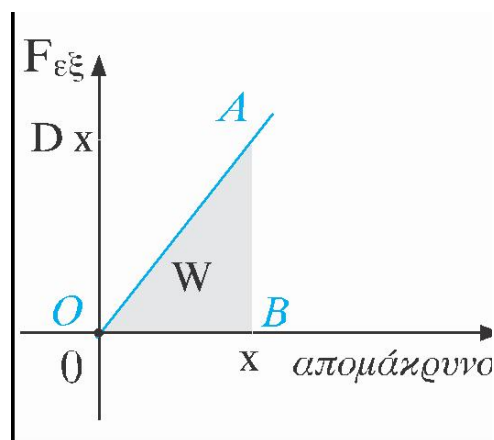
$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \quad (1.17)$$



Απόδειξη της σχέσης $U = \frac{1}{2}Dx^2$: Αν το σώμα βρίσκεται ακίνητο στην θέση ισορροπίας O, για να μετακινηθεί σε μια άλλη θέση πρέπει να του ασκηθεί κατάλληλη εξωτερική δύναμη $F_{εξ}$. Κατά την μετακίνηση αυτή θα ασκείται στο σώμα και η δύναμη επαναφοράς. Για να μετακινηθεί το σώμα στην ακραία θέση (x) χωρίς ταχύτητα θα πρέπει το μέτρο της εξωτερικής δύναμης να είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης επαναφοράς και να έχει αντίθετη φορά, σε κάθε χρονική στιγμή. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει:

$$F_{εξ} = -\Sigma F = -(-Dx) = Dx$$

Το έργο της εξωτερικής δύναμης είναι ίσο και με την προσφερόμενη ενέργεια για να απομακρύνουμε το σώμα κατά x από την θέση ισορροπίας. Επειδή η δύναμη είναι μεταβλητού μέτρου το έργο της υπολογίζεται από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης $F_{εξ} = f(x)$.



Από το εμβαδόν προκύπτει η ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα και αποθηκεύεται σ' αυτό ως Δυναμική Ενέργεια:

$$W_{F_{εξ}} = E = \frac{1}{2}Dx^2 \quad (1.18)$$

K, U ως συναρτήσεις του χρόνου: Αντικαθιστώντας στις σχέσεις 1.16 και 1.17 της χρονικές εξισώσεις για την στιγμιαία απομάκρυνση και στην στιγμιαία ταχύτητα

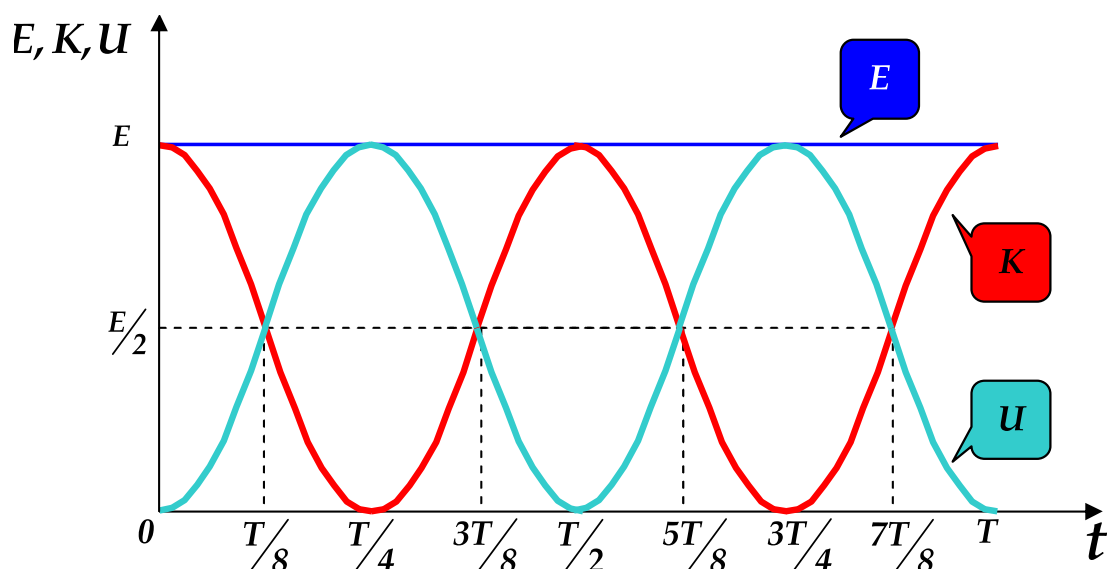
μπορούμε να οδηγηθούμε στις παρακάτω σχέσεις:

$$K = \frac{1}{2}m(v_{max}\sin(\omega t))^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t)$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}DA^2 \sin^2(\omega t) = E \sin^2(\omega t) \quad (1.19)$$

$$U = \frac{1}{2}D(A\eta\mu(\omega t))^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}DA^2 \eta\mu^2(\omega t) = E \eta\mu^2(\omega t) \quad (1.20)$$

Από τις σχέσεις **1.20** και **1.19** προκύπτει ότι η κινητική και η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μεταβάλλονται περιοδικά με τον χρόνο. Οι γραφικές παραστάσεις της Κινητικής, της Δυναμικής και της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο φαίνονται στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 1.6: E, K, U σε συνάρτηση με τον χρόνο

Διατήρησης της Ενέργειας: Η ολική ενέργεια E στην απλή αρμονική ταλάντωση παραμένει σταθερή και είναι κάθε στιγμή ίση με το άθροισμα της Δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης και της κινητικής ενέργειας. Δηλαδή:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = E$$

,όπου βέβαια E =σταθερή και δίνεται από την σχέση **1.15**

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι:

- (α) Στην θέση ισορροπίας ($x = 0$) η Δυναμική Ενέργεια είναι μηδέν, ενώ η Κινητική Ενέργεια είναι μέγιστη και ίση με την Ενέργεια ταλάντωσης. $E = K_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$
- (β) Στις ακραίες θέσεις ($x = \pm A$) η Κινητική Ενέργεια είναι μηδέν, ενώ η Δυναμική Ενέργεια είναι μέγιστη και ίση με την ενέργεια της ταλάντωσης $E = U_{max} = \frac{1}{2}DA^2$
- (γ) Σε οποιαδήποτε ενδιάμεση θέση (εκτός από την Θ.Ι.) το σύστημα έχει και Κινητική και Δυναμική Ενέργεια και σε κάθε χρονική στιγμή ισχύει η **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας**

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \quad (1.21)$$

Γνωρίζοντας την Δυναμική και την Κινητική Ενέργεια κατά την διάρκεια της απλής αρμονικής ταλάντωσης μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση του σώματος, χωρίς να χρειάζεται απαραίτητα ο χρόνος. Αυτή η προσέγγιση είναι η **Ενεργειακή προσέγγιση** της κίνησης, που σε πολλές περιπτώσεις είναι χρησιμότερη από την Κινητική προσέγγιση που απαιτεί γνώση του χρόνου.

Παρακάτω παρουσιάζω δύο βασικές αποδείξεις:

Απόδειξη της σχέσης $v_{max} = \omega A$:

$$E = K_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Rightarrow A^2 = \frac{m}{D}v_{max}^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{D}}v_{max}$$

όμως η σταθερά επαναφοράς είναι $D = m\omega^2 \Rightarrow v_{max} = \omega A$

Απόδειξη της σχέσης $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow mv^2 = D(A^2 - x^2) \Rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{D}{m}(A^2 - x^2)}$$

όμως η σταθερά επαναφοράς είναι $D = m\omega^2 \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

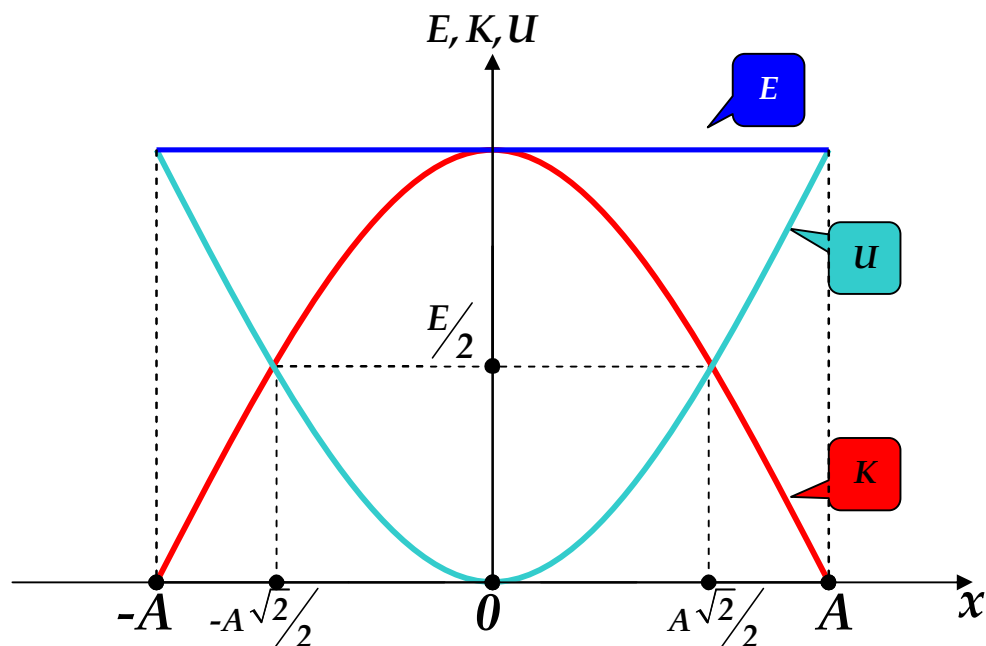
Τα διαγράμματα $U = f(x)$, $K = f(x)$ στην απλή αρμονική ταλάντωση Η δυναμική Ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση:

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \quad \mu\epsilon -A \leq x \leq +A$$

Η κινητική Ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση:

$$E = K + U \Rightarrow K = E - \frac{1}{2}Dx^2 \quad \mu\epsilon -A \leq x \leq +A \quad (1.22)$$

Άρα η γραφική παράσταση της Δυναμικής Ενέργειας και της Κινητικής Ενέργειας σε κοινό διάγραμμα σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την Θ.Ι. παρουσιάζεται στο Σχήμα **1.7**:



Σχήμα 1.7: Διάγραμμα E, K, U με την απομάκρυνση

Τα διαγράμματα $U = f(v), K = f(v)$ στην απλή αρμονική ταλάντωση Η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \mu\epsilon -v_{max} \leq v \leq +v_{max}$$

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση :

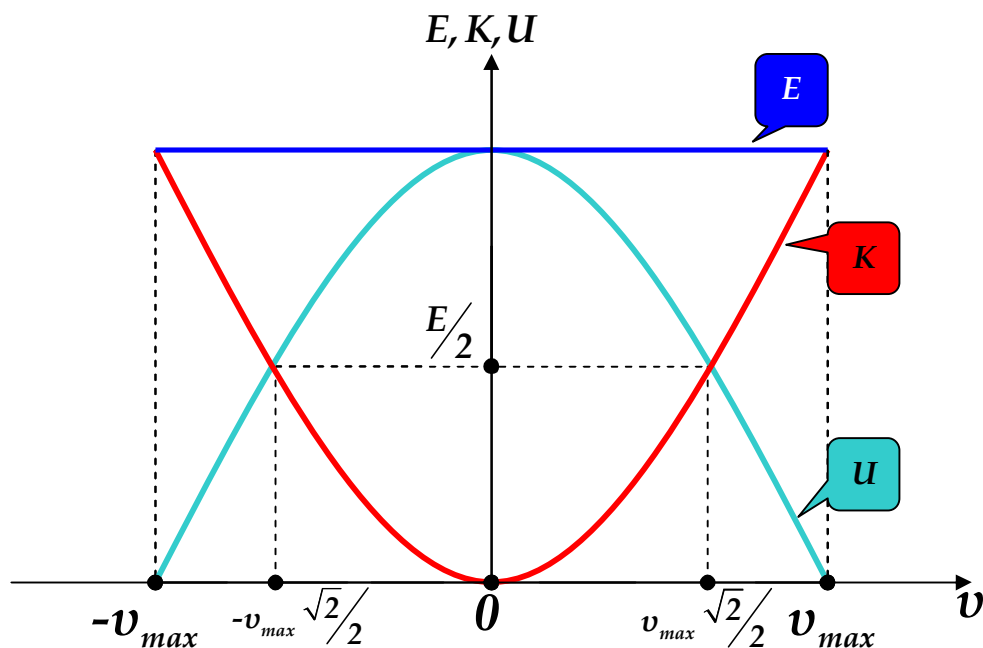
$$E = K + U \Rightarrow U = E - \frac{1}{2}mv^2 \quad \mu\epsilon -v_{max} \leq v \leq +v_{max} \quad (1.23)$$

Άρα η γραφική παράσταση της Δυναμικής Ενέργειας και της Κινητικής Ενέργειας σε κοινό διάγραμμα σε συνάρτηση με την απο την ταχύτητα παρουσιάζεται στο Σχήμα **1.8**:

Η ενέργεια στο Ιδανικό Ελατήριο: Στην περίπτωση του ιδανικού ελατηρίου που αναλύσαμε παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε την Δυναμική Ενέργεια του ελατηρίου, η οποία χαρακτηρίζεται ως δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης. Υπολογίζεται από την σχέση :

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \quad (1.24)$$

, όπου βέβαια k η σταθερά του ελατηρίου και Δl η επιμήκυνση ή συμπίεση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος. Προσοχή η Δυναμική Ενέργεια Ταλάντωσης



Σχήμα 1.8: Διάγραμμα E, K, U με την ταχύτητα

συμπίπτει με την Ενέργεια του Ελατηρίου μόνο στην περίπτωση του οριζοντίου ελατηρίου.

Το έργο της Δύναμης του Ελατηρίου μπορεί να υπολογιστεί από την παρακάτω σχέση:

$$W_{F_{ελ}} = U_{ελ}^{(αρχ)} - U_{ελ}^{(τελ)} \quad (1.25)$$

Αντίστοιχα το έργο της δύναμης επαναφοράς μπορεί να υπολογιστεί με τον ίδιο τρόπο, αν στην θέση της Δυναμικής Ενέργειας Ελατηρίου, βάλουμε την Δυναμική Ενέργεια Ταλάντωσης.

1.2.2 Ρυθμοί μεταβολής στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ο Ρυθμός μεταβολής είναι από τις βασικές έννοιες στην Φυσική καθώς μπορούν να μας δώσουν πληροφορίες για την συμπεριφορά μιας φυσικής ποσότητας. Στα μαθηματικά Γ Λυκείου θα μάθουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης είναι η παράγωγος συνάρτησης. Παρακάτω παρουσιάζω ρυθμούς μεταβολής βασικών μεγεθών στην απλή αρμονική ταλάντωση.

- **Ρυθμός μεταβολής της απομάκρυνσης** $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = v = \omega A \sigma \nu \nu(\omega t) \quad (1.26)$$

- **Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας** $\frac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = \alpha = -\omega^2 A \eta \mu(\omega t) \quad (1.27)$$

- **Ρυθμός μεταβολής της ορμης** $\frac{dP}{dt}$

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -D A \eta \mu(\omega t) \quad (1.28)$$

- **Ρυθμός μεταβολής της Κινητικής - Δυναμικής Ενέργειας** $\frac{dK}{dt}, \frac{dU}{dt}$

Γνωρίζουμε ότι $K + U = E \Rightarrow d(K + U) = 0$, αφού $E = \text{σταθερή}$, $\Rightarrow dK = -dU$

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt} \quad (1.29)$$

επίσης

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} = \Sigma F \cdot v \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -D \cdot x \cdot v \quad (1.30)$$

και σε συνάρτηση με τον χρόνο, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.5), (1.6) προκύπτει:

$$\frac{dK}{dt} = -D A \eta \mu(\omega t) \omega A \sigma \nu \nu(\omega t) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -\frac{D A \omega^2}{2} \eta \mu(2\omega t) \quad (1.31)$$

άρα

$$\frac{dU}{dt} = +\frac{D A \omega^2}{2} \eta \mu(2\omega t) \quad (1.32)$$

1.2.3 Η Διαφορά φάσης στην απλή αρμονική ταλάντωση

Διαφορά Φάσης $\Delta\phi$ δύο αρμονικά μεταβαλλόμενων μεγεθών λέγεται η διαφορά των φάσεων τους. Όταν τα δύο μεγέθη έχουν την ίδια γωνιακή συχνότητα ω , τότε η διαφορά φάσης είναι χρονικά σταθερή. Για να βρούμε την διαφορά φάσης δύο μεγεθών, πρέπει τα μεγέθη να εκφράζονται με τον ίδιο τριγωνομετρικό αριθμό.

Στην περίπτωση της **απομάκρυνσης και της ταχύτητας** μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης έχουμε:

$$x = A \eta \mu(\omega t) \text{ και } v = v_{\max} \sigma \nu \nu(\omega t) \Rightarrow v = v_{\max} \eta \mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Άρα η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο μεγεθών είναι $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ και προηγείται η ταχύτητα.

Η φυσική σημασία αυτής της διαφοράς φάσης είναι ότι όταν κάποια χρονική στιγμή η ταχύτητα έχει μια ορισμένη τιμή, η απομάκρυνση θα πάρει την αντίστοιχη τιμή μετά από χρόνο Δt που αντιστοιχεί σε γωνία $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή μετά από χρόνο που θα δίνεται από την σχέση:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{4}$$

Άρα αν για παράδειγμα η ταχύτητα πάρει την τιμή $v = +v_{max}$, τότε η απομάκρυνση θα πάρει την τιμή $+A$ σε χρόνο $\frac{T}{4}$.

Στην περίπτωση της **απομάκρυνσης και της επιτάχυνσης** μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης έχουμε:

$$x = A\eta\mu(\omega t) \text{ και } a = -\alpha_{max}\eta\mu(\omega t) \Rightarrow a = \alpha_{max}\eta\mu(\omega t + \pi)$$

Άρα η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο μεγεθών είναι $\Delta\phi = \pi$ και προηγείται η επιτάχυνση.

Η φυσική σημασία αυτής της διαφοράς φάσης είναι ότι όταν κάποια χρονική στιγμή η επιτάχυνση έχει μια ορισμένη τιμή, η απομάκρυνση θα πάρει την αντίστοιχη τιμή μετά από χρόνο Δt που αντιστοιχεί σε γωνία $\Delta\phi = \pi$, δηλαδή μετά από χρόνο που θα δίνεται από την σχέση:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2}$$

Άρα αν για παράδειγμα η ταχύτητα πάρει την τιμή $a = +\alpha_{max}/2$, τότε η απομάκρυνση θα πάρει την τιμή $+A/2$ σε χρόνο $\frac{T}{2}$.

Γενικά λέμε ότι δύο αρμονικά μεταβαλλόμενα μεγέθη δεν έχουν διαφορά φάσης όταν παίρνουν ταυτόχρονα τις μέγιστες και τις ελάχιστες τιμές τους.

1.2.4 Η αναπαράσταση του περιστρεφόμενου διανύσματος

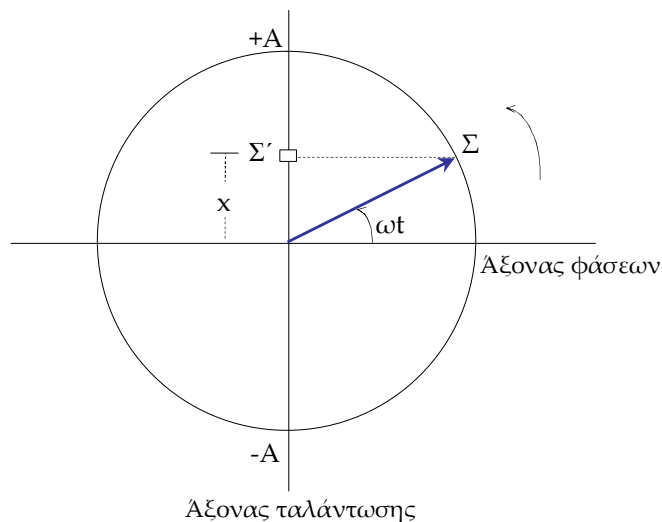
Μια ακόμα έξυπνη μέθοδος για την επίλυση ασκήσεων στην απλή αρμονική ταλάντωση. Θα αποδείξουμε την φράση: **Όταν ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση τότε η προβολή του πάνω σε μια διάμετρο της κίνησης εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.**

Από το σχήμα (I.9) έχουμε ότι:

$$(OS') = (OS) \eta\mu(\phi) \Rightarrow x = \eta\mu(\omega t)$$

αφού βέβαια ισχύει ότι $\phi = \omega t$ για το σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ω την γωνιακή ταχύτητα του.

Άρα για κάθε σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα μήκος A και γωνιακής ταχύτητας ω . Παράλληλα σε κάθε τεταρτημόριο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε και την ταχύτητα του σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με βάση το πρόσημο του $\sin(\phi)$. Η μέθοδος του περιστρεφόμενου διανύσματος είναι αρκετά χρήσιμη στον υπολογισμό της αρχικής φάσης ϕ_0 .



Σχήμα 1.9: η αναπαράσταση του περιστρεφόμενου διανύσματος

1.2.5 Κρούση και Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Σε πολλά προβλήματα εμφανίζεται το φαινόμενο της Κρούσης ανάμεσα σε σώματα που εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση μετά ή πριν την κρούση. Ας εισάγουμε την βασική ιδέα της Κρούσης για μια γρήγορη εφαρμογή σε προβλήματα Ταλαντώσεων. **Η κρούση θα παρουσιαστεί αναλυτικά στο τελευταίο κεφάλαιο της ύλης, άρα εδώ θα μείνουμε στις κύριες ιδέες.**

Έστω ότι δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ αντίστοιχα. Ταυτόχρονα υποθέτουμε ότι η διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή. Παρατηρούμε δύο βασικές κατηγορίες κρούσεων.

Ανελαστική Κρούση είναι η περίπτωση κρούσης κατά την οποία έχουμε απώλειες ενέργειας, λόγω ανελαστικών δυνάμεων ή δυνάμεων πλαστικής παραμόρφωσης που ασκούνται κατά την διάρκεια της κρούσης. Αν μετά την κρούση οι νέες ταχύτητες των σωμάτων είναι $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$, αντίστοιχα τότε θα ισχύει η **Αρχή Διατήρησης της Ορμής** και της ενέργειας του συστήματος. Δηλαδή:

$$\vec{P}_{ολ(αρχ)} = \vec{P}_{ολ(τελ)} \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \quad (1.33)$$

και

$$E_{ολ(αρχ)} = E_{ολ(τελ)} \Rightarrow K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2 + E_{απωλ} \quad (1.34)$$

όπου $E_{\alpha\pi\omega\lambda}$ οι απώλειες ενέργειας λόγω της ανελαστικής παραμόρφωσης ή της θερμότητας. Σε αυτή την περίπτωση δεν διατηρείται σταθερή η Κινητική Ενέργεια του συστήματος των σωμάτων ($K_{ολ(\alpha\rho\chi)} > K_{ολ(\tau\epsilon\lambda)}$)

Στην περίπτωση ανελαστικής κρούσης που αμέσως μετά την κρούση προκύπτει συσσωμάτωμα η κρούση θα λέγεται **Πλαστική Κρούση** και θα ισχύουν πάλι οι παραπάνω εξισώσεις.

Ελαστική Κρούση είναι η περίπτωση κρούσης κατά την οποία διατηρείται σταθερή η Κινητική Ενέργεια του συστήματος καθώς και η Ορμή του. Αν μετά την κρούση οι νέες ταχύτητες των σωμάτων είναι $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$, αντίστοιχα τότε θα ισχύει η σχέση (1.33) και η διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας του συστήματος:

$$K_{ολ(\alpha\rho\chi)} = K_{ολ(\tau\epsilon\lambda)} \Rightarrow K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2 \quad (1.35)$$

Και στις δύο περιπτώσεις κρούσης ισχύει η Αρχή της Διατήρησης της Ορμής για το σύστημα των σωμάτων. **Για την επίλυση κάθε προβλήματος κρούσης με απλή αρμονική ταλάντωση ακολουθούμε τα ακόλουθα βήματα:**

- 1ο:** Σχεδιάζουμε το σώμα που εκτελεί α.α.τ. στην θέση ισορροπίας του (αν υπάρχει ελατήριο το σχεδιάζουμε στην θέση φυσικού μήκους του)
- 2ο:** Σχεδιάζουμε τις θέσεις των σωμάτων αμέσως πριν την κρούση και αμέσως μετά την κρούση και υπολογίζουμε τις ταχύτητες πριν την κρούση εφόσον δεν μας είναι γνωστές με την χρήση μεθόδων που αναλύσαμε παραπάνω (π.χ. αν γνωρίζουμε την απομάκρυνση x από την θέση ισορροπίας πριν την κρούση βρίσκουμε την ταχύτητα με την βοήθεια της Ενέργειας στην α.α.τ.)
- 3ο:** Λύνουμε το σύστημα που προκύπτει από τις σχέσεις (1.33), (1.35) αν έχουμε ελαστική κρούση και βρίσκουμε την ταχύτητα του ταλαντούμενου σώματος μετά την κρούση. Αν η κρούση είναι πλαστική ή ανελαστική εφαρμόζουμε την (1.33) και βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος.
- 4ο:** Υπολογίζουμε την Ενέργεια του ταλαντούμενου συστήματος μετά την κρούση με την χρήση της Διατήρησης της Ενέργειας μετά την κρούση $E' = K' + U'$.
- 5ο:** Υπολογίζουμε το νέο πλάτος της ταλάντωσης A' από την νέα Ενέργεια E'

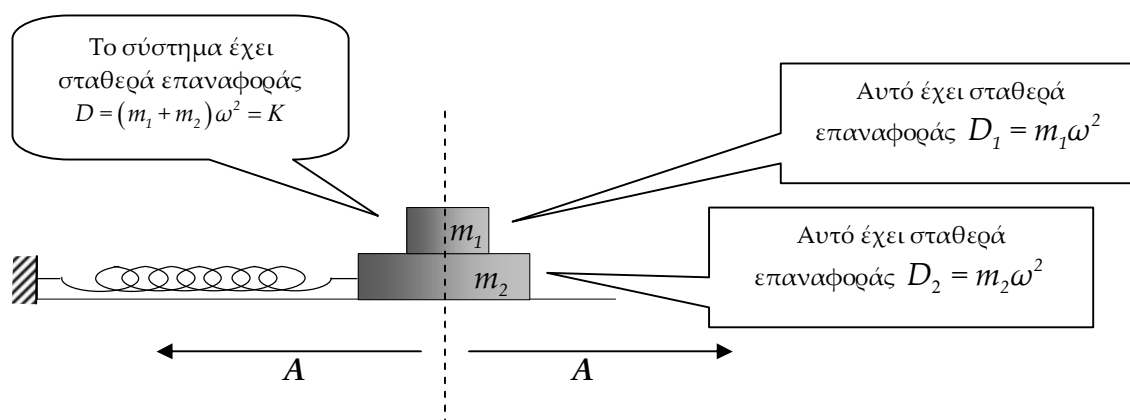
Προσοχή γιατί υπάρχουν περιπτώσεις προβλημάτων που αλλάζει η θέση ισορροπίας του ταλαντούμενου συστήματος αμέσως μετά την κρούση με συνέπεια να αλλάζει και το πρόβλημα που μελετούμε. Οι περιπτώσεις αυτές είναι εκείνες της πλαστικής κρούσης σε κατακόρυφο ή κεκλιμένο σύστημα ελατηρίου - μάζας. Στην περίπτωση αυτή σχεδιάζουμε την νέα θέση ισορροπίας μετά την κρούση, για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε στο 4ο και 5ο βήμα.

Τέλος στα προβλήματα που μετά την κρούση δημιουργείται συσσωμάτωμα (Πλαστική Κρούση) αλλάζει και η γωνιακή συχνότητα ω , άρα και η περίοδος της ταλάντωσης.

1.2.6 Σώματα που βρίσκονται σε επαφή και εκτελούν α.α.τ.

Όταν δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 βρίσκονται σε επαφή και εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση ταυτόχρονα, τότε έχουν κοινή γωνιακή συχνότητα $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Η συχνότητα ω υπολογίζεται από την σχέση:

$$D = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{D}{m_1 + m_2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m_1 + m_2}}$$



Το κάθε σώμα έχει την δική του σταθερά επαναφοράς D_1, D_2 που την υπολογίζουμε από τις σχέσεις:

$$D_1 = m_1\omega^2, D_2 = m_2\omega^2$$

Αν το σύστημα που εκτελεί την απλή αρμονική ταλάντωση είναι δεμένο σε ελατήριο, τότε η σταθερά επαναφοράς είναι $D = k$

Όταν ένα σώμα είναι σε επαφή με μια επιφάνεια (ή με ένα άλλο σώμα), δέχεται από την επιφάνεια δύναμη N . **Στην οριακή περίπτωση που $N = 0$ το σώμα χάνει την επαφή με την επιφάνεια.**

1.4 Φθίνουσες Ταλαντώσεις

1.4.1 Μηχανικές Ταλαντώσεις

Οι ταλαντώσεις των οποίων το πλάτος μειώνεται με τον χρόνο και τελικά μηδενίζεται λέγονται **Φθίνουσες ή Αποσβεννύμενες**. Όλες οι ταλαντώσεις στην φύση είναι φθίνουσες, γιατί καμία κίνηση δεν είναι απαλλαγμένη από τριβές και αντιστάσεις. Η απόσβεση (δηλαδή η ελάττωση) του πλάτους μιας ταλάντωσης οφείλεται στις δυνάμεις που αντιτίθενται στην κίνηση του. Επειδή αυτές οι δυνάμεις είναι αντίθετες με την ταχύτητα, παράγουν συνεχώς αρνητικό έργο με αποτέλεσμα να μεταφέρουν συνεχώς ενέργεια από το ταλαντούμενο σύστημα στο περιβάλλον. Έτσι η ολική ενέργεια του συστήματος με την πάροδο του χρόνου ελαττώνεται και το πλάτος της ταλάντωσης, που εξαρτάται από την ολική ενέργεια μειώνεται.

Γενικά οι δυνάμεις που προκαλούν μείωση του πλάτους δεν είναι εύκολο να προσδιοριστούν. Μια περίπτωση με μεγάλο ενδιαφέρον είναι η περίπτωση της δύναμης που είναι ανάλογη και αντίθετη της ταχύτητας.

$$F' = -bv \quad (1.62)$$

Μια τέτοια δύναμη είναι η δύναμη αντίστασης που ασκείται σε μικρά αντικείμενα που κινούνται μέσα στο νερό ή στον αέρα.

Στην περίπτωση αυτή ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα θα έχει την παρακάτω μορφή:

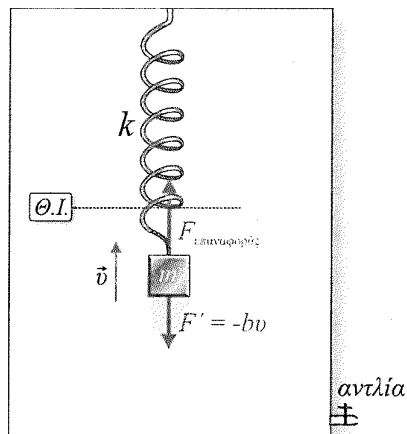
$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow -Dx - bv = m\alpha \quad (1.63)$$

Η σταθερά αναλογίας b είναι μια θετική ποσότητα που ονομάζεται **σταθερά απόσβεσης** και εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου καθώς και από το σχήμα και το μέγεθος του αντικειμένου που κινείται. Η μονάδας μέτρησης στο $S.I.$ είναι το $1kg/s$. Από την μορφή της δύναμης είναι εμφανές ότι ο ρυθμός μείωσης του πλάτους της ταλάντωσης θα εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς b . Όσο μεγαλύτερη είναι, τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η μείωση του πλάτους σε κάθε περίοδο.

Χρησιμοποιώντας την διάταξη του διπλανού σχήματος και για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης, παίρνουμε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις, στις οποίες αποδίδεται η απομάκρυνση x σε συνάρτηση με τον χρόνο για μηδενική, μικρή, μεσαία και μεγάλη απόσβεση.

Τα βασικά συμπεράσματα που προκύπτουν είναι:

- Το πλάτος της ταλάντωσης είναι **φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου**. Το πόσο γρήγορα μειώνεται το πλάτος εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης b . Όταν η



Σχήμα 1.14: Η αύξηση της πυκνότητας αέρα έχει σαν αποτέλεσμα μείωση του πλάτους

σταθερά απόσβεσης μεγαλώνει, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα. **Στις ακραίες περιπτώσεις που η σταθερά b παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, η κίνηση γίνεται απεριοδική**, δηλαδή ο ταλαντωτής επιστρέφει στην θέση ισορροπίας του και μένει εκεί.

- **Η περίοδος** για ορισμένη τιμή της σταθεράς b , διατηρείται σταθερή και ανεξάρτητη από το πλάτος. Όταν η σταθερά b μεγαλώνει, η περίοδος παρουσιάζει μια μικρή αύξηση που, στα πλαίσια του σχολικού βιβλίου θα θεωρούμε αμελητέα.

Η εκθετική μείωση του πλάτους Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \quad (1.64)$$

όπου A_0 είναι το πλάτος της ταλάντωσης την χρονική στιγμή $t = 0$ και $\Lambda = \frac{b}{2m}$ είναι μια θετική σταθερά. Η μονάδα μέτρησης της σταθεράς Λ στο $S.I.$ είναι το s^{-1} .

Χρόνος Υποδιπλασιασμού ή ημισείας ζωής του πλάτους Από την σχέση (1.64) προκύπτει ότι για την μείωση του πλάτους κατά 50% απαιτείτε πάντοτε το ίδιο χρονικό διάστημα $t_{1/2}$ που ονομάζεται χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους.

Αν θέσουμε στην σχέση $A = \frac{A_0}{2}$ τότε βρίσκουμε τον χρόνο $t_{1/2}$:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow 2 = e^{\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow \ln 2 = \Lambda t_{1/2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Lambda} \quad (1.65)$$

Άρα ο χρόνος υποδιπλασιασμού είναι ανεξάρτητος του αρχικού πλάτους της ταλάντωσης, εξαρτάται αποκλειστικά από την σταθερά Λ .

Η εκθετική μείωση της μέγιστης απομάκρυνσης Οι μέγιστες απομακρύνσεις προς την ίδια κατεύθυνση μειώνονται εκθετικά με τον χρόνο. Δηλαδή ισχύει η σχέση:

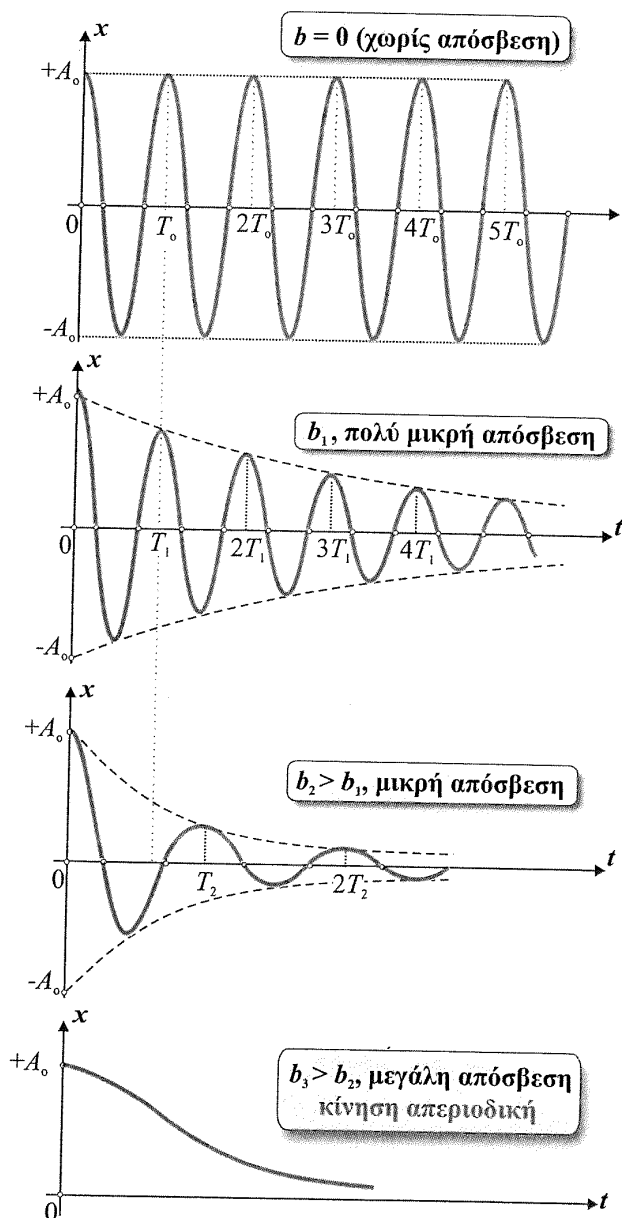
$$A_\kappa = A_0 e^{-\Lambda t}, \quad t = \kappa T, \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο λόγος δύο διαδοχικών μεγίστων απομακρύνσεων, προς την ίδια κατεύθυνση, διατηρείται σταθερός. Δηλαδή, ισχύει:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_\kappa}{A_{\kappa+1}} = \sigma \tau \alpha \theta. \quad (1.66)$$

Απόδειξη: Επιλέγοντας τις χρονικές στιγμές $t_1 = \kappa T$ και $t_2 = (\kappa + 1)T$ βρίσκουμε:

$$\frac{A_\kappa}{A_{\kappa+1}} = \frac{A_0 e^{-\Lambda(\kappa T)}}{A_0 e^{-\Lambda(\kappa T + T)}} = e^{\Lambda T} = \sigma \tau \alpha \theta.$$

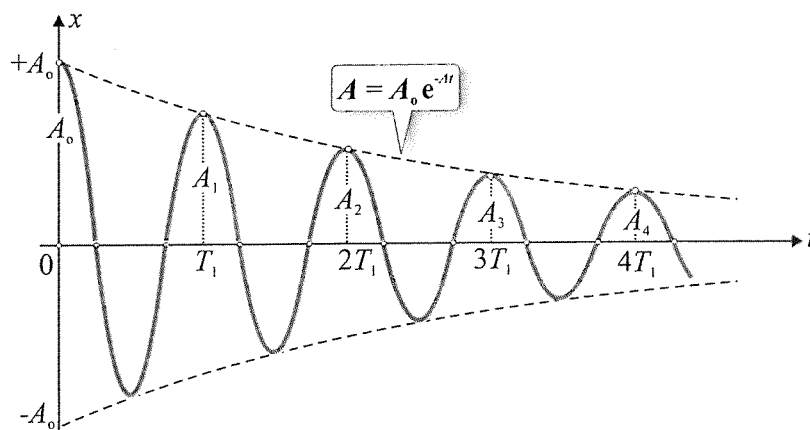


Σχήμα 1.15: Φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις

Η ενέργεια στην φθίνουσα μηχανική ταλάντωση μειώνεται και αυτή εκθετικά με τον χρόνο και θα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}D(A_0e^{-\Lambda t}) \Rightarrow E = \frac{1}{2}DA_0^2e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E = E_0e^{-2\Lambda t} \quad (1.67)$$

Αντίστοιχα με τον λόγο των διαδοχικών πλατών, αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι ισχύει η σχέση:



Σχήμα 1.16: Η εκθετική μείωση του πλάτους και της μέγιστης απομάκρυνσης

$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_2}{E_3} = \dots = \frac{E_\kappa}{E_{\kappa+1}} = \sigma\tau\alpha\theta. \quad (1.68)$$

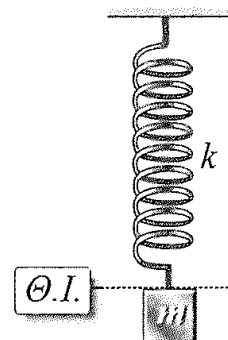
Ο ρυθμός απώλειας Ενέργειας θα δίνεται από την ισχύ της δύναμης απόσβεσης σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\frac{dE}{dt} = F'v = -bv^2 \quad (1.69)$$

1.5 Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

1.5.1 Μηχανικές Ταλαντώσεις

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα σύστημα ελατηρίου - μάζας. Αν η μάζα απομακρυνθεί από την θέση ισορροπίας της προς τα κάτω κατά A και αφεθεί ελεύθερη, το σύστημα να εκτελέσει κατακόρυφη ταλάντωση. Αν δεν υπάρχουν αντιστάσεις, η ταλάντωση θα είναι αμείωτη, με συχνότητα :



$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.73)$$

Όμως στην πραγματικότητα η ταλάντωση θα είναι φθίνουσα. Η συχνότητα της θα είναι λίγο μικρότερη από την f_0 (στην πράξη μπορεί να θεωρηθεί περίπου ίση με την f_0). Μια τέτοια ταλάντωση ονομάζεται **ελεύθερη ταλάντωση**.

Η συχνότητα f_0 με την οποία πραγματοποιείται μια ελεύθερη ταλάντωση, ονομάζεται **ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης**.

Μια χρήσιμη παρατήρηση (εκτός ύλης) Θεωρητικά η συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης f_ϕ είναι μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_0 και αυτό επιβεβαιώνεται από την σχέση:

$$\omega_\phi = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

η οποία ισχύει όταν στο σύστημα ενεργεί μια δύναμη αντίστασης της μορφής $F' = -bv$. Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση γενικά $\omega_\phi < \omega_0$ ή $f_\phi < f_0$. Στην περίπτωση όμως που η σταθερά b είναι πολύ μικρή (σχολικό βιβλίο) τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $f_\phi = f_0$.

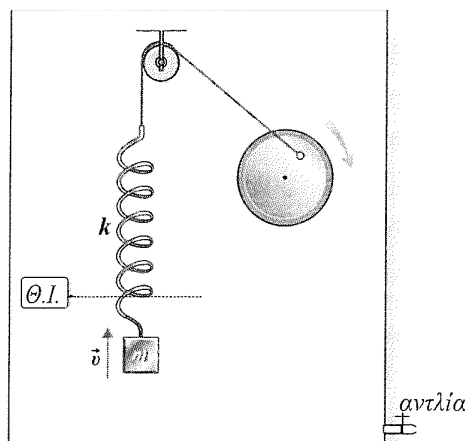
Αν θέλουμε να διατηρείται σταθερό το πλάτος της ταλάντωσης, πρέπει να ασκήσουμε στο σύστημα μια περιοδική εξωτερική δύναμη (π.χ. $F_\delta = F_0 \eta \mu(\omega_\delta t + \phi)$). Αυτή την δύναμη την ονομάζουμε **διεγείρουσα δύναμη**. Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα σε αυτή την περίπτωση θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow -bv - Dx + F_\delta = m\alpha \quad (1.74)$$

Θεωρούμε την διάταξη του διπλανού σχήματος, όπου το ελατήριο είναι δεμένο με σχοινί το άλλο άκρο είναι δεμένο σε ένα τροχό, ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται. Η περιστροφή του τροχού αναγκάζει το σώμα να εκτελεί κατακόρυφη ταλάντωση με συχνότητα η οποία συμπίπτει με την συχνότητα περιστροφής του τροχού. Η ταλάντωση αυτή ονομάζεται **εξαναγκασμένη**. Δηλαδή:

Εξαναγκασμένη Ταλάντωση ονομάζεται η ταλάντωση ενός συστήματος, όταν σε αυτό ασκείται **εξωτερική περιοδική δύναμη**, με αποτέλεσμα το πλάτος της ταλάντωσης να παραμένει σταθερό.

Ο τροχός με την περιοδική δύναμη που ασκεί ονομάζεται διεγέρτης. Η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι ίδια με την συχνότητα του διεγέρτη (f_δ) και όχι



η ιδιοσυχνότητα του συστήματος (f_0). Δηλαδή **στην εξαναγκασμένη ταλάντωση ο διεγέρτης επιβάλλει στην ταλάντωση την συχνότητα του.**

Καμπύλες Συντονισμού

Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης A εξαρτάται από την συχνότητα f_δ του διεγέρτη. Συγκεκριμένα, αν μεταβληθεί η συχνότητα f_δ του διεγέρτη μεταβάλλεται και το πλάτος της εκτελούμενης ταλάντωσης. Οι τιμές του πλάτους είναι γενικά μικρές, εκτός και αν η συχνότητα του διεγέρτη πλησιάζει στην ιδιοσυχνότητα f_0 , οπότε το πλάτος παίρνει μεγάλες τιμές και γίνεται μέγιστο, όταν η συχνότητα f_δ γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα. Τότε λέμε ότι έχουμε **συντονισμό**.

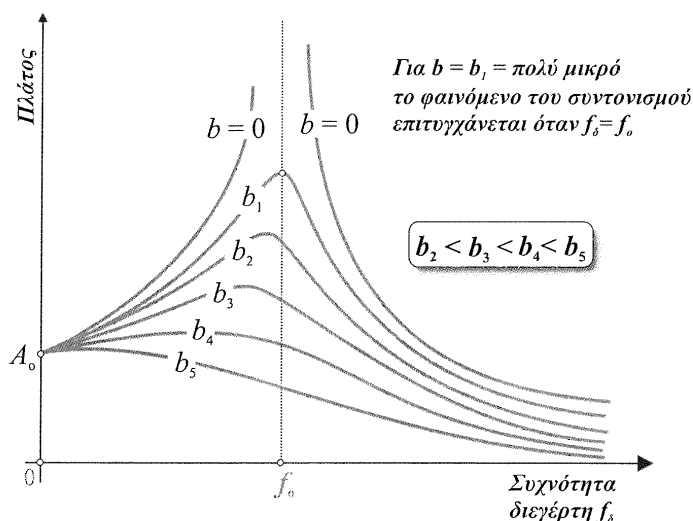
Συντονισμός ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο για μια ορισμένη συχνότητα του διεγέρτη, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ενός συστήματος γίνεται μέγιστο.

Στην περίπτωση που μια ταλάντωση δεν έχει απώλειες ενέργειας ($b = 0$), όταν $f_\delta = f_0$, το πλάτος γίνεται θεωρητικά άπειρο. Στην πράξη όμως αυτό είναι αδύνατο γιατί πάντα υπάρχουν (έστω και μικρές) απώλειες ενέργειας.

Για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης (b), το πλάτος παίρνει μια πεπερασμένη μέγιστη τιμή που εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς απόσβεσης. Ταυτόχρονα ο συντονισμός συμβαίνει όταν η συχνότητα f_δ του διεγέρτη είναι λίγο μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_0 . Οι **Καμπύλες συντονισμού** αποτυπώνουν με τον καλύτερο τρόπο τα παραπάνω.

Ενεργειακή προσέγγιση

Στις ελεύθερες ταλαντώσεις, κατά την διέγερση του συστήματος δίνεται σ' αυτό κάποια μηχανική ενέργεια, η οποία διατηρείται σταθερή, αν η ταλάντωση είναι αμείωτη, ή μετατρέπεται σε θερμότητα αν η ενέργεια είναι φθίνουσα. Στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, στο σύστημα προσφέρεται περιοδικά ενέργεια με συχνότητα F_δ , μέσω της διεγείρουσας δύναμης. Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται η ενέργεια στο σύστημα (Ισχύς της F_δ) αντισταθμίζει τον ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω τριβών και αντιστάσεων (Ισχύς της F') και έτσι το πλάτος παραμένει σταθερό. Ο τρόπος με τον οποίο το ταλαντούμενο σύστημα απορροφά την ενέργεια είναι "εκλεκτικός" και έχει να κάνει με την συχνότητα που του προσφέρεται. Κατά τον συντονισμό, η ενέργεια μεταφέρεται στο σύστημα με βέλτιστο τρόπο, γι' αυτό και το πλάτος



Σχήμα 1.18: Καμπύλες συντονισμού πλάτους

είναι μέγιστο. Λέγοντας βέλτιστο τρόπο, εννοούμε ότι κατά τον συντονισμό η κατεύθυνση της εξωτερικής διεγείρουσας δύναμης ($F_{εξ}$) ταυτίζεται με την κατεύθυνση της ταχύτητας v του συστήματος. *Να σημειωθεί ότι στην εξαναγκασμένη ταλάντωση μόνο κατά τον συντονισμό $E = K_{max} = U_{max}$, για μια τυχαία συχνότητα διεγέρτη οι μέγιστες τιμές των ενεργειών διαφέρουν.*

ΦΥΣΙΚΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ &
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΚΥΜΑΤΑ



ΜΠΕΝΑΚΗΣ ΜΑΝΩΛΗΣ
ΦΥΣΙΚΟΣ

ΚΥΜΑΤΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΚΥΜΑ είναι η διάδοση μιας διαταραχής που **μεταφέρει ενέργεια και ορμή** με σταθερή ταχύτητα, **χωρίς όμως να μεταφέρει ύλη**.

Για τη δημιουργία ενός κύματος απαιτείται η **πηγή του κύματος** (η αφετηρία της διαταραχής) και το **μέσο διάδοσης** (ο χώρος στον οποίο θα διαδοθεί η διαταραχή).

Η πηγή των κυμάτων εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση που η ενέργειά της μεταδίδεται προς όλες τις κατευθύνσεις με ορισμένη ταχύτητα. Η διάδοση γίνεται μέσω των μορίων του μέσου, τα οποία αλληλεπιδρούν με τα γειτονικά τους. Τα μόρια του μέσου εκτελούν διαδοχικά την ίδια κίνηση με αυτή της πηγής αλλά με διαφορά φάσης, χωρίς να μεταφέρονται σε άλλες περιοχές του χώρου.

Όταν η ταλάντωση της πηγής είναι αρμονική, τότε το κύμα ονομάζεται **αρμονικό**.

- Κάθε κύμα : εκπορεύεται από μια πηγή (ένας ταλαντωτής σε ελεύθερη ή εξαναγκασμένη ταλάντωση), διαδίδεται σε κάποιο μέσο (κενό, αέρας, νερό...) ,είναι δυνατόν να ανιχνευθεί από κάποιον δέκτη (που μπορεί να είναι επίσης ένας ταλαντωτής ο οποίος ενεργοποιείται από αυτό).

ΕΙΔΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

- Με κριτήριο το μηχανισμό διάδοσης : **Μηχανικά** (χρειάζονται μέσο διάδοσης) & **Ηλεκτρομαγνητικά** (δε χρειάζονται μέσο διάδοσης – διαδίδονται και στο κενό)
- Με κριτήριο τις διαστάσεις του μέσου : **Γραμμικά** , **επιφανειακά** και **όγκου**.
- Με κριτήριο το μηχανισμό διάδοσης : **Εγκάρσια** (τα μόρια του μέσου ταλαντώνονται κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος) & **Διαμήκη** (τα μόρια του μέσου ταλαντώνονται παράλληλα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος).
Τα εγκάρσια κύματα διαδίδονται στα στερεά και στην επιφάνεια των υγρών , σχηματίζοντας όρη και κοιλάδες.
Τα διαμήκη κύματα διαδίδονται στα στερεά, υγρά και αέρια, σχηματίζοντας πυκνώματα και αραιώματα.
- Με κριτήριο τη μετακίνηση της φάσης : **Τρέχοντα** & **στάσιμα** .

Περίοδος του κύματος (T) : το χρονικό διάστημα στο οποίο η κυματική εικόνα επαναλαμβάνεται

Συχνότητα του κύματος (f) : Η συχνότητα ταλάντωσης των μορίων του μέσου.

Ταχύτητα κύματος (v) : Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η διαταραχή.

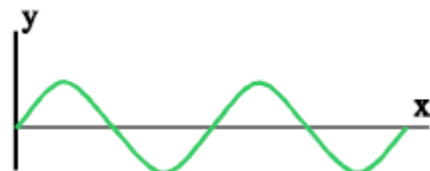
Εξαρτάται μόνο από το μέσο διάδοσης και δεν εξαρτάται από το πόσο ισχυρή είναι η διαταραχή. (σε συγκεκριμένο μέσο διάδοσης, όλα τα κύματα έχουν την ίδια ταχύτητα)

Μήκος κύματος (λ) : Η απόσταση που διανύει το κύμα σε μια περίοδο (ή η απόσταση μεταξύ δύο σημείων που απέχουν το ίδιο από τη θέση ισορροπίας και κινούνται κατά την ίδια φορά)

Η ενέργεια του κύματος καθορίζει το πλάτος ταλάντωσης των μορίων του μέσου.

Θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής :

$$v = \lambda \cdot f$$

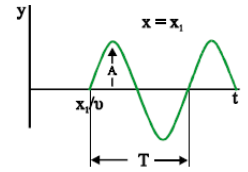


ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ: $y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

Η εξίσωση είναι μια συνάρτηση με δύο μεταβλητές (χρόνος t - απόσταση x)

α) Για δεδομένο x : $y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \text{σταθερ}$

(πληροφορεί για τις θέσεις που αποκτά ένα υλικό σημείο στο κύλημα του χρόνου)

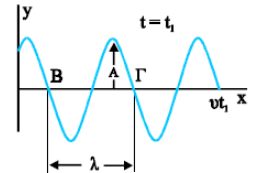


β) Για δεδομένο t : $y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\text{σταθ.} - \frac{x}{\lambda} \right)$

(πληροφορεί για τις θέσεις όλων των σημείων του μέσου μία δεδομένη χρονική στιγμή)

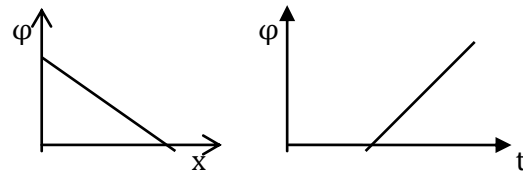
Η εξίσωση καλείται **στιγμιότυπο του κύματος**

(είναι ένα είδος φωτογραφίας του).



Φάση του κύματος: $\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ (εξαρτάται από τη θέση και το χρόνο)

- Αν $t = \text{σταθερό}$, $\varphi = 2\pi \left(\text{σταθ.} - \frac{x}{\lambda} \right)$
- Αν $x = \text{σταθερό}$, $\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \text{σταθ.} \right)$



Διαφορά φάσης: Στον ίδιο χρόνο t : $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$

Στο ίδιο σημείο x : $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta t}{T}$

Συμφωνία φάσης: (έχουν δύο σημεία όταν σε κάθε χρονική στιγμή, έχουν την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα ταλάντωσης)

$$\Delta x = \kappa \cdot \lambda, \text{ όπου } \kappa = 1, 2, 3, \dots$$

Αντίθεση φάσης: (έχουν δύο σημεία όταν σε κάθε χρονική στιγμή, έχουν αντίθετη απομάκρυνση και αντίθετη ταχύτητα ταλάντωσης)

$$\Delta x = (2 \cdot \kappa + 1) \frac{\lambda}{2}, \text{ όπου } \kappa = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Όλα τα σημεία του υλικού μέσου, καθυστερούν σε φάση έναντι της πηγής κατά $\Delta\varphi = 2\pi x / \lambda$
- Η φάση φ μειώνεται καθώς κινούμαστε στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος.
- Όλα τα σημεία του υλικού μέσου καθυστερούν χρονικά έναντι της πηγής κατά $\Delta t = x / v$

□ Ένα σημείο σε απόσταση x_1 , αρχίζει να ταλαντώνεται μετά από χρόνο $\Delta t = x_1 / v$ (δηλαδή το κύμα φθάνει στο σημείο αυτό, μετά από χρόνο $\Delta t = x_1 / v$)

□ Εξίσωση αρμονικού κύματος που κινείται προς τα αριστερά: $y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$

□ Ταχύτητα ταλάντωσης σημείου (ωκύτητα): $v = \omega \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

□ Επιτάχυνση σημείου: $a = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

□ Άλλες μορφές της εξίσωσης κύματος: $y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(f \cdot t - \frac{x}{\lambda} \right)$ ή $y = A \cdot \eta\mu \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$

ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

Είναι το αποτέλεσμα της ταυτόχρονης διάδοσης δύο ή περισσότερων κυμάτων στην ίδια περιοχή ενός ελαστικού μέσου.

Σύμφωνες πηγές: όταν έχουν την ίδια φάση ή οι φάσεις των δύο πηγών διαφέρουν κατά 2π

Συμβολή κυμάτων από δύο σύμφωνες πηγές

Έστω δύο σύμφωνες πηγές Π_1 και Π_2 .

Στο σημείο M φθάνουν δύο κύματα

$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \quad \text{και}$$

$$y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right)$$

Το αποτέλεσμα της συμβολής, θα είναι $y = y_1 + y_2$ οπότε προκύπτει:

(χρησιμοποιώντας τη τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha - \beta}{2} \eta\mu \frac{\alpha + \beta}{2})$$

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda} \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right)$$

θέτω πλάτος: $A' = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda}$ και φάση $\varphi = \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right)$

$$\text{Άρα} \quad y = A' \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right)$$

Η εξίσωση αυτή, παριστάνει γραμμική αρμονική ταλάντωση, πλάτους $A' = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda}$

και συχνότητας ίσης με τη συχνότητα των κυμάτων.

Το πλάτος εξαρτάται από τη διαφορά των αποστάσεων του υλικού σημείου από τις πηγές.

Διερεύνηση:

(α) ποια σημεία ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος;

$$\text{Πρέπει } A' = 2 \cdot A \rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda} = \pm 1 \rightarrow 2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda} = N \cdot \pi \rightarrow \boxed{|r_2 - r_1| = N \cdot \lambda}, \text{ όπου}$$

$N=0,1,2,3,\dots$

[ενισχυτική συμβολή]

Επομένως, τα υλικά σημεία των οποίων οι αποστάσεις από τις πηγές διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος, ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος $2A$.

(β) ποια σημεία έχουν μηδενικό πλάτος;

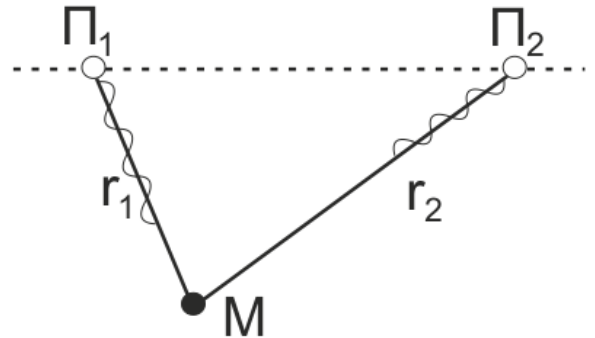
$$\text{Πρέπει } A' = 0 \rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda} = 0 \rightarrow 2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda} = (2N+1) \cdot \frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{|r_2 - r_1| = (2N+1) \frac{\lambda}{2}},$$

όπου $N=0,1,2,3,\dots$

[αποσβεστική συμβολή]

Επομένως, τα σημεία της επιφάνειας των οποίων οι αποστάσεις από τις πηγές διαφέρουν κατά περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/2$, παραμένουν ακίνητα.

- Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων για τα οποία συμβαίνει ενισχυτική ή αποσβεστική συμβολή είναι υπερβολές. Το σύνολο των υπερβολών καλούνται κροσσοί συμβολής.



ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

Είναι το αποτέλεσμα της συμβολής δύο κυμάτων ίδιας συχνότητας και ίδιου πλάτους που διαδίδονται στο ίδιο μέσο με ίδια ταχύτητα και προς αντίθετες κατευθύνσεις.

$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{και} \quad y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

Το κύμα που προκύπτει : $y = y_1 + y_2$. οπότε
(χρησιμοποιώντας πάλι τη τριγωνομετρική ταυτότητα :

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει αρμονική ταλάντωση

Πλάτος του στάσιμου : $A' = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}$

Παρατηρούμε ότι **το πλάτος εξαρτάται μόνο από τη θέση του σημείου και όχι από το χρόνο.**

- Το πλάτος της ταλάντωσης δεν είναι το ίδιο για όλα τα σημεία, αλλά εξαρτάται από τη θέση κάθε σημείου του μέσου.
- Κάθε σημείο του στάσιμου κύματος ταλαντώνεται με σταθερό αλλά διαφορετικό πλάτος από τα υπόλοιπα σημεία. (κάθε σημείο έχει το δικό του πλάτος)

ΚΟΙΛΙΕΣ – ΔΕΣΜΟΙ

(Α) Υπάρχουν σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος .

Τα σημεία αυτά ονομάζονται **κοιλίες**.

Συνθήκη για κοιλίες : πρέπει $A' = 2A \rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1 \rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm k\pi$

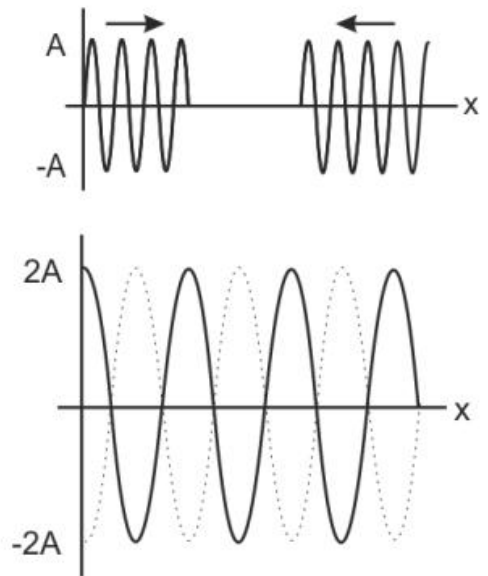
$$\rightarrow \boxed{x_k = k \cdot \frac{\lambda}{2}}, \quad \text{όπου } k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

(Β) Υπάρχουν σημεία που παραμένουν μονίμως ακίνητα . Τα σημεία αυτά ονομάζονται **δεσμοί**.

Συνθήκη για δεσμούς : πρέπει $A' = 0 \rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow$

$$\boxed{x_k = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{4}}, \quad \text{όπου } k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

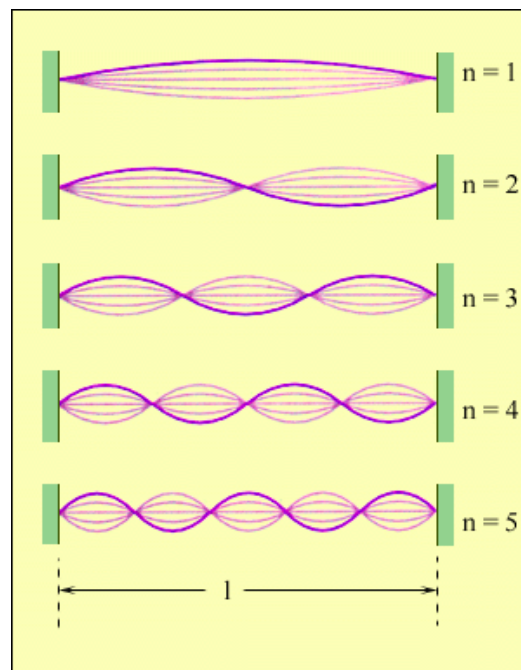
- Η απόσταση δύο δεσμών ή δυο κοιλιών είναι $\frac{\lambda}{2}$
- Η απόσταση δεσμού – κοιλίας είναι $\frac{\lambda}{4}$
- Στη θέση $x=0$ υπάρχει κοιλία του στάσιμου



- Όλα τα σημεία παίρνουν τη μέγιστη απομάκρυνση ταυτόχρονα και περνούν επίσης ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας.
- Τα σημεία που βρίσκονται ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς δεσμούς έχουν ίδια φάση ($\varphi=0$)
- Τα σημεία εκατέρωθεν δεσμού (αυτά που τα χωρίζει δεσμός), έχουν διαφορά φάσης $\varphi=\pi$.
- Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων του στάσιμου μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές : μηδέν (0) ή π .
- Το στάσιμο κύμα δε μεταφέρει ενέργεια. Η ενέργεια που προέρχεται από τα συμβαλλόμενα κύματα, κατανέμεται στα μόρια του μέσου και κάθε ένα εκτελεί ταλάντωση με διαφορετικό πλάτος.

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΡΕΧΟΝΤΟΣ & ΣΤΑΣΙΜΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

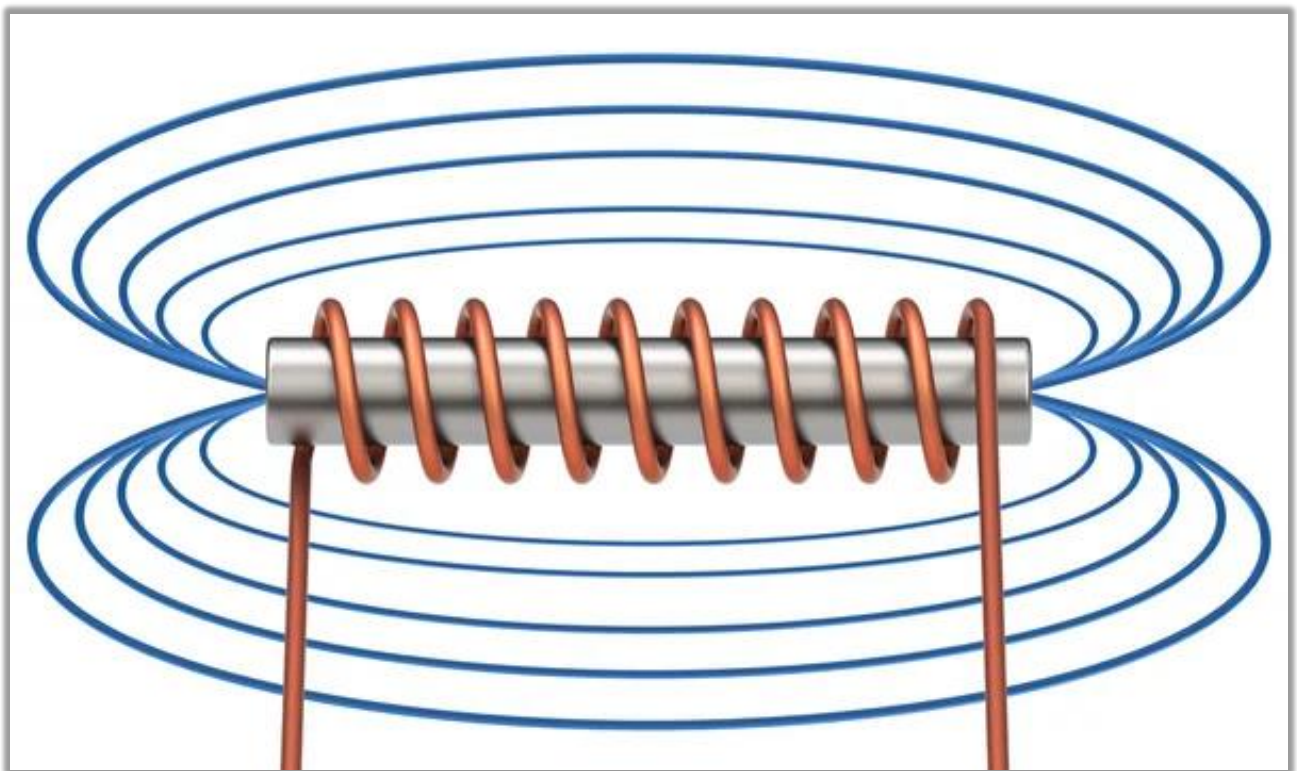
- Στο τρέχον κύμα, όλα τα σημεία ταλαντώνονται με ίδιο πλάτος, ενώ στο στάσιμο, κάθε σημείο ταλαντώνεται με το δικό του πλάτος.
- Στο τρέχον κύμα, έχουμε μεταφορά ενέργειας από σημείο σε σημείο ενώ δε γίνεται αυτό στο στάσιμο.
- Στο τρέχον, η φάση κάθε σημείου εξαρτάται από τη θέση του, ενώ στο στάσιμο είναι 0 ή π .
- Στο τρέχον, τα σημεία περνούν από τη θέση ισορροπίας σε διαφορετικές στιγμές, ενώ στο στάσιμο ταυτόχρονα.
- Στο τρέχον, υπάρχει συγκεκριμένη κατεύθυνση διάδοσης, ενώ στο στάσιμο δεν υπάρχει.
- Στο τρέχον, όλα τα σημεία ταλαντώνονται, ενώ στο στάσιμο υπάρχουν σημεία που παραμένουν ακίνητα (δεσμοί).

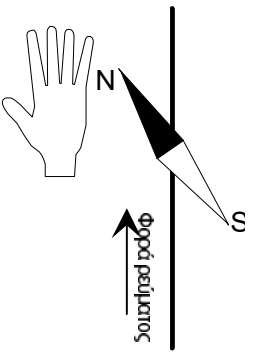


5^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

ΘΕΩΡΙΑ



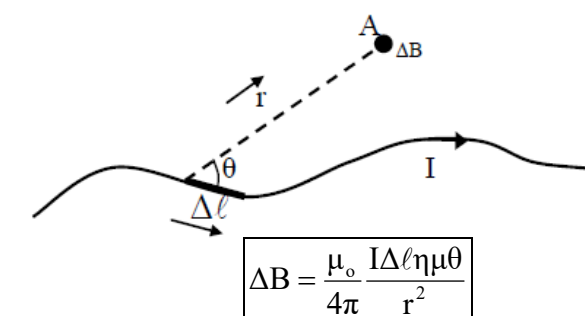
Το πείραμα Oersted


Ο Δανός Hans Christian Oersted έκανε το εξής πείραμα με το οποίο απέδειξε τα μαγνητικά αποτελέσματα του ηλεκτρικού ρεύματος. Τοποθέτησε μία μαγνητική βελόνη δίπλα σε ένα αγωγό και παρατήρησε ότι όταν πέρασε ρεύμα μέσα από τον αγωγό η βελόνη άλλαξε τον προσανατολισμό της. Αν τοποθετηθεί η βελόνη παράλληλα στον ρευματοφόρο αγωγό τότε ο βόρειος πόλος της θα αποκλίνει προς την μεριά του αντίχειρα όταν η παλάμη του δεξιού χεριού μας τοποθετηθεί πάνω από τον αγωγό ώστε τα δάκτυλά μας να δείχνουν την φορά του ρεύματος.

Το αποτέλεσμα του πειράματος Oersted ήταν ότι: **οποιοσδήποτε ρευματοφόρος αγωγός δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο.**

Από την εργαστηριακή έρευνα προκύπτει η ένταση σ' ένα σημείο του μαγνητικού πεδίου που προκαλεί ένας ρευματοφόρος αγωγός εξαρτάται:

- 1) από την θέση του σημείου που αναφέρεται η ένταση και
- 2) από την γεωμετρία (σχήμα, μορφή, μέγεθος) του αγωγού

Νόμος Biot-Savart

Το διάνυσμα ΔB στο A έχει σημείο εφαρμογής το A, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από το r και το $\Delta \ell$ και η φορά του βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίου. Η φορά του ΔB είναι ίδια με την φορά που πρέπει να περιστραφεί δεξιόστροφος κοχλίας για να προχωρήσει κατά μήκος του $\Delta \ell$ και κατά την φορά του ρεύματος. (στο σχήμα έχει φορά προς τον αναγνώστη)

Όπως αναφέρθηκε με τον νόμο Biot-Savart μπορούμε να υπολογίσουμε την στοιχειώδη μαγνητική επαγωγή (ένταση) ΔB του μαγνητικού πεδίου που προκαλεί ένα στοιχειώδες τμήμα ρευματοφόρου αγωγού, σ ένα σημείο A.

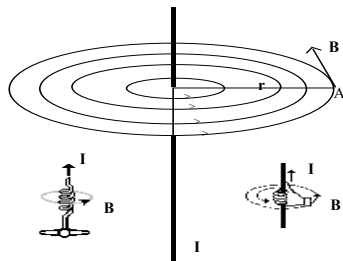
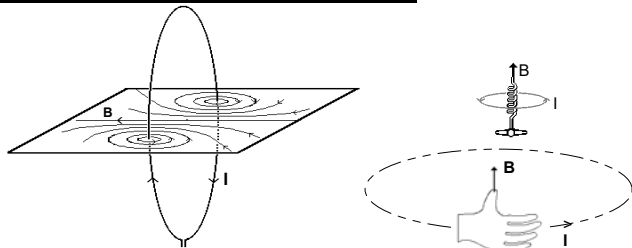
Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την συνολική μαγνητική επαγωγή B του μαγνητικού πεδίου που προκαλεί ολόκληρος ο ρευματοφόρος αγωγός στο σημείο A, τότε για τον υπολογισμό της, αθροίζουμε τις στοιχειώδεις μαγνητικές επαγωγές $\Delta B_1, \Delta B_2, \dots, \Delta B_v$, που προκαλούν τα στοιχειώδη τμήματα $\Delta \ell_1, \Delta \ell_2, \dots, \Delta \ell_v$ που αποτελούν τον ρευματοφόρο αγωγό δηλαδή $\vec{B} = \vec{\Delta B}_1 + \vec{\Delta B}_2 + \dots + \vec{\Delta B}_v$

Νόμος Ampere

Κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής το άθροισμα των γινομένων $B \cdot \Delta \ell \cdot \sin \theta$ είναι ίσο με $\mu_0 \cdot I_{\text{εγκ}}$ όπου $I_{\text{εγκ}}$ το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που διέρχονται από την επιφάνεια που περικλείεται από την κλειστή διαδρομή.

Μαθηματική διατύπωση για το κενό και το SI

$$\sum B \cdot \Delta \ell \cdot \sin \theta = \mu_0 I_{\text{εγκ}}$$

Ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός απείρου μήκους**Κυκλικός ρευματοφόρος αγωγός****Μαγνητική επαγωγή ευθυγράμμου ρευματοφόρου αγωγού απείρου μήκους**

Η μαγνητική επαγωγή B σε ένα σημείο (A) που απέχει απόσταση r από το ρευματοφόρο αγωγό παριστάνεται με ένα διάνυσμα που έχει μέτρο που δίδεται από τη σχέση

$$B = K_\mu \frac{2I}{r}$$

όπου I η ένταση του ρεύματος, r η απόσταση του σημείου από τον αγωγό και K_μ σταθερά του μαγνητικού πεδίου

Μαγνητική επαγωγή στο κέντρο κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού

Η μαγνητική επαγωγή B στο κέντρο κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού είναι ένα διάνυσμα που έχει μέτρο που δίδεται από τη σχέση

$$B = K_\mu \frac{2\pi I}{r}$$

όπου I η ένταση του ρεύματος, r η ακτίνα του κυκλικού αγωγού, K_μ σταθερά του μαγνητικού πεδίου.

Στην περίπτωση που ο κυκλικός αγωγός αποτελείται από N σπείρες τότε η B στο κέντρο του θα δίδεται από την σχέση

$$B = N K_\mu \frac{2\pi I}{r}$$

Ρευματοφόρο σωληνοειδές απείρου μήκους

$$B = k_{\mu} 4\pi I n^* \quad \text{ή} \quad B = k_{\mu} 4\pi I \frac{N}{L}$$

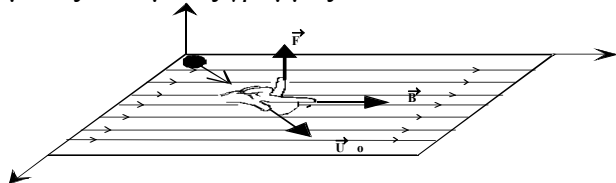
Σε περιοχή κοντά στα άκρα του σωληνοειδούς η μαγνητική επαγωγή B' έχει μέτρο περίπου ίσο με το μισό της B δηλαδή

$$B' \approx \frac{B}{2} = k_{\mu} 2\pi I n^* \quad \text{ή} \quad B' \approx \frac{B}{2} = k_{\mu} 2\pi I \frac{N}{L}$$

Δύναμη μαγνητικού πεδίου σε κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο (ΔΥΝΑΜΗ Lorentz).

Όταν κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο q , εισέλθει σε ομογενές μαγνητικό πεδίο επαγωγής B με ταχύτητα u_0 τότε ασκείται πάνω του δύναμη που το μέτρο της δίνεται από τη σχέση: $F = B u_0 q \sin \phi$

Όπου ϕ η γωνία που σχηματίζει η κατεύθυνση του u_0 με τις δυναμικές γραμμές.

**Δύναμη μαγνητικού πεδίου σε ρευματοφόρο αγωγό (Δύναμη Laplace).**

Όταν ένας αγωγός (ρευματοφόρος) βρεθεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο τότε ασκείται πάνω του δύναμη ηλεκτρομαγνητικής φύσεως η οποία υπολογίζεται με βάση το νόμο Laplace

$$F = B I L \sin \phi$$

Η δύναμη Laplace είναι πάντα κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τον αγωγό και το B του μαγνητικού πεδίου η φορά της μπορεί να βρεθεί είτε από τον κανόνα των τριών δακτύλων είτε με τον κανόνα Gauss είτε από κανόνα δεξιάς παλάμης.

Μαγνητική διαπερατότητα υλικού

$$\mu = \frac{B}{B_0}$$

B η ένταση του μαγνητικού πεδίου όταν μέσα στο πεδίο βρίσκεται το υλικό

B_0 η ένταση του μαγνητικού πεδίου όταν στο πεδίο δεν υπάρχει υλικό

Μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό ρευματοφόρου σωληνοειδούς απείρου μήκους

Στο εσωτερικό του σωληνοειδούς το πεδίο θεωρείται ομογενές οπότε σε κάθε σημείο του εσωτερικού του η μαγνητική επαγωγή B θεωρείται σταθερή. Το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής B στο εσωτερικό του σωληνοειδούς δίνεται από τη σχέση:

$$B = k_{\mu} 4\pi I n^* \quad \text{ή} \quad B = k_{\mu} 4\pi I \frac{N}{L}$$

Όπου I η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το σωληνοειδές, n^* ο αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκους, N ο αριθμός σπειρών του σωληνοειδούς και L το μήκος του σωληνοειδούς.

Αν το σωληνοειδές στο εσωτερικό του περιέχει πυρήνα μαγνητικής διαπερατότητας μ τότε το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής στο εσωτερικό του θα δίδεται από τη σχέση:

$$B = \mu k_{\mu} 4\pi I n^* \quad \text{ή} \quad B = \mu k_{\mu} 4\pi I \frac{N}{L}$$

Για το SI σύστημα μονάδων και για το κενό ή αέρα

$$K_{\mu} = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ Tm/A}$$

Η κατεύθυνση της F είναι πάντα κάθετη και στο B και στο u_0 . Για να βρούμε την κατεύθυνση της F χρησιμοποιούμε τον κανόνα των τριών δακτύλων, όπου ο αντίχειρας δείχνει την κατεύθυνση της u_0 , ο δείκτης την κατεύθυνση του B και ο μέσος δάκτυλος την κατεύθυνση της F όταν το φορτίο είναι θετικό.

Αν το φορτίο είναι αρνητικό τότε η κατεύθυνση της F είναι αντίθετη από αυτή που δείχνει ο μέσος δάκτυλος.

Ν ο μ ο ς L a p l a c e: Η δύναμη F που ασκείται σε ένα ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό ο οποίος βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B έχει μέτρο που δίδεται από την σχέση: $F = B I L \sin \phi$

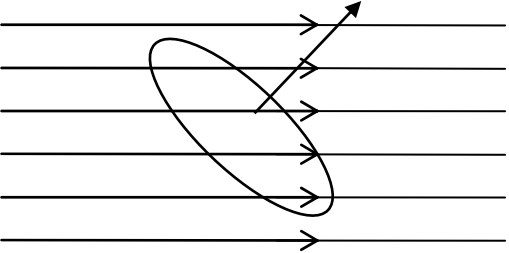
Όπου L το μήκος του αγωγού που βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο και ϕ η γωνία που σχηματίζει ο αγωγός με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου

Στην περίπτωση που ο αγωγός είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές, η δύναμη Laplace δίδεται από την σχέση $F = B I L$, ενώ αν είναι παράλληλος στις δυναμικές γραμμές η δύναμη μηδενίζεται.

Το μ είναι καθαρός αριθμός και μας δηλώνει πόσες φορές αυξήθηκε η ένταση του μαγνητικού πεδίου με την εισαγωγή του υλικού.

Με βάση την μαγνητική διαπερατότητα τα υλικά διακρίνονται σε

- Σιδηρομαγνητικά υλικά $\mu \gg 1$
- Παραμαγνητικά υλικά $\mu > 1$
- Διαμαγνητικά υλικά $\mu < 1$

Μαγνητική ροή επιφάνειας $\Phi = B S \sigma \nu \alpha$  B ένταση ομογενούς μαγνητικού πεδίου S εμβαδόν επιφάνειας α η γωνία που σχηματίζει η κάθετος στην επιφάνεια με την μαγνητική επαγωγή B του πεδίου Αν η επιφάνεια έχει τοποθετηθεί παράλληλα στις δυναμικές γραμμές τότε $\Phi_{\min}=0$ ενώ αν είναι κάθετα έχει τη μέγιστη τιμή της $\Phi_{\max}=BS$	Η μαγνητική ροή εκφράζει το πλήθος των δυναμικών γραμμών που διαρρέουν την επιφάνεια. Η μονάδα μέτρησης στο SI είναι το Weber ($1\text{ Weber}=1\text{ Tesla}\cdot\text{m}^2$) Η μαγνητική ροή εξαρτάται Από το πόσο ισχυρό ή ασθενές είναι το πεδίο (B) από το μέγεθος της επιφάνειας S και από τη θέση της επιφάνειας μέσα στο πεδίο (συνα). Αν η επιφάνεια έχει τοποθετηθεί παράλληλα στις δυναμικές γραμμές τότε $\Phi_{\min}=0$ ενώ αν είναι κάθετα έχει τη μέγιστη τιμή της $\Phi_{\max}=BS$ Αν οι δυναμικές γραμμές εισέρχονται στην επιφάνεια τότε $\Phi>0$ ενώ αν εξέρχονται $\Phi<0$. Η συνολική μαγνητική ροή που διαρρέει μια <u>κλειστή</u> επιφάνεια είναι μηδέν (το πλήθος των δυναμικών γραμμών των εισερχομένων στην επιφάνεια είναι ίδιο με αυτό των εξερχομένων)
ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ Η μέση ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα ενός πηνίου με αριθμό σπειρών N λόγω φαινομένου επαγωγής $E_{\text{επ}} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ Η ένταση του επαγωγικού ρεύμα που διαρρέει ένα πηνίο με N σπείρες και ωμικής αντίστασης R λόγω φαινομένου επαγωγής $I_{\text{επ}} = - \frac{N \Delta\Phi}{R \Delta t}$ Εξίσωση επαγωγικού φορτίου (νόμος Newman) $Q_{\text{επ}} = \frac{N\Delta\Phi}{R}$ Σαν επαγωγικό φορτίο ορίζουμε το συνολικό φορτίο που περνά από το πηνίο όσο διαρκεί η μεταβολή της μαγνητικής ροής	Νόμος Faraday: Η μέση ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα ενός πηνίου είναι ανάλογη του ρυθμού με τον οποίο μεταβάλλεται η μαγνητική του ροή και ανάλογη του αριθμού των σπειρών του. $E = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ το μείον (-) στον τύπο ερμηνεύεται από τον κανόνα του Lenz. Κανόνας του Lenz: <u>"Το επαγωγικό ρεύμα έχει τέτοια φορά ώστε να αντιστέκεται στο αίτιο που το προκάλεσε."</u> Ο κανόνας του Lenz αποτελεί συνέπεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας.
ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ - Η εξίσωση που παρέχει το μέτρο της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο $I = I_0 \eta \mu(\omega t + \phi)$ Αν την χρονική στιγμή $t=0$ η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος είναι μηδέν, τότε $\phi=0$ και $I = I_0 \eta \mu \omega t$ - Η εξίσωση που παρέχει την εναλλασσόμενη τάση σε συνάρτηση με το χρόνο $U = U_0 \eta \mu(\omega t + \phi)$ Αν την χρονική στιγμή $t=0$ η εναλλασσόμενη τάση είναι μηδέν, τότε $\phi=0$ και $U = U_0 \eta \mu \omega t$	I = η στιγμιαία τιμή της έντασης τη χρονική στιγμή t I₀ = η μέγιστη τιμή της έντασης που ονομάζεται πλάτος U = η στιγμιαία τιμή της τάσης τη χρονική στιγμή t U₀ = η μέγιστη τιμή της τάσης που ονομάζεται πλάτος $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ = η κυκλική συχνότητα μεταβολής του ρεύματος που μετριέται σε rad/sec. f = η γραμμική συχνότητα μεταβολής που μετριέται σε Hz και ορίζεται ως ο αριθμός των πληρών εναλλαγών τιμών της έντασης που γίνονται σε χρόνο t προς το χρόνο αυτό. T = η περίοδος (σε sec) και ορίζεται ως ο χρόνος για να γίνει μια πλήρης εναλλαγή τιμών της έντασης $(\omega t + \phi)$ = φάση (σε rad) γωνία που διαρκώς αυξάνεται με το χρόνο και της οποίας το ημίτονο κάθε χρονική στιγμή ισούται με το λόγο της στιγμιαίας τιμής προς το πλάτος φ = αρχική φάση (σε rad) γωνία ανεξάρτητη χρόνου και της οποίας το ημίτονο τη χρονική στιγμή $t=0$ ισούται με το λόγο της στιγμιαίας τιμής προς το πλάτος.
ΕΝΕΡΓΟΣ ΕΝΤΑΣΗ ΚΑΙ ΤΑΣΗ Ενεργός ένταση εναλλασσόμενου ρεύματος $I_{\text{επ}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ Ενεργός τάση εναλλασσόμενου ρεύματος $U_{\text{επ}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$	Ενεργός ένταση εναλλασσόμενου ρεύματος ονομάζουμε την τιμή συνεχούς ρεύματος το οποίο όταν περάσει από την ίδια αντίσταση στον ίδιο χρόνο θα προκαλέσει τα ίδια θερμικά αποτελέσματα με αυτά που προκαλεί το εναλλασσόμενο. Ενεργός τάση ονομάζουμε τη συνεχή τάση η οποία δίνει ρεύμα ίδιο με την ενεργό τιμή του εναλλασσόμενου ρεύματος.

ΙΣΧΥΣ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

η μέση ισχύς εναλλασσόμενου ρεύματος που καταναλώνεται από έναν αντιστάτη δίδεται από τη σχέση

$$P = I_{\text{ev}}^2 R = \frac{U_{\text{ev}}^2}{R}$$

U_{ev} , I_{ev} οι ενεργές τιμές τάσης και έντασης και R η ωμική αντίσταση του αντιστάτη

Στα συνεχή ρεύματα η ισχύς δίδεται από τον τύπο $P=VI$ όπου V η συνεχής τάση και I η ένταση του συνεχούς ρεύματος.

Στα εναλλασσόμενα ρεύματα επειδή τα U και I μεταβάλλονται με το χρόνο η στιγμιαία ισχύς θα είναι συνάρτηση του χρόνου, επειδή όμως η ισχύς σε μέγεθος θέλουμε να είναι ανεξάρτητη του χρόνου αντί της στιγμιαίας ισχύος χρησιμοποιούμε τη μέση ισχύ η οποία ισούται με το πηλίκο της ενέργειας W που καταναλώνει το κύκλωμα σε χρόνο μιας περιόδου προς το χρόνο αυτό,

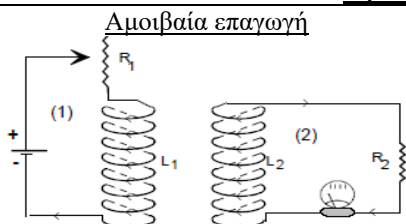
$$\text{δηλαδή } P = \frac{W}{T}$$

Διαφορές και πλεονεκτήματα εναλλασσόμενου ρεύματος απέναντι συνεχούς

- 1) Η φορά του εναλλασσόμενου ρεύματος μεταβάλλεται περιοδικά με το χρόνο ενώ του συνεχούς παραμένει σταθερή.
- 2) Η εναλλασσόμενη τάση δεν προκαλεί ηλεκτρόλυση ενώ η συνεχής προκαλεί.
- 3) Το εναλλασσόμενο ρεύμα δε φορτίζει τους συσσωρευτές ενώ το συνεχές τους φορτίζει.
- 4) Οι μετασχηματιστές λειτουργούν με εναλλασσόμενα ρεύματα και όχι με συνεχή.
- 5) Το εναλλασσόμενο ρεύμα διαρρέει κυκλώματα που περιέχουν πυκνωτές ενώ το συνεχές δεν τα διαρρέει.
- 6) Τα πηνία όταν διαρρέονται από εναλλασσόμενα ρεύματα παρουσιάζουν και επαγωγική και ωμική αντίσταση ενώ όταν διαρρέονται από συνεχή παρουσιάζουν μόνο ωμική.
- 7) Όταν ένας αγωγός διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα τότε δημιουργεί γύρω του ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ενώ όταν διαρρέεται από συνεχές προκαλεί μόνο μαγνητικό.

- 1) Η λειτουργία των μετασχηματιστών γίνεται μόνο με εναλλασσόμενο ρεύμα και επειδή με τους μετασχηματιστές μπορούμε να μεταφέρουμε ηλεκτρική ενέργεια υπό μεγάλη τάση και να την υποβιβάσουμε στον τόπο κατανάλωσης εξασφαλίζουμε οικονομία στην μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας

- 2) Οι ηλεκτρικές μηχανές εναλλασσόμενου ρεύματος είναι πιο απλές πιο οικονομικές και έχουν μεγαλύτερο συντελεστή απόδοσης έναντι του συνεχούς.

Αμοιβαία επαγωγή - Αυτεπαγωγή

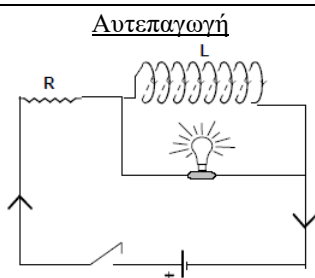
Μεταβάλλοντας την ένταση στο πηνίο (1) τότε το γαλβανόμετρο στο πηνίο (2) δείχνει κάποια ένδειξη δηλαδή εμφανίζεται στα άκρα του πηνίου (2) μια ηλεκτρεγερτική δύναμη ΗΕΔ που ονομάζεται ΗΕΔ από αμοιβαία επαγωγή.

Νόμος αμοιβαίας επαγωγής:

Η ΗΕΔ επαγωγής που αναπτύσσεται στο πηνίο (2) κατά το φαινόμενο αμοιβαίας επαγωγής είναι ανάλογη του ρυθμού μεταβολής της έντασης του ρεύματος του άλλου πηνίου δηλαδή

$$E_2 = -M \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \quad \text{όπου } M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{\ell}$$

Το μείον ερμηνεύεται από τον κανόνα του Lenz και το M ονομάζεται συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής ο οποίος εξαρτάται από τα γεωμετρικά στοιχεία των πηνίων (μήκος, αριθμός σπειρών, εμβαδόν σπείρας), τη μαγνητική διαπερατότητα του υλικού και τη σχετική θέση μεταξύ των δυο πηνίων.



Αν διακόψουμε ξαφνικά το ρεύμα στο κύκλωμα τότε παρατηρούμε ότι η λάμπα αντί να σβήσει φωτοβολεί πιο ζωηρά και μετά σβήνει.

Νόμος αυτεπαγωγής:

Η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα ενός πηνίου είναι ανάλογη του ρυθμού με τον οποίο μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος στο ίδιο το πηνίο δηλαδή

$$E_{\text{αυτ}} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad \text{όπου } L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}$$

Το μείον (-) ερμηνεύεται από τον κανόνα του Lenz και το L ονομάζεται συντελεστής αυτεπαγωγής ο οποίος εξαρτάται από τα γεωμετρικά στοιχεία του πηνίου και από τη μαγνητική διαπερατότητα.

Ενέργεια U μαγνητικού πεδίου στο πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L όταν διαρρέεται από ρεύμα I

$$U = \frac{1}{2} LI^2$$

1. Ο μαγνητισμός (εισαγωγικές έννοιες)

Οι αρχικές παρατηρήσεις πάνω στα μαγνητικά φαινόμενα ήταν δύο

- α) η ελκτική δυνατότητα του μαγνητόλιθου (ορυκτό μαγνητίτης) και
- β) ο προσανατολισμός ενός ελεύθερου ραβδομαγνήτη προς τον βορρά.

Οι παρατηρήσεις αυτές έγιναν για πρώτη φορά από τους Κινέζους και τους Έλληνες όπου οι πρώτοι τις αξιοποίησαν και κατασκεύασαν την «πυξίδα» ενώ οι δεύτεροι δεν έδωσαν ιδιαίτερη σημασία.

Για την ερμηνεία του φαινομένου ότι η πυξίδα έδειχνε διαρκώς τον βορρά, οι ευρωπαίοι κατ το τέλος του μεσαίωνα έλεγαν ότι «οφειλότανε στον πολικό αστέρα δηλαδή ότι το άστρο αυτό είχε την ιδιότητα να ασκεί έλξη σε όλες τις πυξίδες».

Στην σύγχρονη εποχή ο William Gilbert είπε ότι ο προσανατολισμός της μαγνητικής βελόνας οφείλεται στην Γη η οποία συμπεριφέρεται σαν ένας τεράστιος μαγνήτης. Για να ενισχύσει την άποψη του κατασκεύασε και ένα μεγάλο σφαιρικό μαγνήτη που ονόμασε *terrella* (μικρή Γη) και έδειξε ότι η μαγνητική βελόνη όταν βρισκόταν κοντά του προσανατολιζότανε με τον ίδιο τρόπο με αυτόν που προσανατολιζόταν πάνω στη Γη.

Οι ιδιότητες των μαγνητών

Με απλά πειράματα μπορούμε να επαληθεύσουμε τις παρακάτω ιδιότητες που παρουσιάζουν οι μαγνήτες

α) Οι μαγνήτες έλκουν ορισμένα υλικά τα οποία ονομάζονται Σιδηρομαγνητικά. Τέτοια υλικά είναι αυτά που περιέχουν σίδηρο, χάλυβα, νικέλιο, κοβάλτιο και κάποια κράματα. Σε αντίθεση οι μαγνήτες δεν έλκουν το αλουμίνιο τον άργυρο το μόλυβδο το χαλκό και τους μονωτές.

β) Οι μαγνήτες αλληλεπιδρούν μεταξύ τους ασκώντας ο ένας στον άλλο έλξεις ή απώσεις. Στους ραβδόμορφους μαγνήτες οι αλληλεπιδράσεις εμφανίζονται ιδιαίτερα στα άκρα τους ενώ στο μέσον έχουμε την ουδέτερη ζώνη όπου δεν παρουσιάζει μαγνητικές ιδιότητες.

γ) Οι μαγνήτες προσανατολίζονται έτσι ώστε, αν κρεμάσουμε ένα μαγνήτη, το ένα άκρο του να μας δείχνει πάντα το Βορρά και το άλλο το νότο.

δ) Είναι αδύνατο να απομονώσουμε τους μαγνητικούς πόλους. Αν τεμαχίσουμε σε οποιαδήποτε θέση ένα μαγνήτη, μετά τον τεμαχισμό θα προκύψουν πάλι μαγνήτες έχοντας δύο πόλους βόρειο (N) και νότιο (S).

ε) Οι μαγνήτες μπορούν και μαγνητίζουν ορισμένα αντικείμενα. Η διαδικασία μετατροπής των σωμάτων σε μαγνήτες ονομάζεται μαγνήτιση. Η μαγνήτιση μπορεί να γίνει είτε με επαφή είτε με επαγωγή (από απόσταση). Αναλόγως του υλικού που μαγνητίζεται η μαγνήτιση μπορεί να είναι προσωρινή (μαλακός σίδηρος) ή μόνιμη (χάλυβας)

στ) Οι μαγνήτες αλληλεπιδρούν με ηλεκτρικά φορτία εφόσον και μόνο εφόσον βρίσκονται σε σχετική κίνηση Δηλαδή οι μαγνήτες αλληλεπιδρούν με κινούμενα ηλεκτρικά φορτία ενώ δεν αλληλεπιδρούν με ακίνητα ηλεκτρικά φορτία.

Οι θεωρίες ερμηνείας του μαγνητισμού

Οι θεωρίες που στο παρελθόν εξυπηρέτησαν τους φυσικούς για να ερμηνεύσουν την συμπεριφορά των μαγνητών ήταν

α) Η θεωρία των δύο πόλων

Η θεωρία αυτή δέχεται ότι κάθε μαγνήτης έχει οπωσδήποτε δύο πόλους τον βόρειο και τον νότιο.

Η έλξη οφείλεται στην αλληλεπίδραση ετερωνύμων πόλων και η άπωση σε ομώνυμους (ανάλογο με αυτό που ισχύει στα δύο είδη ηλεκτρικού φορτίου). Όταν προσανατολιστεί ο ραβδόμορφος μαγνήτης τότε το άκρο που βλέπει στον βορρά ονομάζεται βόρειος πόλος (N) και το άλλο νότιος (S).

β) Η θεωρία των μαγνητικών ποσοτήτων

Η θεωρία αυτή δέχεται ότι στο άκρο κάθε μαγνήτη είναι συγκεντρωμένη ποσότητα μαγνητισμού σαν κάποιο είδος «μαγνητικού φορτίου». Υπάρχουν δύο τύποι μαγνητικών ποσοτήτων, η θετική (βόρεια) και η αρνητική (νότια), δηλαδή κάτι ανάλογο με αυτό που ισχύει για τα δύο είδη ηλεκτρικού φορτίου. Στο άκρο κάθε μαγνήτη υπάρχουν ίσες και αντίθετες μαγνητικές ποσότητες, δηλαδή η βόρεια ποσότητα που υπάρχει στο βόρειο πόλο του μαγνήτη είναι ίση με την νότια που υπάρχει στο νότιο πόλο του μαγνήτη.

Σήμερα η ερμηνεία του μαγνητισμού γίνεται με την θεωρία των πεδίων και τις έννοιες του ηλεκτρικού φορτίου και της κίνησης, ενώ η έννοια της μαγνητικής ποσότητας έχει εγκαταλειφθεί.

2. ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Ανάλογα με το ηλεκτρικό πεδίο μπορούμε να ορίσουμε το μαγνητικό πεδίο

Μαγνητικό πεδίο είναι ο χώρος στον οποίο όταν τοποθετηθεί μία μαγνητική βελόνη (μαγνητικό δίπολο) θα ασκηθούν πάνω της μαγνητικές δυνάμεις με αποτέλεσμα να προσανατολιστεί προς μία κατεύθυνση.

Σαν πηγή μαγνητικού πεδίου μπορούμε να θεωρήσουμε ένα μαγνητικό δίπολο ή ένα κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο (ή γενικότερα ένα ηλεκτρικό ρεύμα)

Για την ανίχνευση ύπαρξης ενός μαγνητικού πεδίου (υπόθεμα) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε ένα μαγνητικό δίπολο είτε ένα κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο είτε έναν ρευματοφόρο αγωγό.

Ένταση μαγνητικού πεδίου

Ανάλογα με την ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου ορίζουμε την ένταση B στο μαγνητικό πεδίο ή μαγνητική επαγωγή B .

Η B εκφράζει το πόσο ισχυρό ή ασθενές είναι το μαγνητικό πεδίο. (μεγάλες τιμές της B δηλώνουν ότι το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή αυτή είναι ισχυρό και μικρές ασθενές)

Η διεύθυνση της έντασης B σ' ένα σημείο του μαγνητικού πεδίου είναι εφαπτόμενη στην μαγνητική δυναμική γραμμή που διέρχεται από το σημείο αυτό και η φορά της είναι ίδια με την φορά της δυναμικής γραμμής.

Η μονάδα έντασης για το μαγνητικό πεδίο στο SI σύστημα είναι το ένα το 1T (Tesla)

Επίσης η μαγνητική επαγωγή ορίζεται με βάση τις μαγνητικές δυνάμεις που ασκούνται στους ρευματοφόρους αγωγούς (νόμος Laplace).

Μαγνητικές δυναμικές γραμμές (Μαγνητικό φάσμα)

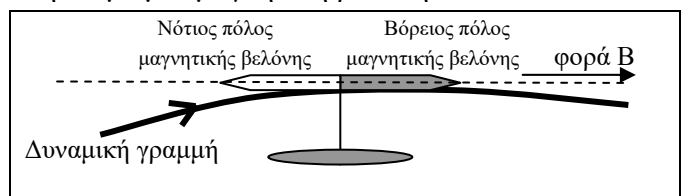
Μαγνητικό φάσμα ονομάζουμε το σύνολο των μαγνητικών δυναμικών γραμμών.

Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές είναι οι γραμμές που το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής B σε κάθε σημείο της είναι εφαπτόμενο. Η φορά των δυναμικών γραμμών είναι ίδια με την φορά της B .

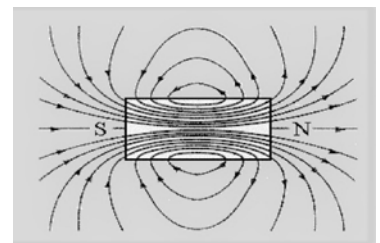
Πειραματικά το μαγνητικό φάσμα μπορεί να παρατηρηθεί αν στο πεδίο τοποθετηθούν ρινίσματα σιδήρου, τα οποία λόγω των μαγνητικών δυνάμεων, θα προσανατολιστούν πάνω σε γραμμές που θα είναι οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές.

Επίσης πειραματικά μπορούμε να βρούμε την διεύθυνση και την φορά μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής σε ένα σημείο, αν στο σημείο αυτό τοποθετήσουμε μια μαγνητική βελόνη.

- Η διεύθυνση της μαγνητικής βελόνης θα είναι εφαπτόμενη στην δυναμική γραμμή που διέρχεται από το σημείο και ο βόρειος πόλος της βελόνης θα καθορίζει την φορά της B όπως στο σχήμα. Σε σύμβαση ορίζουμε βόρειο πόλο μιας μαγνητικής βελόνης τον πόλο της βελόνης που δείχνει τον γεωγραφικό γήινο βορρά και όχι τον μαγνητικό βορρά.



- Σε περιοχή έξω από τον μαγνήτη, οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές προέρχονται από τον βόρειο πόλο (N) και πηγαινούν προς τον νότιο (S) πόλο του μαγνήτη. Σε περιοχή μέσα στον μαγνήτη η φορά είναι από τον νότιο (S) προς τον βόρειο πόλο (N) του μαγνήτη.
- Οι δυναμικές γραμμές δεν τέμνονται ούτε εφάπτονται μεταξύ τους.
- Η πυκνότητα των μαγνητικών δυναμικών γραμμών καθορίζει το μέτρο της έντασης B του μαγνητικού πεδίου. Δηλαδή σε περιοχές που δυναμικές γραμμές είναι πιο πυκνές αντιστοιχούν μεγάλες τιμές της έντασης ενώ σε περιοχές που είναι αραιές αντιστοιχούν μικρές τιμές της B .
- Στο μαγνητικό πεδίο δεν μπορεί να βρεθεί μόνο ένας τύπος πόλου μαγνήτη αλλά πάντα εμφανίζονται και οι δύο τύποι πόλων. Λόγω της ύπαρξης μαγνητικών δίπολων και όχι μονόπολων οι δυναμικές γραμμές σε οποιοδήποτε μαγνητικό πεδίο είναι πάντα κλειστές, σε αντίθεση με το ηλεκτρικό πεδίο που είναι ανοιχτές, αυτό αποτελεί και μια σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο πεδίων.



Που οφείλονται οι μαγνητικές ιδιότητες των σωμάτων

Αν πάρουμε ένα μεταλλικό έλασμα που παρουσιάζει μαγνητικές ιδιότητες, τότε θα παρατηρήσουμε ότι αυτό έχει δύο μαγνητικούς πόλους. Αν τώρα κόψουμε το έλασμα τότε, ανεξάρτητα σε ποιο σημείο το κόβουμε, σε κάθε κομμάτι του ελάσματος θα υπάρχουν πάλι δυο μαγνητικοί πόλοι. Αν συνεχίσουμε τον τεμαχισμό θα παρατηρήσουμε ανεξάρτητα από το μέγεθος του τμήματος του ελάσματος, σε κάθε τμήμα θα υπάρχουν και οι δύο μαγνητικοί πόλοι.

Δηλαδή δεν μπορούμε να απομονώσουμε τον ένα πόλο αλλά πάντα θα εμφανίζονται και οι δύο πόλοι. Τα παραπάνω μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι κάθε υλικό που παρουσιάζει μαγνητικές ιδιότητες αποτελείται από στοιχειώδεις μαγνήτες (**στοιχειώδη μαγνητικά δίπολα**). Οι στοιχειώδης αυτοί μαγνήτες είναι τα άτομα του υλικού.

Η ύπαρξη στοιχειωδών μαγνητικών διπόλων, οφείλεται αφενός στην περιστροφή του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα αφετέρου στην περιστροφή γύρω από τον άξονα του.(ιδιοπεριστροφή).

Μέσα στα μαγνητικά υλικά υπάρχουν περιοχές εύρους 10^{-3}mm που περιέχουν 10^{10} άτομα (στοιχειώδεις μαγνήτες) που συμπεριφέρονται σαν μόνιμοι μαγνήτες και ονομάζονται **μαγνητικές περιοχές**.

Όταν το υλικό δεν παρουσιάζει μαγνητικές ιδιότητες τότε οι μαγνητικές περιοχές είναι άτακτα προσανατολισμένες ενώ όταν το υλικό παρουσιάζει μαγνητικές ιδιότητες τότε είναι προσανατολισμένες ομοιόμορφα.

Τρόποι απομαγνήτισης υλικών

Ένα υλικό που παρουσιάζει μαγνητικές ιδιότητες μπορεί να απομαγνητιστεί είτε **με θέρμανση** υπερβαίνοντας την θερμοκρασία Curie είτε **με σφυρηλάτηση**

Θερμοκρασία Curie είναι η θερμοκρασία που αν ένα υλικό την υπερβεί τότε οι μαγνητικές περιοχές χάνουν τον προσανατολισμό τους.

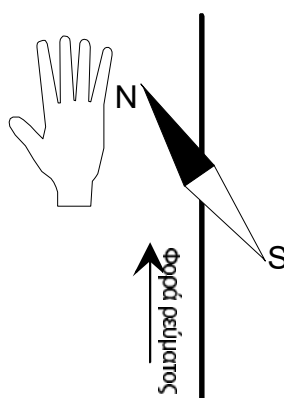
Ένα υλικό μπορεί επίσης να απομαγνητιστεί **με σφυρηλάτηση**. Με την σφυρηλάτηση καταστρέφεται η διάταξη των μαγνητικών περιοχών με αποτέλεσμα το υλικό να απομαγνητιστεί

Τρόποι μαγνήτισης υλικών

Ένα υλικό μπορεί να μαγνητιστεί είτε **με επαφή**, είτε **με επαγωγή**, είτε **με τριβή** και με τους τρεις τρόπους επιτυγχάνεται ο προσανατολισμός των μαγνητικών περιοχών του υλικού με αποτέλεσμα το υλικό να παρουσιάζει μαγνητικές ιδιότητες

3. ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΡΕΥΜΑ ΩΣ ΠΗΓΗ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Το πείραμα Oersted



Ο Δανός Hans Christian Oersted έκανε το εξής πείραμα, με το οποίο απέδειξε τα μαγνητικά αποτελέσματα του ηλεκτρικού ρεύματος. Τοποθέτησε μία μαγνητική βελόνη δίπλα σε ένα αγωγό και παρατήρησε ότι όταν πέρασε ρεύμα μέσα από τον αγωγό, η βελόνη άλλαξε τον προσανατολισμό της. Αν τοποθετηθεί η βελόνη παράλληλα στον ρευματοφόρο αγωγό, τότε ο βόρειος πόλος της θα αποκλίνει προς την μεριά του αντίχειρα, όταν η παλάμη του δεξιού χεριού μας, τοποθετηθεί πάνω από τον αγωγό, ώστε τα δάκτυλά μας να δείχνουν την φορά του ρεύματος.

Το συμπέρασμα που βγαίνει από το πείραμα Oersted (Ερστεντ), είναι ότι το ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργεί μαγνητικό πεδίο.

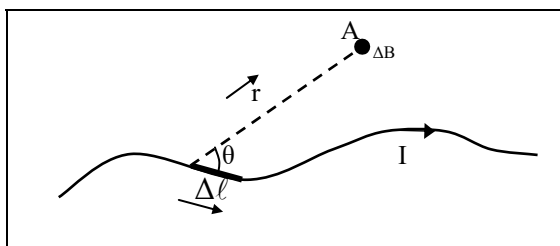
Το αποτέλεσμα του πειράματος Oersted ήταν ότι: **οποιοσδήποτε ρευματοφόρος αγωγός δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο.**

Από την εργαστηριακή έρευνα, προκύπτει ότι η ένταση σ' ένα σημείο του μαγνητικού πεδίου που προκαλεί ένας ρευματοφόρος αγωγός εξαρτάται:

- 1) από την θέση του σημείου, που αναφέρεται η ένταση και
- 2) από την γεωμετρία (σχήμα, μορφή, μέγεθος) του αγωγού

Νόμος Biot-Savart

Στηριζόμενοι στην πειραματική έρευνα οι φυσικοί Jean-Baptiste Biot και Félix Savart διατύπωσαν ένα νόμο (σχέση) που μπορούμε να υπολογίσουμε την στοιχειώδη μαγνητική επαγωγή (ένταση) ΔB του μαγνητικού πεδίου που προκαλεί ένα στοιχειώδες τμήμα, μήκους $\Delta \ell$, ρευματοφόρου αγωγού ο οποίος διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I , σ ένα τυχαίο σημείο A .



Η σχέση αυτή είναι η $\Delta B = K_{\mu} \frac{I \Delta \ell \sin \theta}{r^2}$ ή για το κενό και

το SI σύστημα μονάδων $\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta \ell \sin \theta}{r^2}$ όπου

- r η απόσταση του στοιχειώδους μήκους $\Delta \ell$, του ρευματοφόρου αγωγού, από το σημείο A που αναφέρεται η στοιχειώδης μαγνητική επαγωγή ΔB
- θ η γωνία που σχηματίζει η κατεύθυνση του $\Delta \ell$ με την διεύθυνση της απόστασης r . Ως φορά της κατεύθυνσης του $\Delta \ell$ ορίζουμε την φορά του ρεύματος I , ως φορά του διανύσματος της απόστασης r ορίζουμε την φορά από τον αγωγό προς το σημείο A .
- K_{μ} μια σταθερά του μαγνητικού πεδίου που για το SI σύστημα μονάδων και για το κενό

$$K_{\mu} = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \quad \text{και} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$$

Το διάνυσμα ΔB στο A έχει σημείο εφαρμογής το A , διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από το r και το $\Delta \ell$ και η φορά του βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίου. Η φορά του ΔB είναι ίδια με την φορά που πρέπει να περιστραφεί δεξιόστροφος κοχλίας για να προχωρήσει κατά μήκος του $\Delta \ell$ και κατά την φορά του ρεύματος. (στο σχήμα έχει φορά προς τον αναγνώστη)

Όπως αναφέρθηκε με τον νόμο Biot-Savart μπορούμε να υπολογίσουμε την στοιχειώδη μαγνητική επαγωγή (ένταση) ΔB του μαγνητικού πεδίου που προκαλεί ένα στοιχειώδες τμήμα ρευματοφόρου αγωγού, σ ένα σημείο A .

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την συνολική μαγνητική επαγωγή B του μαγνητικού πεδίου που προκαλεί ολόκληρος ο ρευματοφόρος αγωγός στο σημείο A , τότε για τον υπολογισμό της, αθροίζουμε τις στοιχειώδεις μαγνητικές επαγωγές $\Delta B_1, \Delta B_2, \dots, \Delta B_N$, που προκαλούν τα στοιχειώδη τμήματα $\Delta \ell_1, \Delta \ell_2, \dots, \Delta \ell_N$ που αποτελούν τον ρευματοφόρο αγωγό δηλαδή $\vec{B} = \vec{\Delta B}_1 + \vec{\Delta B}_2 + \dots + \vec{\Delta B}_N$

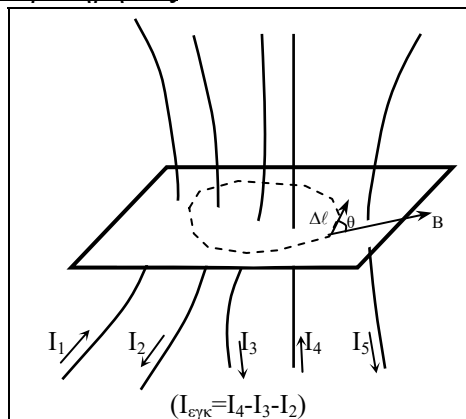
Το άθροισμα αυτό απαιτεί χρήση ολοκληρωμάτων, μαθηματικά που δεν είναι στην εξεταστέα ύλη, οπότε ο τρόπος αυτός δεν ανήκει στην εξεταστέα ύλη αλλά θα πρέπει να γνωρίζουμε μόνο το τελικό αποτέλεσμα στους ρευματοφόρους αγωγούς α) ευθύγραμμο β) κυκλικό γ) σωληνοειδές

Νόμος Ampere

Ο Ampere αξιοποιώντας την συμμετρία, διατύπωσε ένα νόμο (σχέση), με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε την ένταση των μαγνητικών πεδίων που εμφανίζουν συμμετρία. Μία απλή διατύπωση του νόμου είναι:

Κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής το άθροισμα των γινομένων $B \cdot \Delta \ell \cdot \sin \theta$ είναι ίσο με $\mu_0 \cdot I_{\text{εγκ}}$ όπου $I_{\text{εγκ}}$ το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που διέρχονται από την επιφάνεια που περικλείεται από την κλειστή διαδρομή.

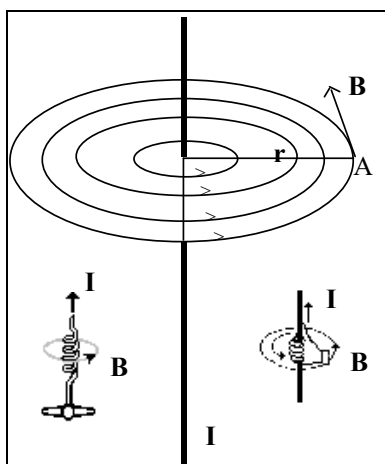
Μαθηματική διατύπωση για το κενό και το SI $\boxed{\sum B \cdot \Delta \ell \cdot \sin \theta = \mu_0 I_{\text{εγκ}}}$.

Παρατηρήσεις

- Στο άθροισμα $\sum B \cdot \Delta \ell \cdot \sin \theta$ το B είναι η συνολική ένταση του μαγνητικού πεδίου στην περιοχή του στοιχειώδους μήκους $\Delta \ell$ που προκαλείται από όλους τους ρευματοφόρους αγωγούς είτε περιέχονται στο βρόχο, που ορίζει η κλειστή διαδρομή, είτε όχι.
- θ η γωνία που σχηματίζει η μαγνητική επαγωγή (ένταση) B , του μαγνητικού πεδίου, με την διεύθυνση του διανύσματος του στοιχειώδους μήκους $\Delta \ell$.
- Στον όρο $\mu_0 \cdot I_{\text{εγκ}}$ το μ_0 είναι η μαγνητική διαπερατότητα του κενού του μαγνητικού πεδίου και $I_{\text{εγκ}}$ είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που περιέχονται

στον βρόχο, που ορίζει η κλειστή διαδρομή που αναφέρεται ο νόμος. Τα ρεύματα που δεν είναι μέσα στον βρόχο δεν υπολογίζονται στο άθροισμα $I_{\text{εγκ}}$.

- Για το πρόσημο κάθε ρεύματος, που αναφέρεται στο άθροισμα $I_{\text{εγκ}}$, χρησιμοποιούμε τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίου ή δεξιού χεριού. Θεωρούμε θετική φορά του ρεύματος την φορά που προχωράει δεξιόστροφος κοχλίας όταν περιστραφεί κατά την φορά που διαγράφουμε την κλειστή διαδρομή.
- Ο νόμος ισχύει μόνο για σταθερά ρεύματα και για χρονικά σταθερά μαγνητικά πεδία που προκαλούν ρευματοφόροι αγωγοί.

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ ΡΕΥΜΑΤΟΦΟΡΟ ΑΓΩΓΟΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΜΗΚΟΥΣ:**α) Μαγνητικό φάσμα:**

Το μαγνητικό πεδίο που προκαλεί ένας ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός απείρου μήκους είναι ανομοιογενές.

Ι) Οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο πάνω στον αγωγό και επίπεδο κάθετο σ' αυτόν.

ΙΙ) Η φορά των δυναμικών γραμμών είναι ίδια με τη φορά που πρέπει να περιστρέψουμε δεξιόστροφο κοχλίας, για να προχωρήσει κατά μήκος του αγωγού και κατά τη φορά του ρεύματος.

β) Μαγνητική επαγωγή

Η μαγνητική επαγωγή B σε ένα σημείο (Α) που απέχει απόσταση r από το ρευματοφόρο αγωγό παριστάνεται με ένα διάνυσμα που έχει:

Ι) **Μέτρο** που δίδεται από τη σχέση

$$B = K_\mu \frac{2I}{r} \quad \text{ή για το κενό και το SI} \quad \boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r}}$$

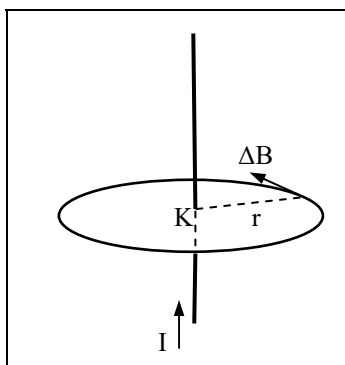
όπου I η ένταση του ρεύματος, r η απόσταση του σημείου από τον αγωγό και K_μ σταθερά του μαγνητικού πεδίου

ΙΙ) **Διεύθυνση** που είναι εφαπτόμενη στη δυναμική γραμμή που διέρχεται από το σημείο Α.

ΙΙΙ) **Φορά** που είναι ίδια με τη φορά της δυναμικής που διέρχεται από το σημείο Α.

******Η θεώρηση ότι ο αγωγός έχει άπειρο μήκος σημαίνει ότι η απόσταση r του σημείου A είναι πολύ μικρότερη του μήκους του αγωγού.

Απόδειξη της σχέσης $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r}$ για ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό (εφαρμογή νόμου Ampere)



Έστω ευθύγραμμος αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα I και μία κυκλική διαδρομή ακτίνας r που έχει επίπεδο κάθετο στον αγωγό και στο κέντρο της K διέρχεται ο αγωγός.

Χωρίζουμε την κλειστή κυκλική σε πολλές N στοιχειώδεις με μήκη $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_N$ έτσι ώστε $\Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots + \Delta l_N = 2\pi r$

Η μαγνητική επαγωγή B που αντιστοιχεί σε κάθε στοιχειώδες τμήμα Δl είναι εφαπτόμενη στην κυκλική διαδρομή δηλαδή σχηματίζει γωνία $\theta = 90^\circ$ με το r .

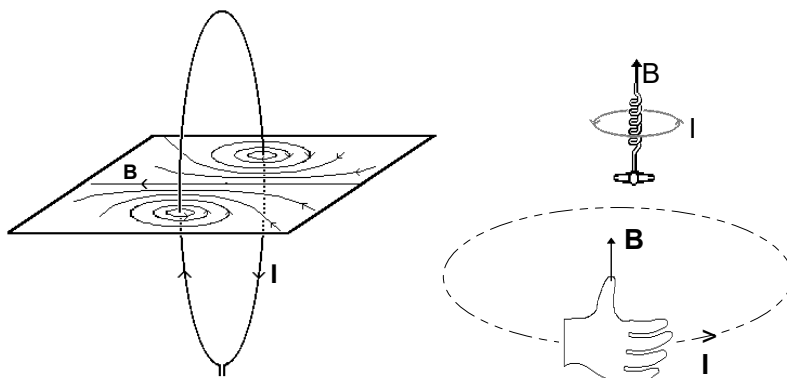
Αν εφαρμόσουμε τον νόμο του Ampere για την κλειστή κυκλική διαδρομή ισχύει

$$\sum B \cdot \Delta l \cdot \sin \theta = \mu_0 I_{\text{εγκ}} \Rightarrow B \cdot \sin 90^\circ (\sum \Delta l) = \mu_0 I \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r}$$

ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΡΕΥΜΑΤΟΦΟΡΟΣ ΑΓΩΓΟΣ:

α) Μαγνητικό φάσμα

Το μαγνητικό πεδίο που προκαλεί ένας κυκλικός ρευματοφόρος αγωγός είναι ανομοιογενές.



I) Το φάσμα των μαγνητικών δυναμικών γραμμών του παριστάνεται με καμπύλες που είναι κάθετες στο επίπεδο του αγωγού και καθώς πλησιάζουν προς το κέντρο του τείνουν σε ευθεία (βλέπε σχήμα) που ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας του.

II) Η φορά τους είναι ίδια με τη φορά που προχωράει δεξιόστροφος κοχλίας όταν τοποθετηθεί κάθετα στο επίπεδο του αγωγού και στραφεί κατά τη φορά του ρεύματος.

β) Μαγνητική επαγωγή B στο κέντρο του

Η μαγνητική επαγωγή B , στο κέντρο κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού, είναι ένα διάνυσμα που έχει:

I) **Διεύθυνση** κάθετη στο επίπεδο του κυκλικού αγωγού και

II) **Φορά** ίδια με αυτή που προχωράει δεξιόστροφος κοχλίας, όταν τοποθετηθεί κάθετα στο επίπεδο του αγωγού και στραφεί κατά τη φορά του ρεύματος.

Δηλαδή η διεύθυνση και η φορά της μαγνητικής επαγωγής στο κέντρο του αγωγού, ταυτίζεται με τη φορά και τη διεύθυνση της αξονικής δυναμικής γραμμής που περνά από το κέντρο του.

III) **Μέτρο** που δίδεται από τη σχέση

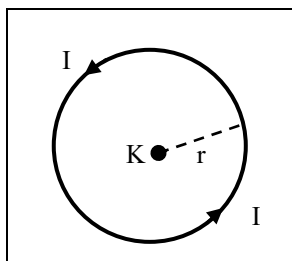
$$B = K_\mu \frac{2\pi I}{r} \quad \text{ή για το κενό και το SI} \quad \boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{r}}$$

όπου I η ένταση του ρεύματος, r η ακτίνα του κυκλικού αγωγού και K_μ η σταθερά του μαγνητικού πεδίου

Στην περίπτωση που ο κυκλικός αγωγός αποτελείται από N σπείρες τότε η B στο κέντρο του θα δίδεται από την σχέση

$$B = N K_{\mu} \frac{2\pi I}{r} \text{ ή για το κενό και το SI } B = N \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{r}$$

Απόδειξη της σχέσης $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{r}$ για κυκλικό ρευματοφόρο αγωγό (εφαρμογή νόμου Biot-Savart)



Έστω κυκλικός αγωγός, ακτίνας r , που διαρρέεται από ρεύμα I και B η συνολική μαγνητική επαγωγή που προκαλεί στο κέντρο του K .

Θεωρούμε ότι ο κυκλικός αγωγός αποτελείται από N στοιχειώδεις με μήκη $\Delta\ell_1, \Delta\ell_2, \dots, \Delta\ell_N$ έτσι ώστε $\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \dots + \Delta\ell_N = 2\pi r$.

Κάθε στοιχειώδες μήκος $\Delta\ell$ προκαλεί, στο κέντρο K του αγωγού, στοιχειώδη μαγνητικές επαγωγές $\Delta B_1, \Delta B_2, \dots, \Delta B_N$, και το μέτρο τους

υπολογίζεται από τον νόμο Biot-Savart $\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta\ell \sin\theta}{r^2}$ όπου η απόστασης r

είναι ίδια για όλα τα στοιχειώδη τμήματα και είναι ίση με την ακτίνα του αγωγού και η γωνία θ που σχηματίζει η κατεύθυνση του $\Delta\ell$ με την διεύθυνση της απόστασης r είναι $\theta=90^\circ$ ($\sin\theta=1$) οπότε

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta\ell}{r^2}.$$

Επειδή τα $\Delta B_1, \Delta B_2, \dots, \Delta B_N$ έχουν την ίδια κατεύθυνση η συνολική B στο κέντρο K θα είναι

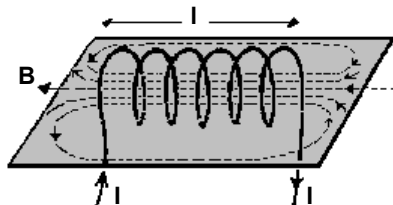
$$B = \Delta B_1 + \Delta B_2 + \dots + \Delta B_N = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \dots + \Delta\ell_N)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi r I}{r^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{r}$$

ΡΕΥΜΑΤΟΦΟΡΟ ΣΩΛΗΝΟΕΙΔΕΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΜΗΚΟΥΣ:

α) Μαγνητικό φάσμα

Το μαγνητικό πεδίο που προκαλεί ρευματοφόρο σωληνοειδές είναι γενικά ανομοιογενές. Στο εσωτερικό του σωληνοειδούς το πεδίο είναι ομογενές.

I) Το φάσμα των μαγνητικών δυναμικών γραμμών στο εξωτερικό του σωληνοειδούς είναι ίδιο με ένα ραβδόμορφο μαγνήτη δηλαδή είναι κλειστές και περνούν όλες από το εσωτερικό του σωληνοειδούς.



Στο εσωτερικό του σωληνοειδούς οι δυναμικές γραμμές είναι παράλληλες ομόρροπες και ισαπέχουσες δηλαδή ίδιες με αυτές του ομογενούς μαγνητικού πεδίου.

II) Η φορά των δυναμικών γραμμών στο εσωτερικό του σωληνοειδούς είναι ίδια με τη φορά που προχωράει δεξιόστροφος κοχλίας όταν τοποθετηθεί κατά μήκος του άξονα του σωληνοειδούς και στραφεί κατά τη φορά του ρεύματος που διαρρέει τις σπείρες του.

β) Μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό του

Στο εσωτερικό του σωληνοειδούς, όπως αναφέρθηκε, το πεδίο θεωρείται ομογενές, οπότε σε κάθε σημείο του εσωτερικού του, η μαγνητική επαγωγή B θεωρείται σταθερή.

I) Το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής B στο εσωτερικό του σωληνοειδούς δίνεται από τη σχέση:

$$B = k_{\mu} 4\pi I \eta^* = k_{\mu} 4\pi I \frac{N}{\ell} \text{ ή για το SI και το κενό } B = \mu_0 I \eta^* = \mu_0 I \frac{N}{\ell}$$

Σε περιοχή κοντά στα άκρα του σωληνοειδούς, αποδεικνύεται ότι η μαγνητική επαγωγή B' , έχει μέτρο περίπου ίσο με το μισό της B που έχει στο εσωτερικό του δηλαδή

$$B' \approx \frac{B}{2} = k_{\mu} 2\pi I \eta^* = k_{\mu} 2\pi I \frac{N}{\ell} \text{ για το SI και το κενό } B' \approx \frac{B}{2} = \frac{\mu_0}{2} I \eta^* = \frac{\mu_0}{2} I \frac{N}{\ell}$$

Όπου I η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το σωληνοειδές, η^* ο αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκους, N ο αριθμός σπειρών του σωληνοειδούς και ℓ το μήκος του σωληνοειδούς.

Αν το σωληνοειδές στο εσωτερικό του περιέχει πυρήνα μαγνητικής διαπερατότητας μ τότε το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής στο εσωτερικό του θα δίδεται από τη σχέση:

$$B = \mu k_{\mu} 4\pi I \eta^* = \mu k_{\mu} 4\pi I \frac{N}{\ell} \text{ ή για το SI } B = \mu \mu_0 I \eta^* = \mu \mu_0 4\pi I \frac{N}{\ell}$$

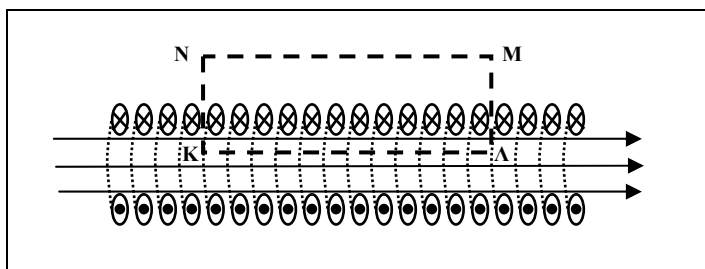
II) Η **διεύθυνση** της μαγνητικής επαγωγής B στο εσωτερικό ρευματοφόρου σωληνοειδούς είναι παράλληλη στον άξονα του σωληνοειδούς.



III) Η **φορά** της μαγνητικής επαγωγής είναι ίδια με τη φορά που προχωράει δεξιόστροφος κοχλίας κατά μήκος του άξονα του πηνίου όταν περιστραφεί κατά τη φορά του ρεύματος που διαρρέει τις σπείρες του.

Το φάσμα, των δυναμικών γραμμών, του μαγνητικού πεδίου που προκαλεί το ρευματοφόρο σωληνοειδές, είναι όμοιο με το φάσμα ενός ραβδόμορφου μαγνήτη. Το ρευματοφόρο σωληνοειδές ονομάζεται και ηλεκτρομαγνήτης, όπου ο βόρειος και νότιος πόλος του, βρίσκεται όπως φαίνεται στο σχήμα, με τον τρόπο που προσδιορίζεται η φορά της μαγνητικής επαγωγής B .

Απόδειξη της σχέσης $B = \mu_0 I n^* = \mu_0 I \frac{N}{\ell}$ για ρευματοφόρο σωληνοειδές (εφαρμογή νόμου Ampere)



Ορίζουμε μια κλειστή διαδρομή ΚΛΜΝ πάνω σε επίπεδο που τέμνει κάθετα τις σπείρες του σωληνοειδούς είναι παράλληλο στις δυναμικές του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του σωληνοειδούς.

Ο βρόχος ΚΛΜΝ τέμνει N σπείρες και κάθε σπείρα διαρρέεται από ρεύμα έντασης I ,

οπότε για το άθροισμα $I_{\text{εγκ}}$ του νόμου Biot - Savart ισχύει $I_{\text{εγκ}} = NI$

Για το άθροισμα $\sum B \cdot \Delta \ell \cdot \cos \theta$ του νόμου Biot – Savart κατά μήκος του βρόχου ΚΛΜΝ ισχύει

- κατά το μήκος ΚΛ του βρόχου ΚΛΜΝ το B είναι παράλληλο στο ΚΛ ($\cos \theta = \cos 0^\circ = 1$).
- κατά μήκος των μηκών ΛΜ και ΝΚ που βρίσκονται μέσα στο μαγνητικό πεδίο το B είναι κάθετο στις διευθύνσεις τους ($\cos \theta = \cos 90^\circ = 0$).
- το τμήμα ΜΝ βρίσκεται εκτός του μαγνητικού πεδίου B που επικρατεί στο εσωτερικό του σωληνοειδούς.

Τελικά εφαρμόζουμε τον νόμο Biot-Savart για την κλειστή διαδρομή ΚΛΜΝ και προκύπτει

$$\sum B \cdot \Delta \ell \cdot \cos \theta = \mu_0 I_{\text{εγκ}} \Rightarrow B(K\Lambda) = \mu_0 NI \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{(K\Lambda)} I \Rightarrow$$

$$B = \mu_0 n^* I \text{ όπου } n^* \text{ ο αριθμός σπειρών ανα μονάδα μήκους.}$$

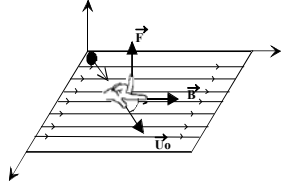
4. Δυνάμεις μαγνητικού πεδίου ως πηγή του μαγνητικού πεδίου μπορεί να θεωρηθεί ένα κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο ή ένας ρευματοφόρος αγωγός ή ένα μαγνητικό δίπολο. Γενικά οι δυνάμεις του μαγνητικού πεδίου θεωρούνται ως μη συντηρητικές εκτός από αυτές που αναπτύσσονται από μόνιμους μαγνήτες

Δύναμη μαγνητικού πεδίου σε κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο (ΔΥΝΑΜΗ Lorentz).

Όταν κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο q , εισέλθει σε ομογενές μαγνητικό πεδίο επαγωγής B με ταχύτητα u_0 τότε ασκείται πάνω του δύναμη που το μέτρο της δίνεται από τη σχέση:

$$F = B u_0 q \eta \mu \phi$$

Όπου ϕ η γωνία που σχηματίζει η κατεύθυνση του u_0 με τις δυναμικές γραμμές.



Η κατεύθυνση της F είναι πάντα κάθετη και στο B και στο u_0 . Για να βρούμε την κατεύθυνση της F χρησιμοποιούμε τον κανόνα των τριών δακτύλων, όπου ο αντίχειρας δείχνει την κατεύθυνση της u_0 , ο δείκτης την κατεύθυνση του B και ο μέσος δάκτυλος την κατεύθυνση της F όταν το φορτίο είναι θετικό.

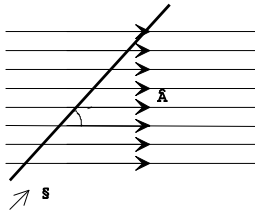
Αν το φορτίο είναι αρνητικό τότε η κατεύθυνση της F είναι αντίθετη από αυτή που δείχνει ο μέσος δάκτυλος.

Δύναμη μαγνητικού πεδίου σε ρευματοφόρο αγωγό (Δύναμη Laplace).

Όταν ένας αγωγός (ρευματοφόρος) βρεθεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο τότε ασκείται πάνω του δύναμη ηλεκτρομαγνητικής φύσεως η οποία υπολογίζεται με βάσει το νόμο Laplace.

Νόμος Laplace: Η δύναμη F που ασκείται σε ένα ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό ο οποίος βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B έχει μέτρο που δίδεται από την σχέση :

$$F = B I L \eta \mu \phi$$



Όπου L το μήκος του αγωγού που βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο και ϕ η γωνία που σχηματίζει ο αγωγός με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου

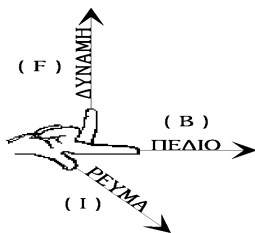
Στην περίπτωση που ο αγωγός είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές η δύναμη Laplace δίδεται από την σχέση $F = B I L$ ενώ αν είναι παράλληλος στις δυναμικές γραμμές η δύναμη μηδενίζεται.

Κατεύθυνση δύναμης Laplace

Η δύναμη Laplace είναι πάντα κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τον αγωγό και το B του μαγνητικού πεδίου, η φορά της μπορεί να βρεθεί είτε από τον κανόνα των τριών δακτύλων είτε με τον κανόνα Gauss είτε από κανόνα δεξιάς παλάμης.

Κανόνας των τριών δακτύλων:

Τοποθετούμε τα τρία δάχτυλα αντίχειρα, δείκτη και μέσο έτσι ώστε να σχηματίζουν ανά δύο ορθή γωνία. Όταν ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του ρεύματος και ο δείκτης τη φορά του B , τότε ο μέσος δείχνει τη φορά της δύναμης.



Κανόνας Gauss:

Η φορά της δύναμης Laplace είναι ίδια με την φορά που προχωράει δεξιόστροφος κοχλίας όταν περιστραφεί, κατά τον συντομότερο δρόμο, από το διάνυσμα $i \vec{L}$ στο διάνυσμα $\vec{B}$

Κανόνας δεξιάς παλάμης:

Αν τοποθετήσουμε την δεξιά παλάμη, με τεντωμένο τον αντίχειρα, ώστε τα τέσσερα δάκτυλα να δείχνουν την φορά των δυναμικών γραμμών και ο αντίχειρας την φορά του ρεύματος, τότε η κατεύθυνση της δύναμης θα είναι κάθετη στην παλάμη και θα έχει φορά από την εξωτερική προς την εσωτερική επιφάνεια της παλάμης.

Ορισμός έντασης μαγνητικού πεδίου:

Χρησιμοποιώντας τη δύναμη Laplace μπορούμε να ορίσουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου θεωρώντας σαν υπόθεμα του πεδίου τον ρευματοφόρο αγωγό.

Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι ίσο με το πηλίκο της δύναμης F που ασκείται από το μαγνητικό πεδίο πάνω σ' ένα ρευματοφόρο αγωγό ο οποίος είναι τοποθετημένος κάθετα στις

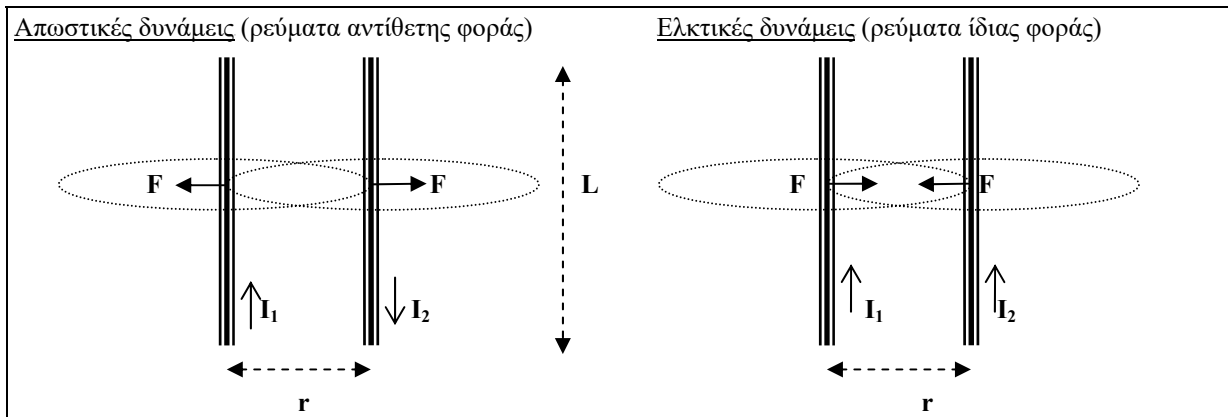
δυναμικές γραμμές του πεδίου, προς το γινόμενο της έντασης του ρεύματος που τον διαρρέει επί το

μήκος του L: $B = \frac{F}{iL}$

Από την ίδια εξίσωση ορίζεται και η μονάδα της έντασης του μαγνητικού πεδίου το Tesla : $1T=1N/Am$

«1Tesla είναι η ένταση ομογενούς μαγνητικού πεδίου, στο οποίο όταν τοποθετηθεί κάθετα στις δυναμικές του γραμμές, ένας αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα έντασης 1A θα ασκείται σε κάθε 1m μήκος του, δύναμη ίση ε 1N »

Δυνάμεις μεταξύ παραλλήλων ευθύγραμμων αγωγών απείρου μήκους



Όταν δύο παράλληλοι ευθύγραμμοι ρευματοφόροι αγωγοί απείρου μήκους βρεθούν σε απόσταση r μεταξύ τους, τότε σε κάθε αγωγό και σε μήκος L , ασκείται δύναμη που το μέτρο της δίδεται από την

σχέση $F = k_{\mu} \frac{2I_1 I_2}{r} L$ ή για το κενό και το SI $F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{r} L$, όπου I_1 και I_2 οι εντάσεις των ρευμάτων που διαρρέουν τους αγωγούς.

Αν τα ρεύματα I_1 και I_2 έχουν την ίδια φορά τότε οι αγωγοί έλκονται, ενώ αν έχουν αντίθετη φορά απωθούνται.

Ορισμός 1A ως μονάδα έντασης ηλεκτρικού ρεύματος

Αν στον τύπο $F = k_{\mu} \frac{2I_1 I_2}{r} L$ θέσουμε $k_{\mu}=10^{-7}N/A^2$, $L=1m$, $r=1m$, $I_1=I_2=1A$ προκύπτει $F=2 \cdot 10^{-7}N$

οπότε ορίζουμε ότι:

«1A είναι η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος, που όταν διαρρέει δύο παράλληλους ευθύγραμμους αγωγούς απείρου μήκους, οι οποίοι βρίσκονται στο κενό και σε απόσταση 1m μεταξύ τους, τότε σε τμήμα μήκους 1m, ασκεί ο ένας αγωγός στον άλλο δύναμη $F=2 \cdot 10^{-7}N$ »

5. Κινήσεις φορτισμένων σωματιδίων σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.

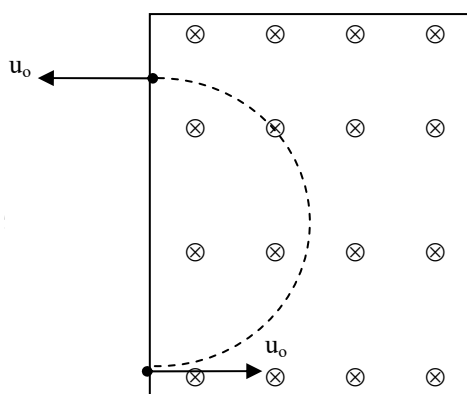
Το είδος της κίνησης που θα εκτελέσει ένα φορτισμένο σωματίδιο όταν μπει με κάποια ταχύτητα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο εξαρτάται τόσο από την κατεύθυνση που έχει η ταχύτητά του όσο και από το είδος του ηλεκτρικού φορτίου του. Σε όλες τις παρακάτω περιπτώσεις θεωρούμε τις βαρυτικές και ηλεκτροστατικές δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο ασήμαντες, δηλαδή η μόνη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι από το ομογενές μαγνητικό πεδίο (ΟΜΠ).

α) Όταν το σωματίδιο εισέρχεται παράλληλα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. ($U_0 \parallel B$)

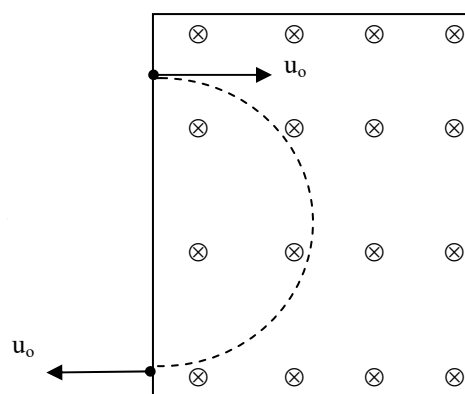


Επειδή $\varphi=0$ ή $\varphi=180^\circ \Rightarrow \eta\mu\varphi=0$ οπότε $F=Bv_0q\eta\mu\varphi=0$. Επομένως στο φορτισμένο σωματίδιο δεν ασκείται δύναμη από το μαγνητικό πεδίο και το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα $U=U_0$, ανεξάρτητα του είδους του φορτίου που έχει.

β) Όταν το σωματίδιο εισέρχεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου ($U_0 \perp B$)



Για θετικό φορτίο $q>0$



Για αρνητικό φορτίο $q<0$

Επειδή $\varphi=90^\circ \Rightarrow \eta\mu\varphi=1$ οπότε $F = Bu_0q$

Η F είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα οπότε δε μπορεί να μεταβάλλει την κινητική ενέργεια του σωματιδίου δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό, ενώ μεταβάλλεται η κατεύθυνση της ταχύτητας.

Επομένως το φορτισμένο σωματίδιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και η δύναμη που ασκεί το μαγνητικό πεδίο ικανοποιεί την κεντρομόλο συνθήκη.

β1) ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΑΣ R ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΤΡΟΧΙΑΣ

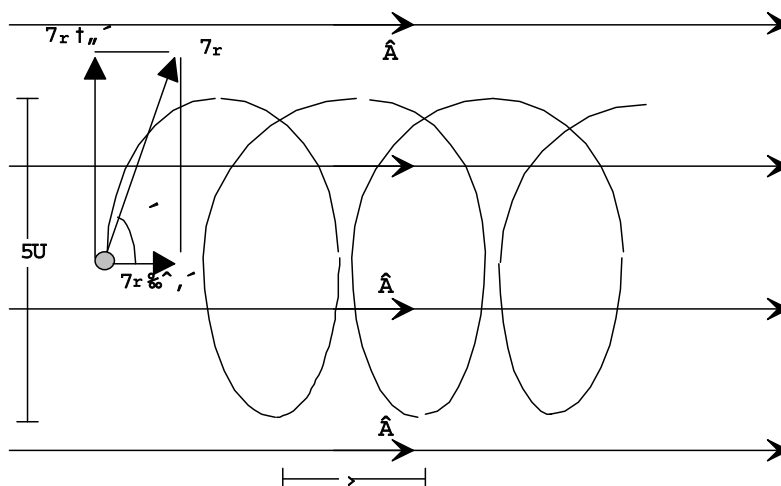
$$F = F_K \Rightarrow Bu_0q = \frac{mu_0^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mu_0}{Bq}$$

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του σωματιδίου εξαρτάται και από την ταχύτητα (u_0) και από το ειδικό φορτίο του σωματιδίου (q/m φορτίο ανά μονάδα μάζας)

β2) ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ Τ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

$$T = \frac{2\pi R}{u_o} \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{Bq}$$

Η περίοδος κίνησης του σωματιδίου είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα αλλά εξαρτάται από το ειδικό φορτίο του σωματιδίου (q/m)

γ) Όταν το σωματίδιο εισέρχεται υπό γωνία φ (με $0 < \varphi < 90^\circ$) στο μαγνητικό πεδίο

Αναλύουμε την αρχική ταχύτητα u_o σε δύο συνιστώσες, στην $u_o \sin \varphi$ που έχει την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών του ΟΜΠ και στην $u_o \cos \varphi$ κάθετη στην κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών. Το φορτισμένο σωματίδιο λόγω της $u_o \sin \varphi$ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση σε διεύθυνση παράλληλη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου και λόγω της $u_o \cos \varphi$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε επίπεδο κάθετο στο επίπεδο σχεδίασης. Συνδυασμός αυτών των δύο κινήσεων είναι ότι το σωματίδιο διαγράφει ελικοειδή τροχιά με ακτίνα R και βήμα έλικας β .

β1) Υπολογισμός της ακτίνας (R) της σπείρας της έλικας

Από κυκλική κίνηση:

$$F_{\text{πεδίου}} = F_K \Rightarrow B(u_o \cos \varphi)q = \frac{m u_o^2 \cos^2 \varphi}{R} \Rightarrow R = \frac{m u_o \cos \varphi}{Bq}$$

β2) Υπολογισμός του βήματος (β) της έλικας.

Το βήμα (β) της έλικας είναι η απόσταση μεταξύ δύο σπειρών της έλικας. Την απόσταση αυτή, το σωματίδιο, τη διανύει σε χρόνο ίσο με την περίοδο της κυκλικής κίνησης

Από ευθύγραμμη ομαλή κίνηση έχουμε: $x = (u_o \sin \varphi)t$ για $x = \beta$ και $t = T \Rightarrow \beta = (u_o \sin \varphi)T$ (1)

Από την ομαλή κυκλική κίνηση έχουμε: $T = \frac{2\pi R}{u_o \cos \varphi} \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{Bq}$ (2)

$$\text{Από (1) και (2)} \Rightarrow \beta = \frac{2\pi m u_o \sin \varphi}{Bq}$$

6. Η ύλη μέσα στο μαγνητικό πεδίο

Αν σ' ένα μαγνητικό πεδίο εισάγουμε κάποιο υλικό πειραματικά διαπιστώνουμε τα εξής:

- α) Με την εισαγωγή του υλικού μεταβάλλεται η ένταση B του μαγνητικού πεδίου και επηρεάζεται (παραμορφώνεται) το φάσμα των μαγνητικών δυναμικών γραμμών
- β) όλα τα υλικά όταν βρίσκονται στο μαγνητικό πεδίο παρουσιάζουν μαγνητικές ιδιότητες
- γ) ορισμένα υλικά διατηρούν τις μαγνητικές τους ιδιότητες και μετά την απομάκρυνσή τους από το μαγνητικό πεδίο.

Για να διακρίνουμε τα υλικά με βάση της μαγνητικές τους ιδιότητες ορίζουμε το μέγεθος μαγνητική διαπερατότητα υλικού μ , ως το πηλίκο της έντασης του πεδίου B , όταν μέσα στο πεδίο βρίσκεται το υλικό, προς την ένταση του πεδίου B_0 , όταν στο πεδίο δεν βρίσκεται το υλικό.

$$\mu = \frac{B}{B_0}$$

Το μ είναι καθαρός αριθμός και μας δηλώνει πόσες φορές αυξήθηκε η ένταση του μαγνητικού πεδίου με την εισαγωγή του υλικού.

Διάκριση υλικών αναλόγως των μαγνητικών τους ιδιοτήτων

1) Σιδηρομαγνητικά υλικά

Τα υλικά αυτά έχουν μαγνητική διαπερατότητα πολύ μεγαλύτερη της μονάδος $\mu \gg 1$. Με την τοποθέτηση τους σε ένα μαγνητικό πεδίο προκαλείται μεγάλη αύξηση στην ένταση B του μαγνητικού πεδίου και παραμορφώνονται οι δυναμικές γραμμές του πεδίου, σαν να έχουν την τάση να περάσουν όσες γίνονται περισσότερες από το υλικό.



Τα υλικά αυτά διατηρούν τις μαγνητικές τους ιδιότητες και μετά την απομάκρυνσή τους από το πεδίο, εφόσον η θερμοκρασία τους είναι μικρότερη κάποιας τιμής που ονομάζεται θερμοκρασία Curie. (Σιδηρομαγνητικά υλικά είναι ο σίδηρος Fe, το Κοβάλτιο Co, το νικέλιο Ni και ορισμένα κράματα)

2) Παραμαγνητικά υλικά

Τα υλικά αυτά έχουν μαγνητική διαπερατότητα λίγο μεγαλύτερη της μονάδος $\mu > 1$. Με την τοποθέτηση τους σε ένα μαγνητικό πεδίο, προκαλείται μικρή αύξηση στην ένταση B του μαγνητικού πεδίου και οι δυναμικές γραμμές του πεδίου παραμορφώνονται λίγο, στην περιοχή που βρίσκεται το υλικό.



Τα υλικά αυτά δεν διατηρούν τις μαγνητικές τους ιδιότητες, όταν απομακρυνθούν από το μαγνητικό πεδίο. (Παραμαγνητικά υλικά είναι το αργίλιο Al, το χρώμιο Cr, και το υγρό και στερεό οξυγόνο)

3) Διαμαγνητικά υλικά

Τα υλικά αυτά έχουν μαγνητική διαπερατότητα μικρότερη της μονάδος $\mu < 1$. Με την τοποθέτηση τους σε ένα μαγνητικό πεδίο, προκαλείται μείωση της έντασης B του μαγνητικού πεδίου και οι δυναμικές γραμμές του πεδίου παραμορφώνονται σαν να έχουν την τάση να περάσουν όσες γίνονται λιγότερες από το υλικό..

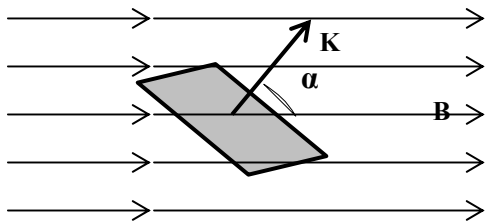


Τα υλικά αυτά δεν διατηρούν τις μαγνητικές τους ιδιότητες, όταν απομακρυνθούν από το μαγνητικό πεδίο. (Διαμαγνητικά υλικά είναι τα περισσότερα υλικά με κύριους αντιπροσώπους τον άνθρακα C και τον χαλκό Cu)

7. ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΡΟΗ.

α)ΤΙ ΕΚΦΡΑΖΕΙ: Το πλήθος των δυναμικών γραμμών που περνάνε μέσα από την επιφάνεια.

β)ΟΡΙΣΜΟΣ:

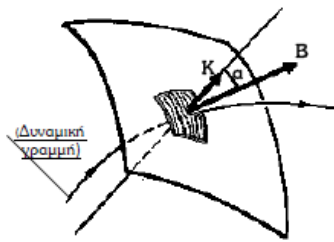


Μαγνητική ροή Φ που διαρρέει μια επίπεδη επιφάνεια εμβαδού S που βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο επαγωγής B ονομάζουμε το μονόμετρο μέγεθος που δίδεται από τη σχέση:

$$\Phi = B S \sigma \nu \alpha$$

όπου α η γωνία που σχηματίζει η κάθετος K στην επιφάνεια με την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών.

Αν το μαγνητικό πεδίο δεν είναι ομογενές τότε η μαγνητική ροή ορίζεται για στοιχειώδη επιφάνεια έτσι ώστε στην περιοχή της το B να είναι σταθερό. Σαν στοιχειώδη μαγνητική ροή $\Delta\Phi$ που διαρρέει μια στοιχειώδης επιφάνεια εμβαδού ΔS ορίζουμε το μονόμετρο φυσικό μέγεθος που το μέτρο του δίδεται από την σχέση:



$$\Delta\Phi = B \Delta S \sigma \nu \alpha$$

όπου B η μαγνητική επαγωγή του πεδίου και α η γωνία που σχηματίζει η κάθετος στην επιφάνεια με το B .

Αν τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε την ροή που διαρρέει μία επιφάνεια, χωρίζουμε την επιφάνεια σε στοιχειώδης και υπολογίζουμε την στοιχειώδη ροή που διαρρέει κάθε μία στοιχειώδη επιφάνεια. Η συνολική μαγνητική ροή θα είναι ίση με το άθροισμα των στοιχειωδών μαγνητικών ροών που διαρρέουν τις στοιχειώδεις επιφάνειες που αποτελείται η επιφάνεια

$$\text{δηλαδή } \Phi = \sum \Delta\Phi_i = \sum B_i \Delta S_i \sigma \nu \alpha_i$$

γ)ΑΠΟ ΤΙ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ: Από το πόσο ισχυρό ή ασθενές είναι το πεδίο (B) από το μέγεθος της επιφανείας S και από τη θέση της επιφάνειας μέσα στο πεδίο ($\sigma \nu \alpha$).

Αν η επιφάνεια έχει τοποθετηθεί παράλληλα στις δυναμικές γραμμές τότε $\Phi_{\min}=0$ ενώ αν είναι κάθετα έχει τη μέγιστη τιμή της $\Phi_{\max}=BS$

Αν οι δυναμικές γραμμές εισέρχονται στην επιφάνεια τότε $\Phi>0$ ενώ αν εξέρχονται $\Phi<0$.

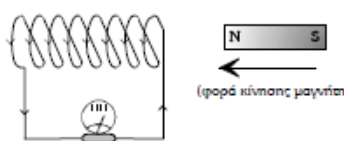
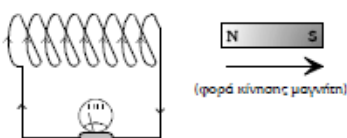
Η συνολική μαγνητική ροή που διαρρέει μια κλειστή επιφάνεια είναι μηδέν (το πλήθος των δυναμικών γραμμών των εισερχομένων στην επιφάνεια είναι ίδιο με αυτό των εξερχομένων)

δ)ΜΟΝΑΔΑ: 1 Weber=1Tesla 1m²

1 Weber είναι η μαγνητική ροή η οποία διαρρέει επιφάνεια εμβαδού 1m² όταν αυτή βρίσκεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου επαγωγής 1tesla.

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

α)Πείραμα:



Όταν πλησιάσουμε ή απομακρύνουμε το μαγνήτη από το πηνίο εμφανίζεται στα άκρα του πηνίου μία ηλεκτρεργετική δύναμη. Παρατηρείται ότι η εμφάνιση της ηλεκτρεργετικής δύναμης (ΗΕΔ) στα άκρα του πηνίου διαρκεί όσο διαρκεί η σχετική κίνηση μαγνήτη και πηνίου. Η ΗΕΔ αυτή ονομάζεται ΗΕΔ από επαγωγή.

β)Εξήγηση:

Ερμηνεία Faraday :Από το πείραμα καταλαβαίνουμε ότι η εμφάνιση της ΗΕΔ οφείλεται στην μεταβολή της μαγνητικής ροής που διαρρέει το πηνίο. Η παραπάνω εξήγηση αποτελεί

μία πειραματική ερμηνεία η οποία στερείται φυσικής ερμηνείας.

Φυσική ερμηνεία του φαινομένου:Όσο διαρκεί η σχετική κίνηση του μαγνήτη, τα ελεύθερα e που βρίσκονται στο πηνίο είναι κινούμενα ως προς το μαγνητικό πεδίο του μαγνήτη, οπότε πάνω τους

ασκούνται δυνάμεις. Οι δυνάμεις αυτές έχουν σαν αποτέλεσμα να συσσωρεύουν στο ένα άκρο του πηνίου ηλεκτρόνια ενώ στο άλλο να δημιουργήσουν έλλειμμα ηλεκτρονίων. Δηλαδή στα άκρα του πηνίου δημιουργείται ΗΕΔ (διαφορά δυναμικού).

γ)Νόμος Faraday: Η μέση ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα ενός πηνίου είναι ανάλογη του ρυθμού με τον οποίο μεταβάλλεται η μαγνητική του ροή και ανάλογη του αριθμού των σπειρών του.

$$E = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

το μείον (-) στον τύπο ερμηνεύεται από τον κανόνα του Lenz.

δ)Εξίσωση επαγωγικού ρεύματος:

Αν το πηνίο περιέχει N σπείρες και παρουσιάζει ωμική αντίσταση R τότε το επαγωγικό ρεύμα που θα διαρρέει λόγω φαινομένου επαγωγής θα προκύπτει από το νόμο του ohm:

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon\pi} &= \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R} \\ E_{\varepsilon\pi} &= -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad I_{\varepsilon\pi} = -\frac{N}{R} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Το μείον (-) όπως και προηγούμενα ερμηνεύεται από τον κανόνα του Lenz.

ε)Εξίσωση επαγωγικού φορτίου

Σαν επαγωγικό φορτίο ορίζουμε το συνολικό φορτίο που περνά από το πηνίο όσο διαρκεί η μεταβολή της μαγνητικής ροής και η εξάρτηση του προκύπτει από την εξίσωση του επαγωγικού ρεύματος.

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon\pi} &= \frac{Q_{\varepsilon\pi}}{\Delta t} \Rightarrow Q_{\varepsilon\pi} = I_{\varepsilon\pi} \Delta t \\ I_{\varepsilon\pi} &= -\frac{N}{R} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad Q_{\varepsilon\pi} = -\frac{N}{R} \Delta\Phi$$

Απο την παραπάνω σχέση παρατηρήστε ότι το επαγωγικό φορτίο εξαρτάται από τη μεταβολή της μαγνητικής ροής και όχι από το ρυθμό μεταβολής της.

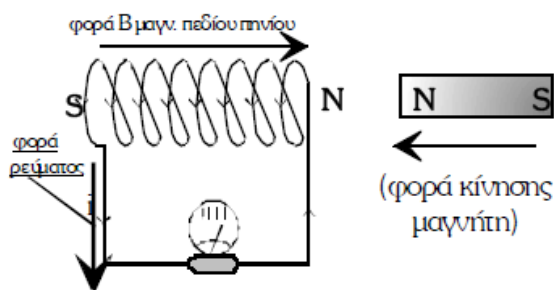
Ο παραπάνω τύπος ονομάζεται και **νόμος του Newman**, στον οποίο δε βάζουμε το (-) του Lenz επειδή δε μας ενδιαφέρει η φορά που περνά το επαγωγικό φορτίο αλλά η ποσότητά του.

στ)Κανόνας του Lenz:

"Το επαγωγικό ρεύμα έχει τέτοια φορά ώστε να αντιστέκεται στο αίτιο που το προκάλεσε."

Ο κανόνας του Lenz αποτελεί συνέπεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας.

Παράδειγμα: Κατά το πλησίασμα του βόρειου πόλου του μαγνήτη (βλέπε σχήμα) σύμφωνα με τον



κανόνα του Lenz το επαγωγικό ρεύμα πρέπει να έχει τέτοια φορά ώστε να δημιουργεί στο δεξί άκρο του πηνίου βόρειο πόλο. Αν η φορά του ρεύματος ήταν αντίθετη από αυτή του κανόνα του Lenz, τότε στο δεξί άκρο του πηνίου θα είχαμε νότιο πόλο.

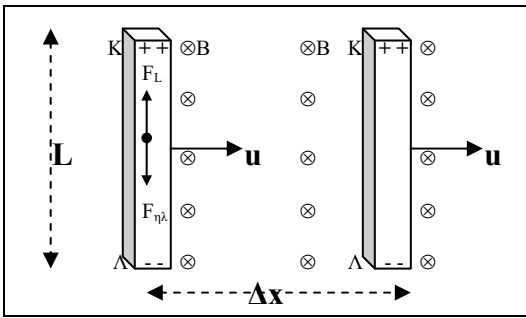
Αυτό σημαίνει ότι δίνοντας μια μικρή αρχική ταχύτητα στο μαγνήτη θα είχαμε έλξη από το πηνίο με αποτέλεσμα ο μαγνήτης να επιταχύνεται και να αυξάνεται η κινητική του ενέργεια ενώ συγχρόνως να

έχουμε δημιουργία ηλεκτρικής ενέργειας στο κύκλωμα, περισσότερη απ' αυτή που αρχικά δώσαμε, πράγμα που παραβιάζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Ο κανόνας του Lenz ισχύει μόνο για επαγωγικά ρεύματα. Το μείον (-) στον τύπο της ΗΕΔ δηλώνει ότι η ΗΕΔ από επαγωγή έχει τέτοια πολικότητα, ώστε να προκαλεί ρεύμα το οποίο να ικανοποιεί τον κανόνα του Lenz.

Φαινόμενο επαγωγής στην κίνηση ράβδου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο

Όταν μια ευθύγραμμη ράβδος μήκους L , κινηθεί με ταχύτητα u , σε επίπεδο κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου, μαγνητικής επαγωγής (έντασης) B , τότε στα άκρα της ΚΛ εμφανίζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη ΗΕΔ από επαγωγή $E_{επ}$ η οποία υπολογίζεται με την σχέση

$$E_{επ} = B u L$$



Αυτό ερμηνεύεται με δύο τρόπους

α) Φυσική ερμηνεία με τις δυνάμεις Lorentz που ασκούνται στα ελεύθερα φορτία της ράβδου: κατά την κίνηση της ράβδου τα ελεύθερα ηλεκτρόνια της e^- είναι κινούμενα ως προς μαγνητικό πεδίο, οπότε ασκούνται πάνω τους δυνάμεις Lorentz (F_L) με

αποτέλεσμα να έχουμε συσσώρευση e^- στο ένα άκρο της Λ (κάτω άκρο), και στο άλλο άκρο Κ (πάνω άκρο) έλλειμμα e^- .

Η συσσώρευση αυτή έχει ως αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μια διαφορά δυναμικού στα άκρα ΚΛ της ράβδου και να δημιουργηθεί στο εσωτερικό της ηλεκτρικό πεδίο. Οπότε σε κάθε e^- της ράβδου ασκούνται δύο δυνάμεις μία $F_{ηλ}$ από το ηλεκτρικό πεδίο και μία $F_{μαγ}$ από το μαγνητικό πεδίο. Η μετακίνηση των e^- θα σταματήσει όταν $F_{ηλ} = F_{μαγ}$ και η διαφορά δυναμικού $V_{ΚΛ}$ θα σταθεροποιηθεί και θα είναι ίση με την ΗΕΔ από επαγωγή $E_{επ}$.

Έστω E η ένταση πεδίου και $V_{ΚΛ}$ η διαφορά δυναμικού στα άκρα της ράβδου για το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στο εσωτερικό της. Η δύναμη $F_{ηλ}$ που ασκείται στα e^- θα είναι

$$F_{ηλ} = Eq = \frac{V_{ΚΛ}}{L} |e| \text{ και επειδή } V_{ΚΛ} = E_{επ} \text{ ισχύει } F_{ηλ} = \frac{E_{επ}}{L} |e| \quad (1)$$

$$\text{Η δύναμη } F_{μαγ} \text{ που ασκείται στα } e^- \text{ θα είναι } F_{μαγ} = Buq \Rightarrow F_{μαγ} = Bu|e| \quad (2)$$

$$\text{Επειδή } F_{ηλ} = F_{μαγ} \text{ από σχέσεις (1) και (2) } \Rightarrow E_{επ} = B u L$$

β) Ερμηνεία από νόμο Faraday:

Κατά την κίνηση της ράβδου σαρώνει ένα εμβαδόν που η μαγνητική ροή, που το διαρρέει, μεταβάλλεται. Λόγω αυτής της μεταβολής θα εμφανιστεί στα άκρα της ράβδου ΗΕΔ η οποία υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } E_{επ} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad (3)$$

Έστω ότι σε χρόνο Δt , η ράβδος έχει μετατοπιστεί κατά Δx τέτοιο ώστε $\Delta x = u \Delta t$

Αν μέσα στο χρόνο Δt , το στοιχειώδες εμβαδόν που σαρώνει η ράβδος είναι ΔA , έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \Phi = B \Delta A \\ \Delta A = L \Delta x \\ \Delta x = u \Delta t \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = B u L \quad (4)$$

$$\text{Από σχέσεις (3) και (4) } \Rightarrow E_{επ} = B u L$$

*** Παρατήρηση:**

α) Ο τύπος $E_{επ} = BuL$ δίνει την στιγμιαία επαγωγή ΗΕΔ που αναπτύσσεται στα άκρα ενός ευθύγραμμου αγωγού μήκους L , όπου B είναι η συνιστώσα της μαγνητικής επαγωγής του ομογενούς πεδίου, η οποία είναι κάθετη στο επίπεδο κίνησης του αγωγού, u η συνιστώσα της στιγμιαίας ταχύτητας του αγωγού η οποία είναι κάθετη στον αγωγό.

β) Ο τύπος $E_{επ} = \Delta \Phi / \Delta t$ μας δίνει τη μέση επαγωγική τάση που αναπτύσσεται σε χρόνο Δt . Όταν όμως ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής είναι σταθερός τότε ο τύπος μας δίνει τη στιγμιαία επαγωγική τάση που ταυτίζεται με τη μέση. Π.χ. αν η κίνηση του αγωγού ήταν επιταχυνόμενη τότε δε θα μπορούσαμε να κάνουμε χρήση του τύπου $E_{επ} = \Delta \Phi / \Delta t$ για τον υπολογισμό της στιγμιαίας ΗΕΔ από επαγωγή γιατί η μαγνητική ροή δε θα είχε σταθερό ρυθμό μεταβολής.

Στροφοτική κίνηση ράβδου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο

Έστω ράβδος μήκους L η οποία στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω , γύρω από το ένα άκρο της έτσι ώστε το επίπεδο κίνησης της να είναι συνεχώς κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου επαγωγής B .

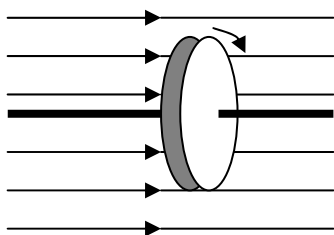
Κατά την στροφοτική κίνηση της, η ράβδος, σαρώνει ένα εμβαδόν όπου η μαγνητική ροή, που το διαρρέει μεταβάλλεται. Λόγω αυτής της μεταβολής θα εμφανιστεί στα άκρα της ράβδου ΗΕΔ.

Επειδή η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου είναι σταθερή ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής θα είναι σταθερός οπότε η μέση ΗΕΔ από επαγωγή θα είναι ίδια με την στιγμιαία και ο υπολογισμός

της θα γίνει με βάση την σχέση: $E_{\varepsilon\pi} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ (1)

Έστω σε χρόνο $\Delta t = T$ όπου T η περίοδος περιστροφής η ράβδος έχει διαγράψει ένα κύκλο οπότε στον χρόνο

αυτό $\Delta\Phi = B \pi L^2$ και η (1) γίνεται $E_{\varepsilon\pi} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B\pi L^2}{T}$ όμως $\omega = \frac{2\pi}{T}$ οπότε $E_{\varepsilon\pi} = \frac{1}{2} B \omega L^2$

Στροφοτική κίνηση δίσκου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο

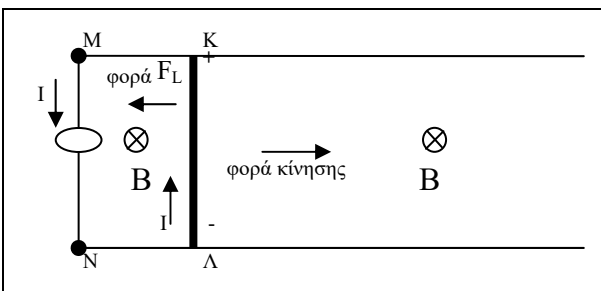
Αν περιστρέψουμε με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω ένα αγωγίμο δίσκο ακτίνας r , που το επίπεδο του είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου επαγωγής B , τότε μεταξύ του κέντρου και ενός σημείου της περιμέτρου του δίσκου θα εμφανισθεί ΗΕΔ από επαγωγή που θα δίδεται από την σχέση:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{1}{2} B \omega r^2$$

Η εξήγηση είναι η εξής: θεωρούμε ότι ο δίσκος αποτελείται από πολλούς αγωγούς οι οποίοι βρίσκονται στις ακτίνες του δίσκου και στρέφονται με σταθερή ω . Στα άκρα κάθε αγωγού εμφανίζεται ΗΕΔ η οποία θα δίδεται από την σχέση $E_{\varepsilon\pi} = \frac{1}{2} B \omega L^2$.

Όμως το μήκος κάθε αγωγού είναι ίσο με την ακτίνα r του δίσκου και η συνολική ΗΕΔ θα είναι ίση με την ΗΕΔ κάθε αγωγού οπότε η συνολική ΗΕΔ του δίσκου θα είναι $E_{\varepsilon\pi} = \frac{1}{2} B \omega r^2$

Η παραπάνω διάταξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως συσκευή παραγωγής σταθερής τάσης, αν τοποθετήσουμε ολισθαίνουσες επαφές (ψήκτρες) μεταξύ του κέντρου και των εξωτερικών σημείων του δίσκου. Η συσκευή αυτή ονομάζεται **δίσκος Faraday**.

Μελέτη κίνησης ράβδου σε ΟΜΠ που εμφανίζεται ΗΕΔ από επαγωγή

Μία μεταλλική ράβδος ΚΛ έχει μάζα m , ωμική αντίσταση r και μήκος L . Η ράβδος μπορεί να κινείται εφαιπτόμενη, χωρίς τριβές, πάνω σε δύο οριζόντιες μεταλλικές ράγες μεγάλου μήκους και αμελητέας ωμικής αντίστασης. Όλη η διάταξη βρίσκεται σε κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B και τα άκρα ΜΝ των ραγών συνδέονται με όργανο μέτρησης εσωτερικής αντίστασης $R_{MN} = R$.

1^η ερμηνεία (δυνάμεις Lorentz) Κατά την κίνηση της ράβδου ασκούνται δυνάμεις στα ελεύθερα e^- της ράβδου που έχει

σαν αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μία διαφορά δυναμικού στα άκρα της ΚΛ και κατά συνέπεια εμφανίζεται ΗΕΔ από επαγωγή $E_{\varepsilon\pi}$ στα άκρα της ΚΛ και υπολογίζεται από την σχέση $E_{\varepsilon\pi} = BuL$ όπου u η ταχύτητα της ράβδου. Η πολικότητα της $E_{\varepsilon\pi}$ βρίσκεται από την φορά της δύναμης Lorentz δηλαδή στο ακρο Κ έχουμε θετικό πρόσημο και στο Λ αρνητικό. Λόγω της $E_{\varepsilon\pi}$ και επειδή το κύκλωμα ΜΚΛΝ είναι κλειστό θα

εμφανισθεί ρεύμα από επαγωγή έντασης $I = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + r}$ με φορά μέσα στην ράβδο από το Λ στο Κ. Από την φορά

του ρεύματος με τον κανόνα των τριών δακτύλων ασκείται στην ράβδο δύναμη Laplace, αντίθετη της κίνησης (δηλαδή προς τα αριστερά) η οποία έχει μέτρο $F_L = BIL$.

2^η ερμηνεία (Νόμος Faraday) Κατά την κίνηση της ράβδου το εμβαδό ΜΚΛΝ αυξάνεται οπότε μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που το διαρρέει δηλαδή εμφανίζεται ΗΕΔ από επαγωγή $E_{επ}$ στα άκρα της ΚΛ και υπολογίζεται από την σχέση $E_{επ} = BvL$ όπου v η ταχύτητα της ράβδου. Λόγω της $E_{επ}$ και επειδή το κύκλωμα ΜΚΛΝ είναι κλειστό θα εμφανισθεί ρεύμα από επαγωγή έντασης $I = \frac{E_{επ}}{R + r}$.

Η προς τα δεξιά κίνηση της ΚΛ αποτελεί το αίτιο δημιουργίας του ρεύματος έντασης I . Σύμφωνα με τον κανόνα Lenz πρέπει να ασκείται πάνω στην ΚΛ δύναμη Laplace αντίθετη της κίνησης (δηλαδή προς τα αριστερά) η οποία έχει μέτρο $F_L = BIL$.

Για να ασκείται F_L προς τα αριστερά και λόγω του κανόνα των τριών δακτύλων, η ΚΛ θα διαρρέεται από ρεύμα με φορά από το Λ στο Κ όπως στο σχήμα (αριστερόστροφη στον κόμβο ΜΚΛΝ).

Για να έχει το επαγωγικό ρεύμα την φορά που αναφέρθηκε πρέπει η $E_{επ}$ να έχει πολικότητα με θετικό πρόσημο στο Κ και αρνητικό στο Λ.

Το είδος της κίνησης της ράβδου ΚΛ εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες που προκαλούν την κίνηση της.

1^η περίπτωση αρχικά δίνεται μια αρχική ταχύτητα u_0 στον ΚΛ και αφήνεται ελεύθερος για κίνηση.

Η μόνη δύναμη που ασκείται στην ΚΛ είναι η F_L οπότε η ράβδος αποκτά επιβράδυνση που έχει μέτρο

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F_L}{m} = \frac{BIL}{m} = \frac{BE_{επ}L}{m(R+r)} \Rightarrow \alpha = \frac{B^2 u_0 L^2}{m(R+r)}$$

Από την τελευταία σχέση καταλαβαίνουμε ότι αρχικά ο αγωγός ΚΛ αποκτά αρχική επιβράδυνση

$$\alpha_0 = \frac{B^2 u_0 L^2}{m(R+r)} \text{ που καθώς μειώνεται η ταχύτητα του μειώνεται η επιβράδυνση του μέχρι που ταχύτητα και επιβράδυνση μηδενίζονται και ο ΚΛ ακινητοποιείται}$$

2^η περίπτωση αρχικά ασκείται σταθερή δύναμη F στον ΚΛ

Οι δυνάμεις που ασκούνται στην ΚΛ είναι η F και η F_L οπότε η ράβδος αποκτά επιτάχυνση που έχει μέτρο

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F - F_L}{m} = \frac{F - BIL}{m} = \frac{F(R+r) - BE_{επ}L}{m(R+r)} \Rightarrow \alpha = \frac{F(R+r) - B^2 u L^2}{m(R+r)}$$

Από την τελευταία σχέση καταλαβαίνουμε ότι αρχικά ο αγωγός ΚΛ, αποκτά αρχική επιτάχυνση $\alpha_0 = \frac{F}{m}$ που

καθώς η ταχύτητα του u αυξάνεται μειώνεται η επιτάχυνση του, μέχρι που η ταχύτητα αποκτά μια τιμή (οριακή) u_{op} και η επιτάχυνση μηδενίζεται και ο ΚΛ συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα u_{op} .

Υπολογισμός ταχύτητας u_{op} .

$$\text{Για } u = u_{op} \text{ η } \alpha = 0 \text{ οπότε } \frac{F(R+r) - B^2 u_{op} L^2}{m(R+r)} = 0 \Rightarrow u_{op} = \frac{F(R+r)}{B^2 L^2}$$

3^η περίπτωση αρχικά ο ΚΛ έχει αρχική ταχύτητα u_0 και ταυτόχρονα ασκείται σταθερή δύναμη F , κατά την φορά της κίνησης

Οι δυνάμεις που ασκούνται στην ΚΛ είναι η F και η F_L οπότε η ράβδος αποκτά επιτάχυνση που έχει μέτρο

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F - F_L}{m} = \frac{F - BIL}{m} = \frac{F(R+r) - BE_{επ}L}{m(R+r)} \Rightarrow \alpha = \frac{F(R+r) - B^2 u L^2}{m(R+r)}$$

Από την τελευταία σχέση καταλαβαίνουμε ότι αρχικά ο αγωγός ΚΛ αποκτά αρχική επιτάχυνση

$$\alpha_0 = \frac{F(R+r) - B^2 u_0 L^2}{m(R+r)} \text{ όπου διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις}$$

α) Αν $F(R+r) = B^2 u_0 L^2$ τότε $\alpha = 0$ ο αγωγός εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα u_0 .

β) Αν $F(R+r) > B^2 u_0 L^2$ τότε $\alpha > 0$ ο αγωγός εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με μέτρο επιτάχυνσης

$$\alpha = \frac{F(R+r) - B^2 u L^2}{m(R+r)} \text{ που καθώς η ταχύτητα του } u \text{ αυξάνεται, μειώνεται η επιτάχυνση του μέχρι που η}$$

ταχύτητα αποκτά μια τιμή (οριακή) u_{op} και η επιτάχυνση μηδενίζεται και ο ΚΛ συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα u_{op} .

Υπολογισμός ταχύτητας u_{op} .

$$\text{Για } u=u_{op} \text{ ή } a=0 \text{ οπότε } \frac{F(R+r) - B^2 u_{op} L^2}{m(R+r)} = 0 \Rightarrow u_{op} = \frac{F(R+r)}{B^2 L^2}$$

γ) Αν $F(R+r) < B^2 u_0 L^2$ τότε $a < 0$ ο αγωγός εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση με μέτρο επιβράδυνσης

$$|a| = \frac{B^2 u L^2 - F(R+r)}{m(R+r)} \text{ που καθώς η ταχύτητα του } u \text{ μειώνεται, μειώνεται το μέτρο της επιβράδυνσης του,}$$

μέχρι που η ταχύτητα παίρνει μια ταχύτητα u_{op} και η επιβράδυνση μηδενίζεται και ο ΚΛ συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα u_{op} .

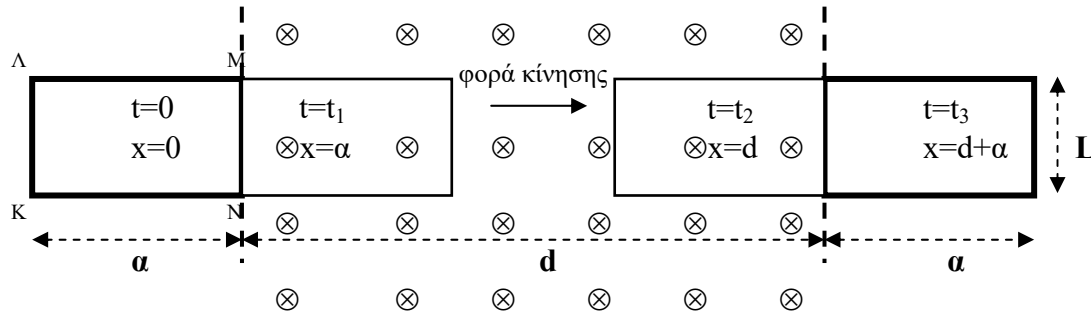
Υπολογισμός ταχύτητας u_{op} .

$$\text{Για } u=u_{op} \text{ ή } |a|=0 \text{ οπότε } \frac{B^2 u_{op} L^2 - F(R+r)}{m(R+r)} = 0 \Rightarrow u_{op} = \frac{F(R+r)}{B^2 L^2}$$

*** Η 3^η περίπτωση αναφέρεται όταν η κατεύθυνση της F είναι ίδια με την κατεύθυνση της u_0 δηλαδή η φορά κίνησης του ΚΛ είναι προς τα δεξιά. Αν οι κατευθύνσεις των F και u_0 είναι αντίθετες τότε η θεώρηση θα είναι διαφορετική. Θα πρέπει να διερευνηθεί, τόσο η κατεύθυνση της επιτάχυνσης a , όσο και η φορά της κίνησης, η οποία θα επηρεάσει την πολικότητα της $E_{επ}$, την φορά και το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος I και την φορά και το μέτρο της δύναμης Laplace F_L .

Το φαινόμενο της μαγνητικής επαγωγής
στην κίνηση αγώγιμου πλαισίου σε ΟΜΠ

Ένα οριζόντιο ορθογώνιο πλαίσιο ΚΛΜΝ ωμικής αντίστασης ανά μονάδα μήκους R^* έχει πλευρές ΚΛ=ΜΝ=L και ΛΜ=ΝΚ=a. Οι πλευρές του πλαισίου παρουσιάζουν ωμικές αντιστάσεις $R_{ΚΛ}=R_{ΜΝ}=LR^*$ και $R_{ΛΜ}=R_{ΝΚ}=aR^*$ και η συνολική ωμική του αντίσταση είναι $R_{ολ}=2R^*(L+a)$. Στο πλαίσιο ασκείται κατάλληλη οριζόντια δύναμη $F_{εξ}$ και το υποχρεώνει να κινείται με σταθερή οριζόντια



ταχύτητα v (κάθετη στον ΜΝ), προς μια περιοχή εύρους d όπου υπάρχει κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής B .

Αρχικά την χρονική στιγμή $t=0$, το πλαίσιο βρίσκεται εκτός μαγνητικού πεδίου ώστε η πλευρά ΜΝ του πλαισίου να βρίσκεται οριακά στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου και ξεκινά η είσοδος του πλαισίου στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου.

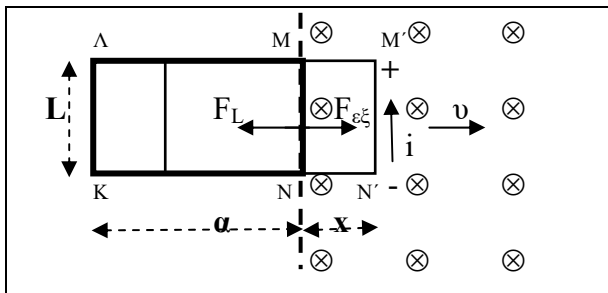
Την $t=t_1$ το πλαίσιο έχει μετατοπισθεί κατά $x=a$ έτσι ώστε όλο το πλαίσιο να έχει εισέλθει στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου.

Την $t=t_2$ το πλαίσιο έχει μετατοπισθεί κατά $x=d$ έτσι ώστε η ΜΝ να βρίσκεται στο τέλος της περιοχής του μαγνητικού πεδίου και ξεκινά η έξοδος του από την περιοχή αυτή.

Την $t=t_3$ το πλαίσιο έχει μετατοπισθεί κατά $x=d+a$ έτσι ώστε όλο το πλαίσιο να έχει βγει από την περιοχή του μαγνητικού πεδίου.

1^η φάση Για $0 \leq t \leq t_1$ ή $0 \leq x \leq a$

(διάρκεια εισόδου του πλαισίου στην περιοχή του ΟΜΠ)



Στην φάση αυτή η μαγνητική ροή που διαρρέει το πλαίσιο αυξάνεται οπότε ο ρυθμός μεταβολής της είναι θετικός και

με σύμβαση που προκύπτει από τον τύπο $E_{επ} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ η

ηλεκτρεγερτική δύναμη ($E_{επ}$) που αναπτύσσεται στο πλαίσιο είναι αρνητική. Με βάση τον κανόνα του Lenz, η $E_{επ}$ πρέπει να έχει πολικότητα, τέτοια ώστε να προκαλεί ρεύμα και να ασκείται από το μαγνητικό πεδίο στον ΜΝ δύναμη Laplace η οποία να αντιστέκεται στην κίνηση του

πλαίσιου. Επομένως η πολικότητα της $E_{επ}$ στον ΜΝ προκαλεί θετικό δυναμικό στο Μ και αρνητικό στο Ν και το ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο έχει αριστερόστροφη φορά (φορά εντός του ΜΝ από το Ν στο Μ). Για την φάση αυτή και σε μία τυχαία χρονική στιγμή t ισχύει:

α₁ για την μαγνητικής ροής που διαρρέει το πλαίσιο $\Phi=f(x)$ ή $\Phi=f(t)$

$\Phi=BLx$ ή $\Phi=BLvt$ δηλαδή η Φ κατά την διάρκεια της 1^{ης} φάσης η Φ έχει γραμμική εξάρτηση από το x (ή το t) και όσο αυξάνεται το x (ή το t) τόσο αυξάνεται και η Φ .

β₁ για την ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο $E_{επ}=f(x)$ ή $E_{επ}=f(t)$ $E_{επ} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -BuL$

δηλαδή κατά την διάρκεια της 1^{ης} φάσης η $E_{επ}$ είναι σταθερή ανεξάρτητη του x και του t

γ₁ για την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο. $i=f(x)$ ή $i=f(t)$

Λόγω της πολικότητας της $E_{επ}$ την τιμή του i την θεωρούμε κατά σύμβαση αρνητική

$$i = -\frac{|E_{επ}|}{R_{ΚΛ} + R_{ΛΜ} + R_{ΜΝ} + R_{ΝΚ}} \Rightarrow i = -\frac{BuL}{2R^*(L+a)}$$

δηλαδή κατά την διάρκεια της 1^{ης} φάσης το i είναι σταθερό ανεξάρτητο του x και ανεξάρτητο του t

δ₁) για την διαφορά δυναμικού στα άκρα MN του πλαισίου $V_{MN}=f(x)$ ή $V_{MN}=f(t)$

Από τον τύπο της πολικής τάσης πηγής προκύπτει

$$V_{MN} = V_M - V_N = |E_{επ}| - |iR_{MN}| = |E_{επ}| \left(1 - \frac{R_{MN}}{R_{ολ}}\right) = |E_{επ}| \left(1 - \frac{L}{2L + 2\alpha}\right) \Rightarrow V_{MN} = BuL \frac{(L + 2\alpha)}{2(L + \alpha)} \quad \text{ή}$$

$$V_{MN} = V_M - V_N = |i(R_{NK} + R_{KL} + R_{LM})| = \frac{BuL}{2R^*(L + \alpha)} R^*(L + 2\alpha) \Rightarrow V_{MN} = \frac{BuL(L + 2\alpha)}{2(L + \alpha)}$$

δηλαδή κατά την διάρκεια της 1^{ης} φάσης η V_{MN} είναι σταθερή ανεξάρτητη του x και ανεξάρτητη του t

ε₁) για την εξωτερικής δύναμης $F_{εξ}$ που ασκείται στο πλαίσιο $F_{εξ}=f(x)$ ή $F_{εξ}=f(t)$

Επειδή η ταχύτητα v είναι σταθερή, η εξωτερική δύναμη $F_{εξ}$ θα είναι διαρκώς αντίθετη στην δύναμη F_L Laplace που ασκεί το μαγνητικό πεδίο στο πλαίσιο.

$$F_{εξ} = F_L = BiL \Rightarrow F_{εξ} = \frac{B^2 v L^2}{2R^*(L + \alpha)}$$

δηλαδή κατά την διάρκεια της 1^{ης} φάσης η $F_{εξ}$ είναι σταθερή ανεξάρτητη του x και ανεξάρτητη του t και έχει την φορά της κίνησης.

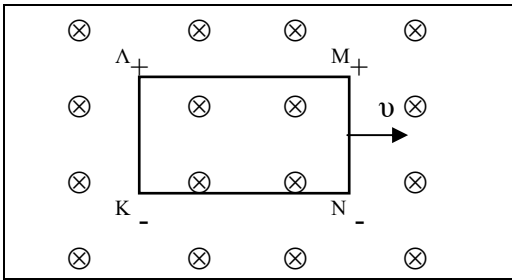
στ₁) για τον ρυθμό μετατροπής ενέργειας σε θερμότητα λόγω φαινομένου Joule

$$P_{θερ} = i^2 R_{ολ} = i^2 2R^*(L + \alpha) \Rightarrow P_{θερ} = \frac{B^2 v^2 L^2}{2R^*(L + \alpha)}$$

Κατά την διάρκεια της 1^{ης} φάσης η $P_{θερ}$ είναι σταθερή ανεξάρτητη του x και ανεξάρτητη του t

2^η φάση Για $t_1 \leq t \leq t_2$ ή $\alpha \leq x \leq d$

(διάρκεια παραμονής όλου του πλαισίου στην περιοχή του ΟΜΠ)



Στην φάση αυτή η μαγνητική ροή που διαρρέει το πλαίσιο δεν μεταβάλλεται ο ρυθμός μεταβολής της είναι μηδέν οπότε η συνολική ΗΕΔ από επαγωγή είναι μηδέν.

Επομένως το πλαίσιο δεν διαρρέεται από ρεύμα $i=0$ και δεν ασκείται πάνω του δύναμη Laplace $F_L=0$.

Για την φάση αυτή και σε μία τυχαία χρονική στιγμή t ισχύει:

α₂) για την μαγνητικής ροής που διαρρέει το πλαίσιο $\Phi=f(x)$ ή $\Phi=f(t)$

$\Phi=BL\alpha$ δηλαδή κατά την διάρκεια της 2^{ης} φάσης η Φ είναι σταθερή ανεξάρτητη του x και του t

β₂) για την ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο $E_{επ}=f(x)$ ή $E_{επ}=f(t)$

Στον αγωγό MN αναπτύσσεται ΗΕΔ και $E_{επMN} = BuL$ με θετικό δυναμικό το M

Στον αγωγό ΚΛ αναπτύσσεται ΗΕΔ και $E_{επΚΛ} = BuL$ με θετικό δυναμικό το Λ.

Οι δύο αυτές ΗΕΔ έχουν τέτοια πολικότητα ώστε το πλαίσιο να μην διαρρέεται από ρεύμα και για την συνολική ΗΕΔ του πλαισίου ισχύει $E_{επ}=0$ ανεξάρτητα του x και του t (στο ίδιο συμπέρασμα προκύπτει και

$$\text{από Faraday } E_{επ} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0)$$

γ₂) για την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο. $i=f(x)$ ή $i=f(t)$

Επειδή $E_{επ}=0$ το $i=0$ ανεξάρτητα του x και του t

δ₂) για την διαφορά δυναμικού στα άκρα του πλαισίου MN $V_{MN}=f(x)$ ή $V_{MN}=f(t)$

$V_{MN} = V_M - V_N = E_{επMN} = BuL$ δηλαδή κατά την διάρκεια της 2^{ης} φάσης η V_{MN} είναι σταθερή ανεξάρτητη του x και ανεξάρτητη του t

ε₂) για την εξωτερικής δύναμης $F_{εξ}$ που ασκείται στο πλαίσιο $F_{εξ}=f(x)$ ή $F_{εξ}=f(t)$

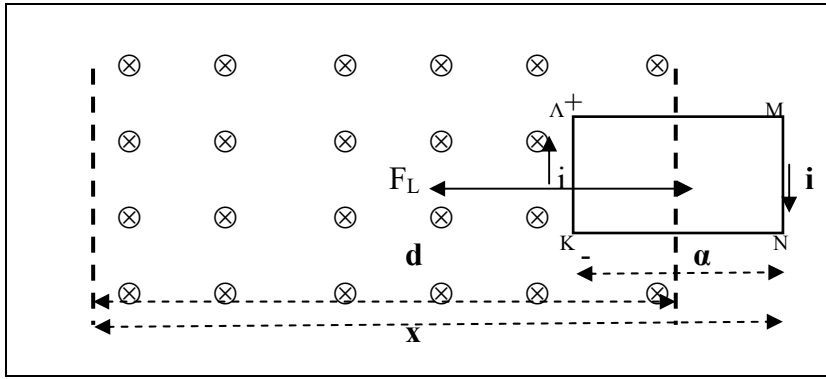
Επειδή $F_L=0 \Rightarrow F_{εξ}=0$ ανεξάρτητα του x και του t

στ₂) για τον ρυθμό μετατροπής ενέργειας σε θερμότητα λόγω φαινομένου Joule

$P_{θερ}=0$ μηδέν ανεξάρτητα της τιμής του x ή του t

3^η φάση Για $t_2 \leq t \leq t_3$ ή $d \leq x \leq d + a$

(διάρκεια εισόδου του πλαισίου στην περιοχή)



Στην φάση αυτή η μαγνητική ροή που διαρρέει το πλαίσιο μειώνεται οπότε ο ρυθμός μεταβολής της είναι αρνητικός και με σύμβαση που προκύπτει από

$$\text{τον τύπο } E_{\varepsilon\pi} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

η ηλεκτρεγερτική δύναμη ($E_{\varepsilon\pi}$) που αναπτύσσεται στο πλαίσιο είναι θετική. Με βάση τον κανόνα του Lenz, η $E_{\varepsilon\pi}$ πρέπει να έχει τέτοια πολικότητα, ώστε να προκαλεί ρεύμα,

που η φορά της δύναμης Laplace που ασκεί το ΟΜΠ στον ΚΛ να αντιστέκεται στην κίνηση του πλαισίου. Επομένως η πολικότητα της $E_{\varepsilon\pi}$ στον ΚΛ προκαλεί θετικό δυναμικό στο Λ και αρνητικό στο Κ και το ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο έχει δεξιόστροφη φορά (φορά εντός του ΜΝ από το Μ στο Ν). Για την φάση αυτή και σε μία τυχαία χρονική στιγμή t ισχύει:

α₃) για την μαγνητικής ροής που διαρρέει το πλαίσιο $\Phi=f(x)$ ή $\Phi=f(t)$

$\Phi=BL(a-(x-d))=BL(a+d-x)$ ή $\Phi=BL(a+d-vt)$ δηλαδή κατά την διάρκεια της 3^{ης} φάσης η Φ έχει γραμμική εξάρτηση από το x (ή το t) και όσο αυξάνεται το x (ή το t) τόσο μειώνεται και η Φ .

β₃) για την ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο $E_{\varepsilon\pi}=f(x)$ ή $E_{\varepsilon\pi}=f(t)$ $E_{\varepsilon\pi} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = BvL$

δηλαδή κατά την διάρκεια της 3^{ης} φάσης η $E_{\varepsilon\pi}$ είναι σταθερή ανεξάρτητη του x και του t

γ₃) για την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο. $i=f(x)$ ή $i=f(t)$

Επειδή την αριστερόστροφη φορά την θεωρήσαμε αρνητική, την δεξιόστροφη φορά του i την θεωρούμε θετική

$$i = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{\text{ΚΛ}} + R_{\text{ΛΜ}} + R_{\text{ΜΝ}} + R_{\text{ΝΑ}}} \Rightarrow i = \frac{BvL}{2R^*(L+a)}$$

δηλαδή κατά την διάρκεια της 3^{ης} φάσης το i είναι σταθερό ανεξάρτητο του x και ανεξάρτητο του t

δ₃) για την διαφορά δυναμικού στα άκρα του πλαισίου ΜΝ $V_{\text{ΜΝ}}=f(x)$ ή $V_{\text{ΜΝ}}=f(t)$

Από την φορά του ρεύματος στον ΜΝ προκύπτει $V_{\text{Μ}} > V_{\text{Ν}}$ ή $V_{\text{Μ}} - V_{\text{Ν}} > 0 \Rightarrow V_{\text{ΜΝ}} > 0$

$$V_{\text{ΜΝ}} = i R_{\text{ΜΝ}} = \frac{BvL}{2R^*(L+a)} R^* L \Rightarrow V_{\text{ΜΝ}} = \frac{BvL^2}{2(L+a)} \text{ δηλαδή κατά την διάρκεια της 3^{ης} φάσης η } V_{\text{ΜΝ}} \text{ είναι σταθερή}$$

ανεξάρτητη του x και ανεξάρτητη του t

ε₃) για την εξωτερικής δύναμης $F_{\varepsilon\xi}$ που ασκείται στο πλαίσιο $F_{\varepsilon\xi}=f(x)$ ή $F_{\varepsilon\xi}=f(t)$

Επειδή η ταχύτητα v είναι σταθερή, η εξωτερική δύναμη $F_{\varepsilon\xi}$ θα είναι διαρκώς αντίθετη στην δύναμη F_L Laplace που ασκείται από το μαγνητικό πεδίο.

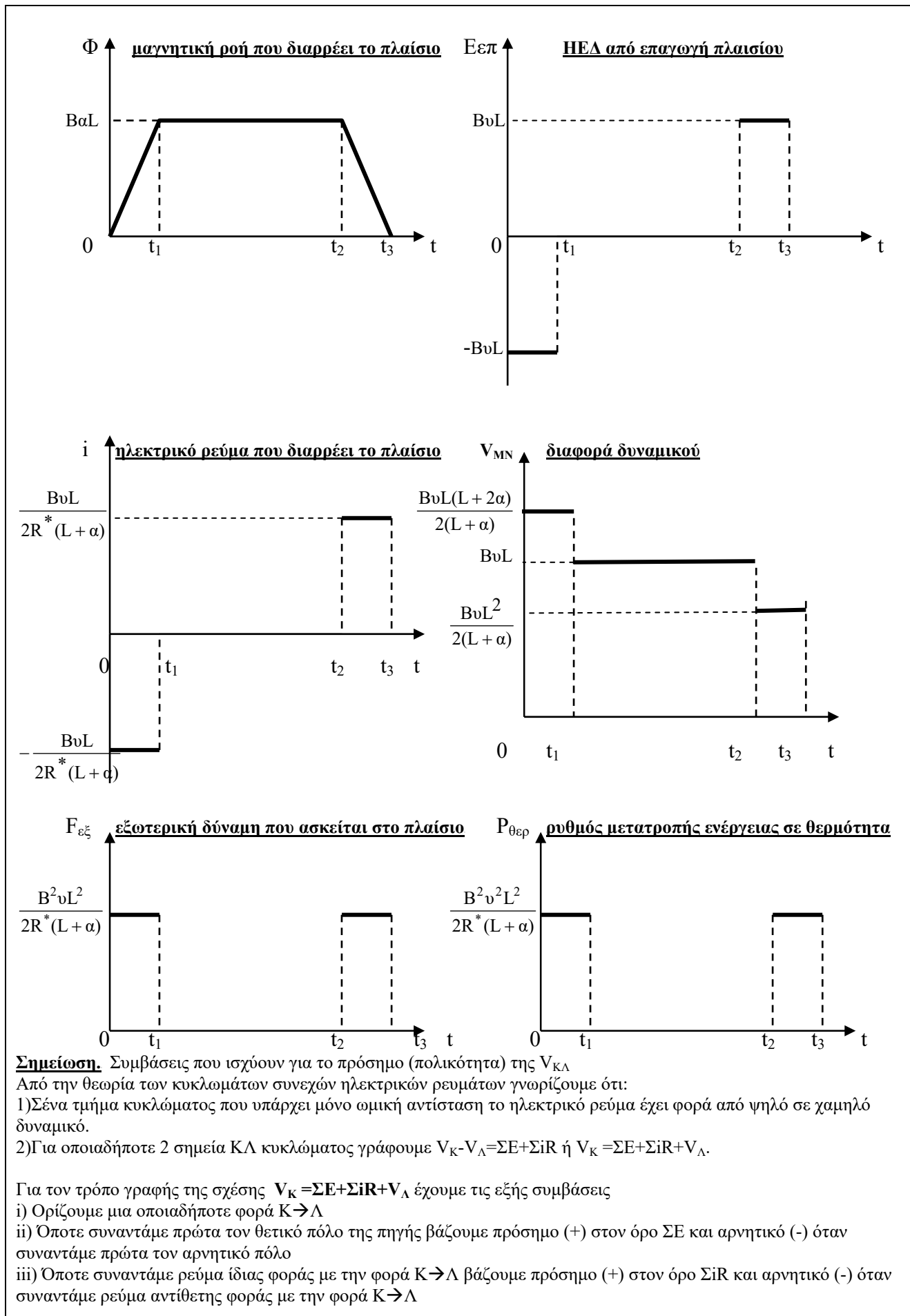
$$F_{\varepsilon\xi} = F_L = BiL \Rightarrow F_{\varepsilon\xi} = \frac{B^2 v L^2}{2R^*(L+a)} \text{ δηλαδή κατά την διάρκεια της 3^{ης} φάσης η } F_{\varepsilon\xi} \text{ είναι σταθερή}$$

ανεξάρτητη του x και ανεξάρτητη του t

στ₃) για τον ρυθμό μετατροπής ενέργειας σε θερμότητα λόγω φαινομένου Joule

$$P_{\text{θερ}} = i^2 R_{\text{ολ}} = i^2 2R^*(L+a) \Rightarrow P_{\text{θερ}} = \frac{B^2 v^2 L^2}{2R^*(L+a)}$$

Κατά την διάρκεια της 3^{ης} φάσης η $P_{\text{θερ}}$ είναι σταθερή ανεξάρτητη του x και ανεξάρτητη του t

Διαγράμματα $f(t)$ 

Περιστροφή πλαισίου με σταθερή γωνιακή ταχύτητα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.

Όταν ένα πλαίσιο περιστραφεί σε ομογενές μαγνητικό πεδίο τότε η μαγνητική ροή που θα το διαρρέει θα μεταβάλλεται με τον χρόνο. Το ίδιο θα συμβαίνει και για τον ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ όπου η τιμή της και το πρόσημο της θα μεταβάλλονται με τον χρόνο, οπότε σύμφωνα με τον Faraday θα εμφανιστεί στα άκρα του πλαισίου μία ΗΕΔ από επαγωγή που το πρόσημο της και το μέτρο της θα αλλάζουν με τον χρόνο. Μια τέτοια τάση ονομάζεται εναλλασσόμενη τάση.

Επομένως:

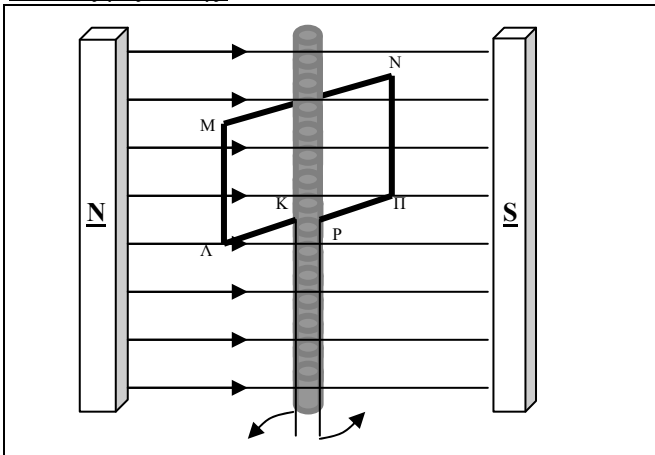
«Εναλλασσόμενη τάση παράγεται στα άκρα ενός πλαισίου το οποίο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο γύρω από άξονα κάθετο στις δυναμικές γραμμές του πεδίου και ο οποίος διέρχεται από τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του πλαισίου.»

αποδεικνύεται ότι η τάση που αναπτύσσεται στα άκρα του πλαισίου δίδεται από την σχέση

$$V = NB\omega S \sin \omega t \quad \text{ή} \quad \boxed{V = V_0 \sin \omega t} \quad \text{όπου } V_0 = NB\omega S$$

όπου N ο αριθμός των σπειρών του πλαισίου B η μαγνητική επαγωγή του μαγνητικού πεδίου S το εμβαδόν του πλαισίου και ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του πλαισίου

Απόδειξη εξίσωσης:



Επειδή οι αγωγοί ΚΛ, ΜΝ, ΠΡ, κινούνται παράλληλα στο B στα άκρα τους δεν έχουμε τάση από επαγωγή. Η τάση V του πλαισίου θα οφείλεται στην τάση που αναπτύσσεται στους αγωγούς ΜΛ και ΠΝ.

Έστω σε χρόνο Δt το πλαίσιο έχει στραφεί κατά $\phi = \omega \Delta t$ τότε αξιοποιώντας την σχέση $E_{\text{επ}} = B \frac{d\Phi}{dt}$ προκύπτει :

$$V = V_{\text{AM}} + V_{\text{ΠN}} = B(M\Lambda) \sin \omega \Delta t + B(\Pi N) \sin(\pi - \omega \Delta t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 2B(M\Lambda) \sin \omega t \quad (1)$$

όμως η ταχύτητα v με την κυκλική συχνότητα περιστροφής ω του πλαισίου συνδέονται με τη σχέση $v = \omega r$ όπου $r = (MN)/2$ οπότε η (1) γίνεται:

$$V = 2B(M\Lambda) \omega \frac{(MN)}{2} \sin \omega t$$

επειδή το εμβαδόν του πλαισίου είναι $S = (MN)(M\Lambda)$ προκύπτει:

$$V = B\omega S \sin \omega t \quad \text{ή} \quad V = V_0 \sin \omega t \quad \text{όπου } V_0 = B\omega S$$

Αν το πλαίσιο αποτελείται από N σπείρες τότε οι εξισώσεις γίνονται:

$$V = NB\omega S \sin \omega t \quad \text{ή} \quad \boxed{V = V_0 \sin \omega t} \quad \text{όπου } V_0 = NB\omega S$$

Ορισμοί εναλλασσόμενου ρεύματος και εναλλασσόμενης τάσης

Εναλλασσόμενο ρεύμα ονομάζουμε το ηλεκτρικό ρεύμα που το μέτρο του και η φορά του μεταβάλλονται με το χρόνο.

Εναλλασσόμενη τάση ονομάζουμε την τάση που το μέτρο της και η πολικότητά της μεταβάλλονται με το χρόνο.

Αν η μεταβολή του μέτρου είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου τότε το ρεύμα ή η τάση χαρακτηρίζονται αντίστοιχα αρμονικά εναλλασσόμενο ρεύμα ή αρμονικά εναλλασσόμενη τάση.

Τα εναλλασσόμενα ρεύματα και οι εναλλασσόμενες τάσεις που θα μελετήσουμε θεωρούμε ότι είναι αρμονικά εναλλασσόμενα και έχει καθιερωθεί ότι: όταν λέμε εναλλασσόμενο ρεύμα ή τάση να εννοούμε αρμονικά εναλλασσόμενο ρεύμα ή τάση.

Εξίσωση και στοιχεία εναλλασσόμενου ρεύματος

Η εξίσωση που παρέχει το μέτρο του εναλλασσόμενου ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$$\boxed{I = I_0 \sin(\omega t + \phi)}$$

όπου

I = η στιγμιαία τιμή της έντασης τη χρονική στιγμή t

I_0 = η μέγιστη τιμή της έντασης που ονομάζεται πλάτος

$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ = η κυκλική συχνότητα μεταβολής του ρεύματος που μετριέται σε rad/sec.

f = η γραμμική συχνότητα μεταβολής που μετριέται σε Hz και ορίζεται ως ο αριθμός των πλήρων εναλλαγών τιμών της έντασης που γίνονται σε χρόνο t προς το χρόνο αυτό.

T = η περίοδος (σε sec) και ορίζεται ως ο χρόνος για να γίνει μια πλήρης εναλλαγή τιμών της έντασης

$(\omega t + \phi)$ = φάση (σε rad) γωνία που διαρκώς αυξάνεται με το χρόνο και της οποίας το ημίτονο κάθε χρονική στιγμή ισούται με το λόγο της στιγμιαίας τιμής προς το πλάτος

ϕ = αρχική φάση (σε rad) γωνία ανεξάρτητη χρόνου και της οποίας το ημίτονο τη χρονική στιγμή $t=0$ ισούται με το λόγο της στιγμιαίας τιμής προς το πλάτος.

$$* \text{Αν τη χρονική στιγμή } t=0 \text{ η ένταση είναι μηδέν, τότε } \phi=0 \text{ και } I = I_0 \sin \omega t$$

Εξίσωση και στοιχεία εναλλασσόμενης τάσης

Η εξίσωση που παρέχει το εναλλασσόμενη τάση σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$$V = V_0 \eta \mu(\omega t + \phi)$$

όπου

V = η στιγμιαία τιμή της τάσης τη χρονική στιγμή t

V_0 = η μέγιστη τιμή της τάσης που ονομάζεται πλάτος

$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ = η κυκλική συχνότητα μεταβολής του ρεύματος που μετρείται σε rad/sec.

f = η γραμμική συχνότητα μεταβολής που μετρείται σε Hz και ορίζεται ως ο αριθμός των πληρών εναλλαγών τιμών της τάσης που γίνονται σε χρόνο t προς το χρόνο αυτό.

T = η περίοδος (σε sec) και ορίζεται ως ο χρόνος για να γίνει μια πλήρης εναλλαγή τιμών της τάσης.

$(\omega t + \phi)$ = φάση (σε rad) γωνία που διαρκώς αυξάνεται με το χρόνο και της οποίας το ημίτονο κάθε χρονική στιγμή ισούται με το λόγο της στιγμιαίας τιμής προς το πλάτος

ϕ = αρχική φάση (σε rad) γωνία ανεξάρτητη χρόνου και της οποίας το ημίτονο τη χρονική στιγμή $t=0$ ισούται με το λόγο της στιγμιαίας τιμής προς το πλάτος.

*Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ η τάση είναι μηδέν, τότε $\phi=0$ και $V=V_0 \eta \mu \omega t$

ΕΝΕΡΓΟΣ ΕΝΤΑΣΗ ΚΑΙ ΤΑΣΗ.

Οι μετρήσεις της έντασης των εναλλασσομένων ρευμάτων και των τάσεων γίνεται με αμπερόμετρα και βολτόμετρα τα οποία μετράνε τα θερμικά αποτελέσματα του ρεύματος και όχι τα μαγνητικά και αυτό επειδή η φορά του ρεύματος μεταβάλλεται (υπενθυμίζεται ότι τα όργανα στα συνεχή ρεύματα μπορούν να μετράνε είτε τα θερμικά είτε τα μαγνητικά αποτελέσματα). Οι ενδείξεις των οργάνων δεν είναι ούτε οι στιγμιαίες τιμές ούτε τα πλάτη αλλά οι ενεργές τιμές των τάσεων και εντάσεων αντίστοιχα.

Ενεργός ένταση εναλλασσόμενου ρεύματος ονομάζουμε την τιμή συνεχούς ρεύματος το οποίο όταν περάσει από την ίδια αντίσταση στον ίδιο χρόνο θα προκαλέσει τα ίδια θερμικά αποτελέσματα με αυτά που προκαλεί το εναλλασσόμενο.

Η σχέση μεταξύ τιμής ενεργού έντασης I_{ev} και πλάτους I_0 της έντασης εναλλασσόμενου ρεύματος είναι $I_{ev} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

Ενεργός τάση ονομάζουμε τη συνεχή τάση η οποία δίνει ρεύμα ίδιο με την ενεργό τιμή του εναλλασσόμενου ρεύματος.

Η σχέση μεταξύ τιμής ενεργού τάσης V_{ev} και πλάτους V_0 της εναλλασσόμενης τάσης είναι $V_{ev} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$

ΙΣΧΥΣ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

Στα συνεχή ρεύματα η ισχύς δίδεται από τον τύπο $P=VI$ όπου V η συνεχής τάση και I η ένταση του συνεχούς ρεύματος.

Στα εναλλασσόμενα ρεύματα επειδή τα V και I μεταβάλλονται με το χρόνο η στιγμιαία ισχύς θα είναι συνάρτηση του χρόνου, επειδή όμως η ισχύς σε μέγεθος θέλουμε να είναι ανεξάρτητη του χρόνου αντί της στιγμιαίας ισχύος χρησιμοποιούμε τη μέση ισχύ η οποία ισούται με το πηλίκο της ενέργειας W που καταναλώνει το κύκλωμα σε χρόνο μιας περιόδου προς το χρόνο αυτό, δηλαδή

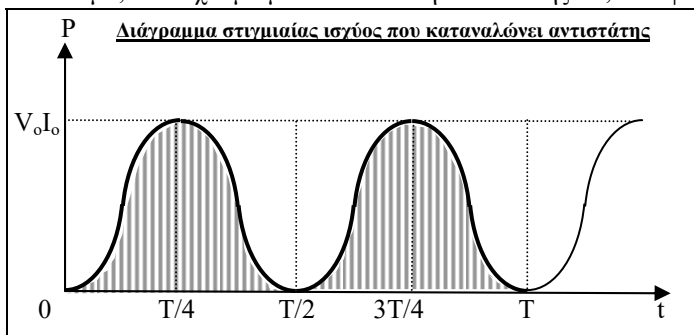
$$P = \frac{W}{T}$$

Αποδεικνύεται ότι η μέση ισχύς εναλλασσόμενου ρεύματος που καταναλώνεται από έναν αντιστάτη δίδεται από τη σχέση :

$$P = V_{ev} I_{ev} = I_{ev}^2 R = \frac{V_{ev}^2}{R}$$

Όπου V_{ev} , I_{ev} οι ενεργές τιμές τάσης και έντασης και R η ωμική αντίσταση του αντιστάτη.

Σε κύκλωμα, που έχουμε μόνο αντιστάτη αντίστασης R , αν εφαρμόσουμε εναλλασσόμενη τάση με εξίσωση $V=V_0 \eta \mu \omega t$,



τότε η εξίσωση της εναλλασσόμενης έντασης είναι $I=I_0 \eta \mu \omega t$ με $V_0=I_0 R$ δηλαδή τα V και I θα είναι συμφασικά. Σ' αυτή την περίπτωση η στιγμιαία ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης θα έχει εξίσωση $P=VI=V_0 I_0 \eta^2 \omega t$ και η γραφική παράσταση $P=f(t)$ είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

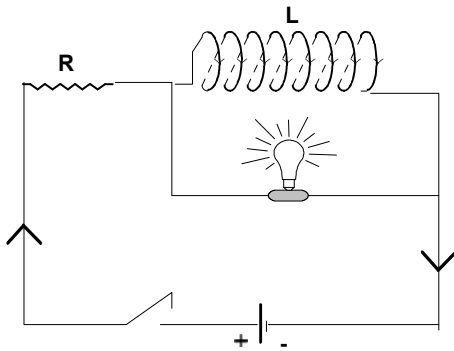
Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου γραμμοσκιασμένου σχήματος είναι αριθμητικά ίσο με την ενέργεια που καταναλώνεται σε χρόνο μιας περιόδου T δηλαδή ίσο με $W_T = V_{ev} I_{ev} T$

Διαφορές και πλεονεκτήματα εναλλασσόμενου ρεύματος απέναντι συνεχούς.**α) Δ ι α φ ο ρ έ ς**

- 1) Η φορά του εναλλασσόμενου ρεύματος μεταβάλλεται περιοδικά με το χρόνο ενώ του συνεχούς παραμένει σταθερή.
- 2) Η εναλλασσόμενη τάση δεν προκαλεί ηλεκτρόλυση ενώ η συνεχής προκαλεί.
- 3) Το εναλλασσόμενο ρεύμα δε φορτίζει τους συσσωρευτές ενώ το συνεχές τους φορτίζει.
- 4) Οι μετασχηματιστές λειτουργούν με εναλλασσόμενα ρεύματα και όχι με συνεχή.
- 5) Το εναλλασσόμενο ρεύμα δε διαρρέει κυκλώματα που περιέχουν πυκνωτές ενώ το συνεχές τα διαρρέει.
- 6) Τα πηνία όταν διαρρέονται από εναλλασσόμενα ρεύματα παρουσιάζουν και επαγωγική και ωμική αντίσταση ενώ όταν διαρρέονται από συνεχή παρουσιάζουν μόνο ωμική.
- 7) Όταν ένας αγωγός διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα τότε δημιουργεί γύρω του ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ενώ όταν διαρρέεται από συνεχές προκαλεί μόνο μαγνητικό.

β) Π λ ε ο ν ε κ τ ή μ α τ α

- 1) Η λειτουργία των μετασχηματιστών γίνεται μόνο με εναλλασσόμενο ρεύμα και επειδή με τους μετασχηματιστές μπορούμε να μεταφέρουμε ηλεκτρική ενέργεια υπό μεγάλη τάση και να την υποβιβάσουμε στον τόπο κατανάλωσης εξασφαλίζουμε οικονομία στην μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας
- 2) Οι ηλεκτρικές μηχανές εναλλασσόμενου ρεύματος είναι πιο απλές πιο οικονομικές και έχουν μεγαλύτερο συντελεστή απόδοσης έναντι του συνεχούς.



Αν διακόψουμε ξαφνικά το ρεύμα στο κύκλωμα τότε παρατηρούμε ότι η λάμπα αντί να σβήσει φωτοβολεί πιο ζωηρά και μετά σβήνει.

β)Εξήγηση: Όταν μεταβάλλουμε το ρεύμα στο πηνίο τότε θα μεταβληθεί η μαγνητική επαγωγή του πηνίου. Αυτή η μεταβολή θα έχει σαν αποτέλεσμα να μεταβάλει τη μαγνητική ροή του ίδιου του πηνίου (αυτεπαγωγή). Οπότε σύμφωνα με το νόμο του Faraday να εμφανιστεί στα άκρα του πηνίου μια ΗΕΔ η οποία θα προκαλέσει την έντονη φωτοβολία της λάμπας.

γ)Νόμος: Η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα ενός πηνίου είναι ανάλογη του ρυθμού με τον οποίο μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος στο ίδιο το πηνίο δηλαδή

$$E_{\text{αυτ}} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Το μείον (-) ερμηνεύεται από τον κανόνα του Lenz και το L ονομάζεται συντελεστής αυτεπαγωγής ο οποίος εξαρτάται από τα γεωμετρικά στοιχεία του πηνίου και από τη μαγνητική διαπερατότητα.

δ)Μονάδα του συντελεστή αυτεπαγωγής

$$1 \text{ Henry} = 1 \text{ Volt sec} / \text{Ambere}$$

Ένα Henry είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής ενός ρευματοφόρου πηνίου που όταν μεταβληθεί η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που το διαρρέει κατά 1 Ambere σε χρόνο 1sec εμφανίζεται στα άκρα του ηλεκτρεργετική δύναμη ίση με 1 Volt.

Υπολογισμός συντελεστή αυτεπαγωγής

Έστω πηνίο μήκους ℓ αριθμού σπειρών N και εμβαδού σπείρας A. Αν σε χρόνο Δt μεταβάλλουμε την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο κατά ΔI , τότε θα μεταβληθεί το μαγνητικό πεδίο που προκαλεί το πηνίο κατά:

$$\Delta B = \mu_0 \eta (\Delta I) = \mu_0 \frac{N}{\ell} (\Delta I) \quad (1)$$

Λόγω της μεταβολής ΔB θα μεταβληθεί η μαγνητική ροή που διαρρέει το ίδιο το πηνίο κατά:

$$\Delta \Phi = A \Delta B \quad \text{οπότε λόγω της (1)} \Rightarrow \Delta \Phi = \mu_0 \frac{N}{\ell} A \Delta I \quad (2)$$

Λόγω της μεταβολής $\Delta \Phi$ σύμφωνα με το νόμο της επαγωγής θα εμφανιστεί ΗΕΔ που δίδεται από τη σχέση:

$$E = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad \text{λόγω της (2)} \Rightarrow E = -\mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (3)$$

συγκρίνοντας τη σχέση (3) με τη σχέση $E = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$ προκύπτει ότι: $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A$

αν τώρα το πηνίο περιέχει υλικό μαγνητικής διαπερατότητας μ τότε ο συντελεστής αυτεπαγωγής θα δίδεται από την σχέση:

$$L = \mu \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A$$

Ενέργεια μαγνητικού πεδίου

Αποδεικνύεται ότι, όταν ένα πηνίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης I τότε η συνολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο σαν ενέργεια μαγνητικού πεδίου, δίδεται από την σχέση

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

Η ενέργεια αυτή μπορεί να αποδοθεί σ ένα κύκλωμα ως ηλεκτρική ενέργεια, όπως συμβαίνει στο πείραμα αυτεπαγωγής που ο λαμπτήρας με την διακοπή του ρεύματος, αντί να σβήσει παίρνει ενέργεια από το πηνίο και φωτοβολεί πιο ζωηρά.



Ευγένιος Ντελακρουά
Lycée Franco-Hellénique



Cambridge Assessment
International Education
Cambridge International School

ΦΥΣΙΚΗ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

Κεφάλαιο 6^ο

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Κεφάλαιο 7^ο

ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

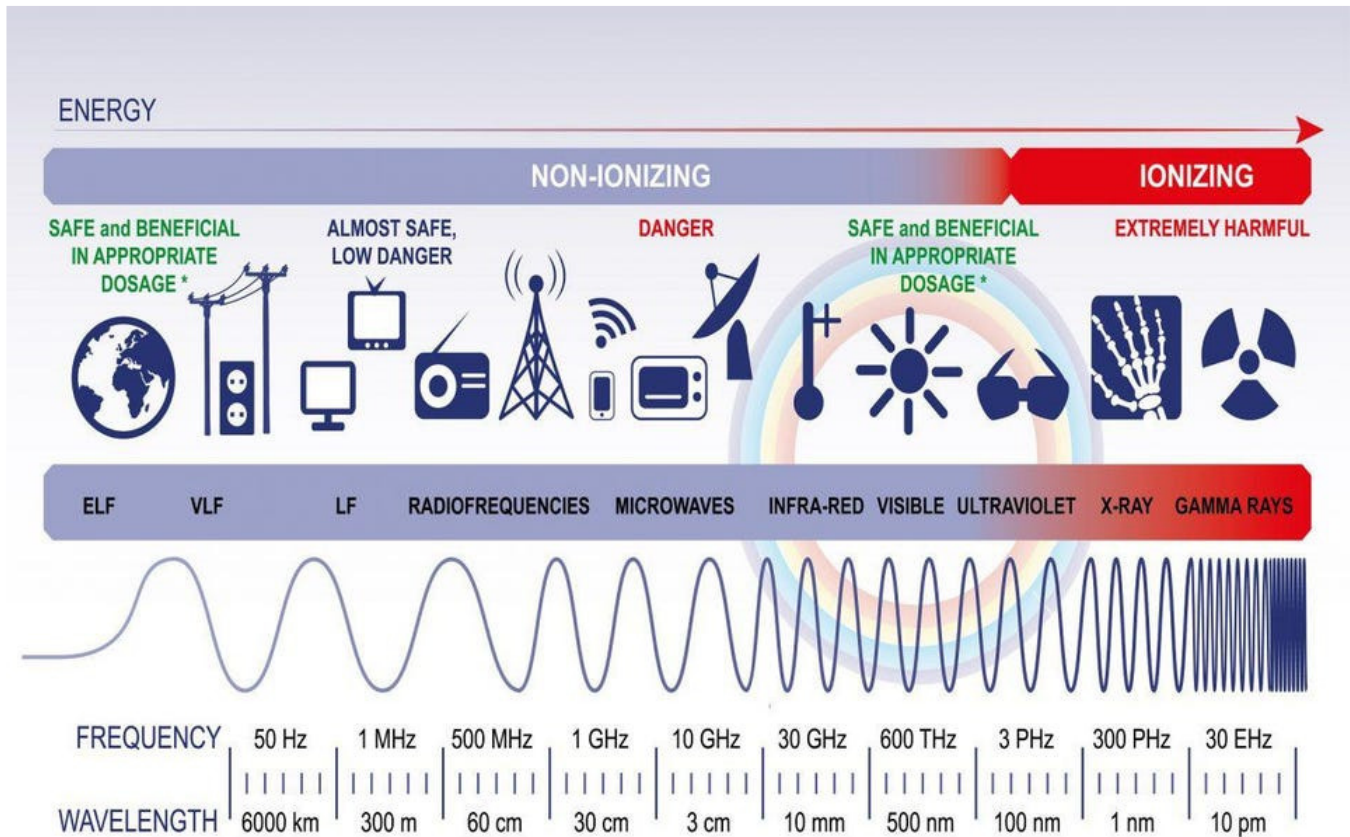
Ομάδα Φυσικής
Α. ΛΙΒΑΝΟΣ
Α. ΤΖΙΜΑ
Χ. ΑΓΡΙΟΔΗΜΑΣ

Περιεχόμενα

6. Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα	4
6.1 Παραγωγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.	4
6.2 Φάσμα ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.....	7
6.3 Λυμένα παραδείγματα.....	9
7. Κβαντομηχανική	12
7.1 Ακτινοβολία μέλανος σώματος.....	12
7.1.1 Τι είναι μέλαν σώμα και τι ακτινοβολία του μέλανος σώματος;	12
7.1.2 Ένταση ακτινοβολίας, I.....	14
7.1.3 Φάσμα θερμικής ακτινοβολίας.....	15
7.1.4 Νόμοι ακτινοβολίας μέλανος σώματος.	16
7.1.5 Η ερμηνεία της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος.....	17
7.1.6 Λυμένα Παραδείγματα	22
7.2 Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.....	26
7.2.1 Εξαγωγή ηλεκτρονίων από μέταλλα.	26
7.2.2 Περιγραφή φωτοηλεκτρικού φαινομένου	27
7.2.3 Περιγραφή της διάταξης για τη μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου	28
7.2.4 Πειραματικές διαπιστώσεις από τη μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.....	29
7.2.5 Αποτυχία ερμηνείας του φωτοηλεκτρικού φαινομένου από την κλασική θεωρία.....	30
7.2.6 Θεωρία Einstein. Εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.....	32
7.2.7 Ερμηνεία των πειραματικών δεδομένων με βάση τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein	33
7.2.8 Η ορμή των φωτονίων	37
7.2.9 Λυμένα παραδείγματα.....	38
7.3 Φαινόμενο Compton.....	44
7.3.1 Εισαγωγή-Ακτίνες X (Ακτίνες Röntgen)	44
7.3.2 Φαινόμενο Compton.....	46
7.3.3 Ερμηνεία φαινομένου με βάση την κβαντική θεώρηση.....	48
7.3.4 Μαθηματική περιγραφή και χρήσιμες σχέσεις	49
7.3.5 Λυμένα παραδείγματα.....	52
7.4 Η κυματική φύση της ύλης.....	58
7.4.1 Κυματοσωματιδιακός дуΐσμός του φωτός	58
7.4.2 Υπόθεση de Broglie	58
7.4.3 Λυμένα παραδείγματα.....	59
7.5 Η αρχή της αβεβαιότητας ή αρχή της απροσδιοριστίας.....	61
7.5.1 Μαθηματική έκφραση της αρχής της αβεβαιότητας.....	62
7.5.2 Λυμένα παραδείγματα.....	67
7.6 Κυματοσυνάρτηση και εξίσωση Schrodinger, (Σρέντινγκερ).....	68
Βιβλιογραφία.....	70

Κεφάλαιο 6.

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα



6. Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

6.1 Παραγωγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι η ταυτόχρονη διάδοση ενός ηλεκτρικού και ενός μαγνητικού πεδίου.

Γενικότερα «είναι εκπομπή στον χώρο ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας υπό μορφή κυμάτων που ονομάζονται ηλεκτρομαγνητικά κύματα.»

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός. Σε όλα τα άλλα υλικά διαδίδονται με μικρότερη ταχύτητα.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δημιουργούνται από **μεταβαλλόμενα** ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο ή ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο δεν παράγει ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Αυτό σημαίνει ότι ούτε τα ακίνητα φορτία ούτε τα φορτία που κινούνται με σταθερή ταχύτητα (σταθερά ρεύματα) μπορούν να δημιουργήσουν ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Όταν, όμως, έχουμε ηλεκτρικά φορτία που επιταχύνονται, τα μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία που δημιουργούν έχουν ως αποτέλεσμα την παραγωγή ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Επομένως:

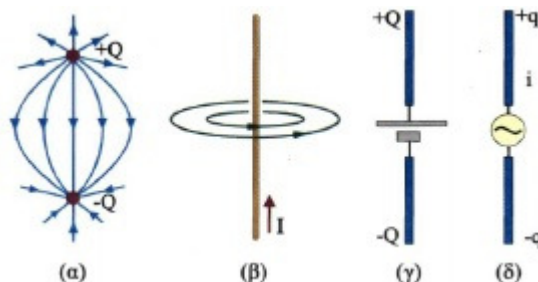
Η αιτία δημιουργίας του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι η επιταχυνόμενη κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων.

Μηχανισμός δημιουργίας ηλεκτρομαγνητικού κύματος

Τα **ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα** είναι ένα σύστημα δύο μεταλλικών ράβδων συνδεδεμένες με πηγή εναλλασσόμενης τάσης με αποτέλεσμα να αποκτήσουν ετερόσημα φορτία $+q$, $-q$ που μεταβάλλονται ημιτονοειδώς με το χρόνο, αποτελούν κοινή μέθοδο παραγωγής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στους ραδιοφωνικούς και τηλεοπτικούς σταθμούς. Κατά την ταλάντωση του ηλεκτρικού φορτίου στην κεραία:

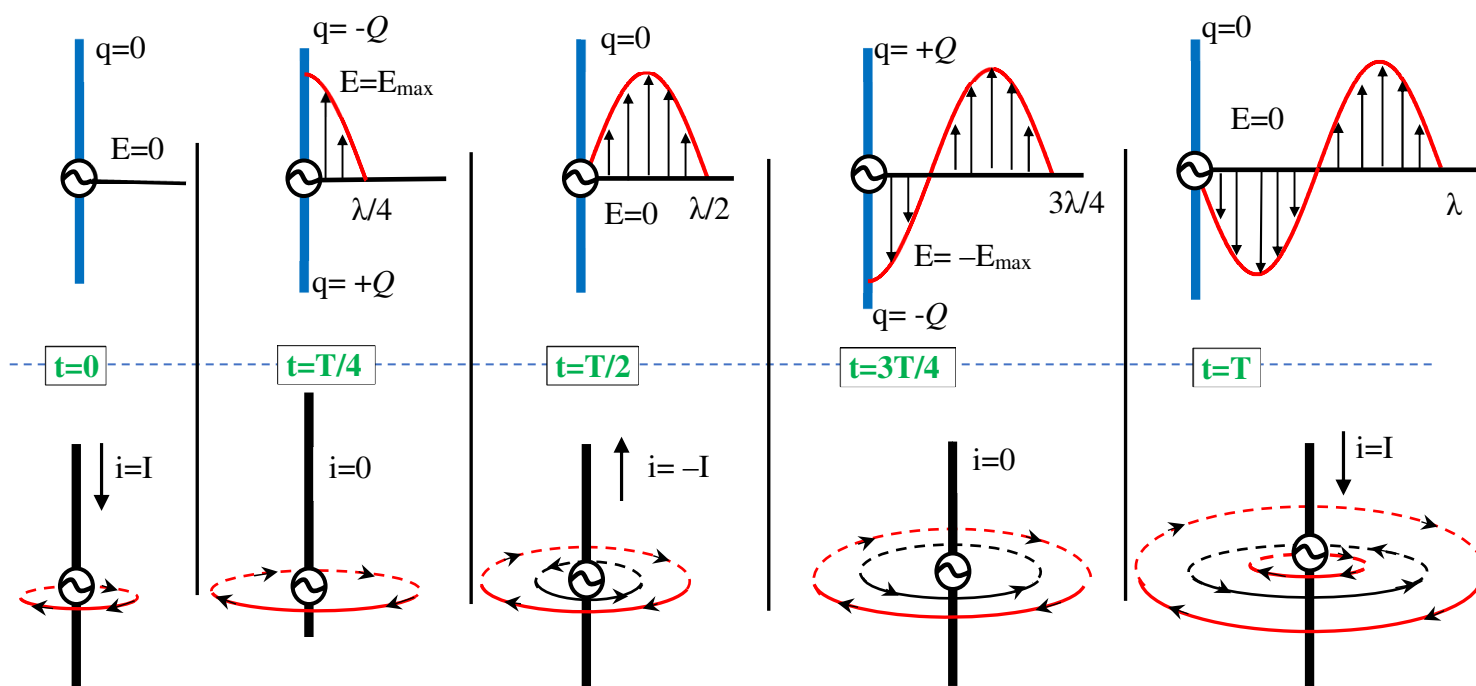
- ✓ όταν τα φορτία στα άκρα της έχουν μέγιστη τιμή, το ρεύμα σ' αυτή είναι μηδέν, και
- ✓ όταν τα φορτία στα άκρα της μηδενίζονται, η κεραία διαρρέεται από ρεύμα μέγιστης έντασης.

(α) Ηλεκτρικό πεδίο δύο σημειακών φορτίων. (β) Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου αγωγού, (γ) Μεταλλικοί αγωγοί συνδέονται με πηγή συνεχούς τάσης. Οι αγωγοί φορτίζονται με φορτία $\pm Q$. (δ) Οι αγωγοί συνδέονται με γεννήτρια εναλλασσόμενης τάσης. Το φορτίο των αγωγών μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με το χρόνο. Η διάταξη διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα.



Ο Τζέιμς Κλερκ Μάξγουελ (James Clerk Maxwell, 13 Ιουνίου 1831 – 5 Νοεμβρίου 1879) ήταν Σκωτσέζος θεωρητικός φυσικός. Το πιο επιφανές επίτευγμά του ήταν η διατύπωση μιας σειράς εξισώσεων που ένωσαν προηγουμένως άσχετες παρατηρήσεις, πειράματα και εξισώσεις ηλεκτρισμού, μαγνητισμού και οπτικής σε μία συνεπή θεωρία. Η θεωρία του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού καταδεικνύει ότι ο ηλεκτρισμός, ο μαγνητισμός και το φως είναι όλα εκδηλώσεις του ίδιου φαινομένου, καλούμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Τα επιτεύγματα του Μάξγουελ που αφορούν τον ηλεκτρομαγνητισμό αποκαλούνται «η δεύτερη σημαντικότερη ενοποίηση στη φυσική», μετά την πρώτη που πέτυχε ο Ισαάκ Νεύτων.

Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζεται ο κύκλος λειτουργίας του ταλαντούμενου ηλεκτρικού διπόλου.



- I. Τη χρονική στιγμή $t=0$ τα φορτία στα άκρα των αγωγών είναι μηδέν και επομένως δεν έχει δημιουργηθεί ηλεκτρικό πεδίο ($E=0$). Οι αγωγοί διαρρέονται από μέγιστο ρεύμα και στο χώρο έχει δημιουργηθεί μαγνητικό πεδίο.
- II. Τη χρονική στιγμή $t=T/4$ τα φορτία στα άκρα των αγωγών έχουν πάρει τη μέγιστη τιμή τους $+Q$ και $-Q$. Το ηλεκτρικό πεδίο που είχε δημιουργηθεί στο χρονικό διάστημα 0 έως $T/4$ έχει διαδοθεί κατά $\lambda/4$ απομακρυνόμενο από τους αγωγούς. Το ρεύμα μηδενίζεται στιγμιαία. Το μαγνητικό πεδίο που είχε δημιουργηθεί απλώνεται στο χώρο.
- III. Τη χρονική στιγμή $t=T/2$ τα φορτία στα άκρα των ράβδων μηδενίζονται. Το ηλεκτρικό πεδίο έχει απομακρυνθεί κατά $\lambda/2$ από τους αγωγούς. Το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει τη χρονική στιγμή $t = T/2$ τις ράβδους είναι μέγιστο με αντίθετη όμως φορά. Το μαγνητικό πεδίο δημιουργείται εκ νέου με αντίθετη φορά των δυναμικών γραμμών του.
- IV. Τη χρονική στιγμή $t=3T/4$ τα φορτία στα άκρα των ράβδων έχουν πάρει μέγιστες τιμές $-Q$ και $+Q$. Το ηλεκτρικό πεδίο έχει απομακρυνθεί κατά $3\lambda/4$ από τους αγωγούς. Το ηλεκτρικό ρεύμα είναι μηδέν. Το μαγνητικό πεδίο απομακρύνεται με την ταχύτητα c του φωτός από τους αγωγούς.
- V. Τη χρονική στιγμή $t=T$ τα φορτία στα άκρα των ράβδων μηδενίζονται. Το ηλεκτρικό πεδίο έχει απομακρυνθεί απόσταση λ από τους αγωγούς. Οι αγωγοί διαρρέονται πάλι από ρεύμα και γύρω τους δημιουργείται εκ νέου μαγνητικό πεδίο.

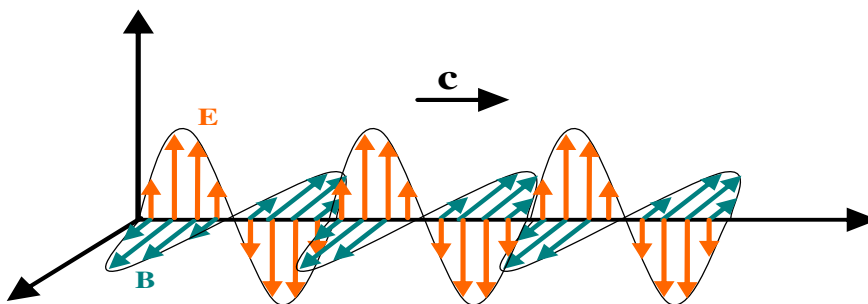
Το φαινόμενο επαναλαμβάνεται συνεχώς και στο χώρο διαδίδονται ένα ηλεκτρικό και ένα μαγνητικό πεδίο. Τα δύο πεδία κοντά στο ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο παρουσιάζουν διαφορά φάσης 90° (όταν το ένα είναι μέγιστο, το άλλο είναι μηδέν). Σε μεγάλες όμως αποστάσεις τα δύο πεδία είναι σε φάση.

Περισσότερα για την παραγωγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από κεραία στον ακόλουθο σύνδεσμο.

<https://www.youtube.com/watch?v=ZaXm6wau-jc&t=8s>

Χαρακτηριστικά ηλεκτρομαγνητικού κύματος

α. Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι εγκάρσιο, τα διανύσματα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.



β. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, σε αντίθεση με τα μηχανικά, δεν απαιτούν την ύπαρξη ελαστικού μέσου για την διάδοσή τους.

γ. Κάθε στιγμή ο λόγος των μέτρων, των εντάσεων του ηλεκτρικού E και του μαγνητικού B είναι ίσος με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος v .

$$\frac{E}{B} = v$$

δ. Για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ισχύει η θεμελιώδης κυματική εξίσωση $v = \lambda \cdot f$ (στο κενό $c = \lambda_0 \cdot f = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$).

ε. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα όπως και στα μηχανικά υπακούουν στην αρχή της επαλληλίας

στ. Οι εξισώσεις που περιγράφουν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι:

$$E = E_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$B = B_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που δημιουργούνται από κεραίες το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο κοντά στην κεραία έχουν διαφορά φάσης 90° (όταν το ένα είναι μέγιστο το άλλο είναι μηδέν). Σε μεγάλη όμως απόσταση από την κεραία τα δύο πεδία είναι σε φάση. Οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα με τα πεδία σε φάση.

6.2 Φάσμα ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

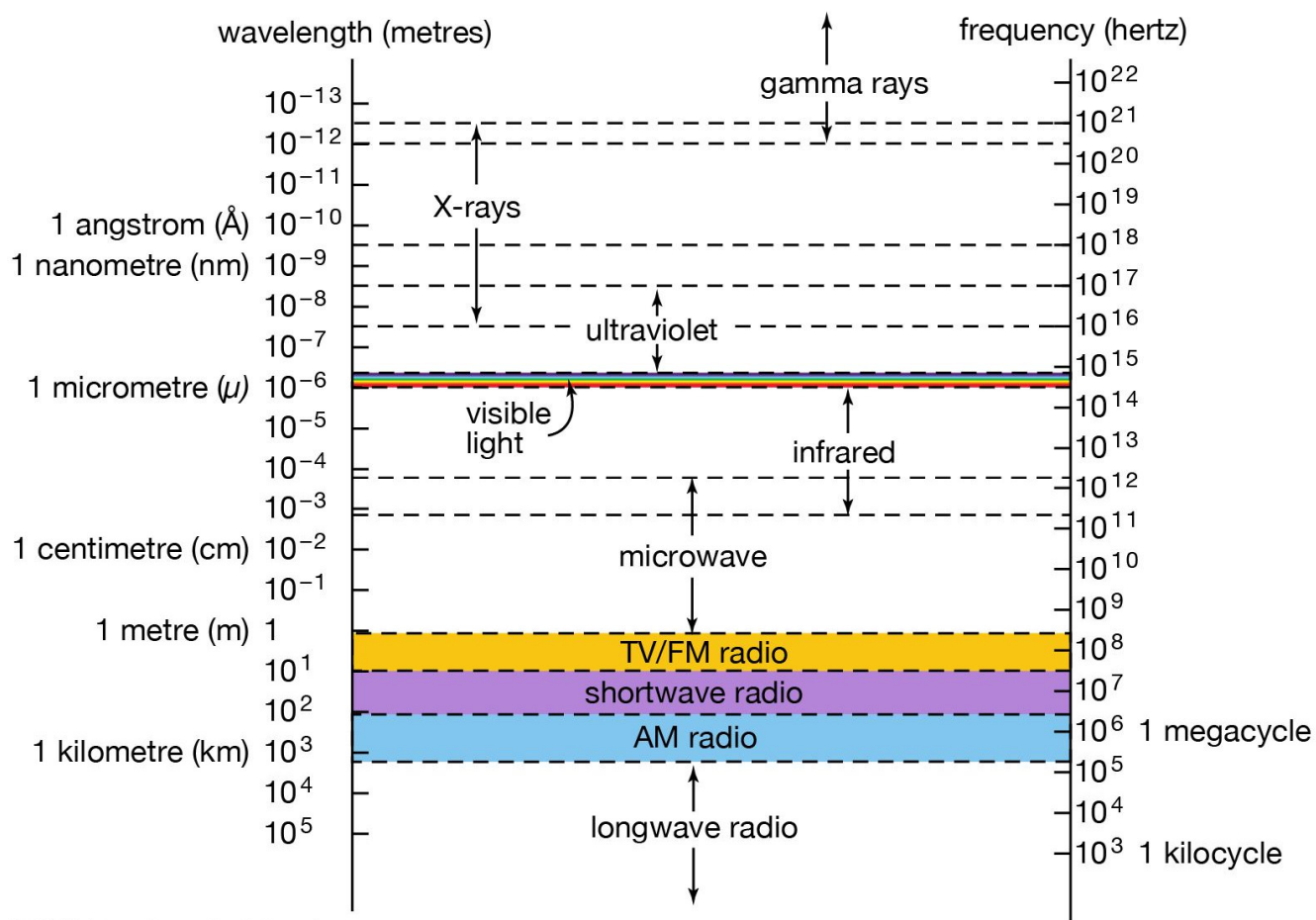
Ηλεκτρομαγνητικά κύματα παράγονται από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα αλλά και κατά τις αποδιεγέρσεις των ατόμων ή των πυρήνων. Έτσι καλύπτουν ένα πολύ μεγάλο εύρος συχνοτήτων η οποία ονομάζεται ηλεκτρομαγνητικό φάσμα. Ανάλογα με τη συχνότητα τους έχουν διαφορετικές ιδιότητες και εφαρμογές. Ένας (όχι αυστηρός) διαχωρισμός του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος (κατά τη φθίνουσα τιμή του μήκους κύματος) των ακτινοβολιών στο κενό είναι:

Ονομασία	Μήκος κύματος	Πως παράγονται	Πως ανιχνεύονται	Χρήσεις
Ραδιοκύματα	Από 10^5 m έως μερικά εκατοστά περίπου	Από ηλεκτρονικά κυκλώματα, όπως το κύκλωμα L – C	Με κεραίες ραδιοφώνου τηλεόρασης κ.λ.π.	Ραδιοφωνία, τηλεόραση, τηλέφωνα κ.λ.π.
Μικροκύματα	Από 30 cm έως 1 mm περίπου	Από ηλεκτρονικά κυκλώματα	Με ραντάρ	Φούρνοι μικροκυμάτων, ραδιοαστρονομία, ραντάρ κ.λ.π.
Υπέρυθρη ακτινοβολία	Από 1 mm έως $7 \cdot 10^{-7}$ m (700 nm) περίπου	Εκπέμπεται από θερμαινόμενα σώματα	Με φωτογραφικά φιλμ ή θέρμανσης του δέρματος κ.λ.π.	Ειδικές φωτογραφήσεις τη νύχτα ή μέσα στα σύννεφα
Ορατή ακτινοβολία	Από 700 nm έως 400 nm περίπου	Από τις αποδιεγέρσεις των ηλεκτρονίων στα άτομα	Από το ανθρώπινο μάτι, φωτοκύτταρα, φωτογραφικά φιλμ κ.λ.π.	Όραση, φωτοσύνθεση, οπτικές ίνες, φασματοσκοπία κ.λ.π.
Υπεριώδης ακτινοβολία	Από 400 nm έως $6 \cdot 10^{-8}$ m περίπου	Από τον Ήλιο και από τις αποδιεγέρσεις ηλεκτρονίων ορισμένων ατόμων	Με φωτογραφικά φιλμ και φωτοκύτταρα	Αισθητική Ιατρική, αποστείρωση ιατρικών εργαλείων κ.λ.π.
Ακτίνες X (ή ακτίνες Rontgen)	Από 10^{-8} m έως 10^{-13} m περίπου	Από την επιβράδυνση ταχέως κινούμενων ηλεκτρονίων καθώς προσκρούουν σε μεταλλικό στόχο	Με φωτογραφικά φιλμ	Στην Ιατρική για διαγνωστικούς σκοπούς και στη μελέτη της δομής των κρυστάλλων
Ακτίνες γ	Από 10^{-10} m έως 10^{-14} m περίπου	Από τις αποδιεγέρσεις ραδιενεργών πυρήνων και από πυρηνικές αντιδράσεις	Με απαριθμητή Geiger - Muller	Εργαστηριακή μελέτη κρυσταλλικών δομών (ιδιαίτερα επικίνδυνες για τον άνθρωπο)

Ορατό φως: είναι το μέρος εκείνο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που ανιχνεύει το ανθρώπινο μάτι. Το μήκος κύματος του ορατού φωτός κυμαίνεται από 400 nm έως 700 nm περίπου για διάδοση **στο κενό**. Το ανθρώπινο μάτι μπορεί να διακρίνει τις παρακάτω έξι βασικές ομάδες χρωμάτων.

Μήκος κύματος στο κενό σε nm	Χρώμα
700 – 630	Ερυθρό
630 – 590	Πορτοκαλί
590 – 560	Κίτρινο
560 – 480	Πράσινο
480 – 440	Κυανό
440 – 400	Ιώδες

Μια ακτινοβολία που περιέχει μήκη κύματος σε μια πολύ στενή περιοχή ονομάζεται μονοχρωματική. Το απόλυτα μονοχρωματικό φως αποτελεί μια εξιδανίκευση. Τα laser παράγουν φως που πλησιάζει πολύ στο μονοχρωματικό.



© 2015 Encyclopædia Britannica, Inc.

6.3 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος, το οποίο διαδίδεται στο κενό στη διεύθυνση του άξονα Ox , έχει χρονική εξίσωση $E = 0,02\eta\mu 2\pi (10^8 t - \frac{x}{\lambda})$ (S.I.).

α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος,

β. Να γράψετε την εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου σε συνάρτηση με το χρόνο, Δίνεται η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό $c = 3 \cdot 10^8$ m/s και για τις πράξεις:

Απάντηση:

α. Συγκρίνοντας την εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που δίνεται στην εκφώνηση με τη γενική μορφή της χρονικής εξίσωσης της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος

$$E = E_{\max} \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \text{ προκύπτει: } T = 10^{-8} \text{ s} \Rightarrow \mathbf{f = 10^8 \text{ Hz}} \text{ και } \mathbf{E_{\max} = 0,02 \text{ V/m}}$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε: $c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^8} \Rightarrow \mathbf{\lambda = 3 \text{ m}}$

β. Η γενική μορφή της εξίσωσης της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι η: $B = B_{\max} \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

$$\text{Ισχύει } c = \frac{E_{\max}}{B_{\max}} \Rightarrow B_{\max} = \frac{E_{\max}}{c} \Rightarrow B_{\max} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-10} \text{ T} . \text{ Επομένως: } \mathbf{B = \frac{2 \cdot 10^{-10}}{3} \eta\mu 2\pi (10^8 t - \frac{x}{3})} \text{ (S.I.)}$$

Παράδειγμα 2.

Η χρονική εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος, το οποίο διαδίδεται στο κενό και προς τη θετική φορά του άξονα $x'Ox$, είναι η $B = 4,5 \cdot 10^{-8} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ (S.I.).

α. Να υπολογίσετε την περίοδο T του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

β. Να γράψετε την εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα λαμβάνεται από ραδιοφωνικό δέκτη που περιλαμβάνει ιδανικό κύκλωμα LC. Όταν το ηλεκτρομαγνητικό κύμα εισέρχεται από το κενό σε διαφανές υλικό, καταγράφουμε ελάττωση κατά 10% στην ταχύτητα διάδοσης του, ενώ δεν παρατηρούμε καμία μεταβολή στη συχνότητα του.

γ. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος του κύματος στο διαφανές υλικό.

Η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό είναι $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Δίνεται για τις πράξεις: $\pi^2 = 10$.

Απάντηση:

α. Συγκρίνοντας τη δοθείσα εξίσωση $B = 4,5 \cdot 10^{-8} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ με την αντίστοιχη εξίσωση της θεωρίας

$$B = B_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \text{ προκύπτει: } B_{\max} = 4,5 \cdot 10^{-8} \text{ T και } \lambda = 6 \text{ m.}$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής θεωρίας $c = \frac{\lambda}{T}$ προκύπτει:

$$c = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{c} \Rightarrow T = \frac{6}{3 \cdot 10^8} \Rightarrow T = 2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

β. Η μέγιστη τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$c = \frac{E_{\max}}{B_{\max}} \Rightarrow E_{\max} = c \cdot B_{\max} \Rightarrow E_{\max} = 13,5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Η γενική μορφή της εξίσωσης της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του κύματος είναι:

$$E = E_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στην προηγούμενη εξίσωση παίρνουμε:

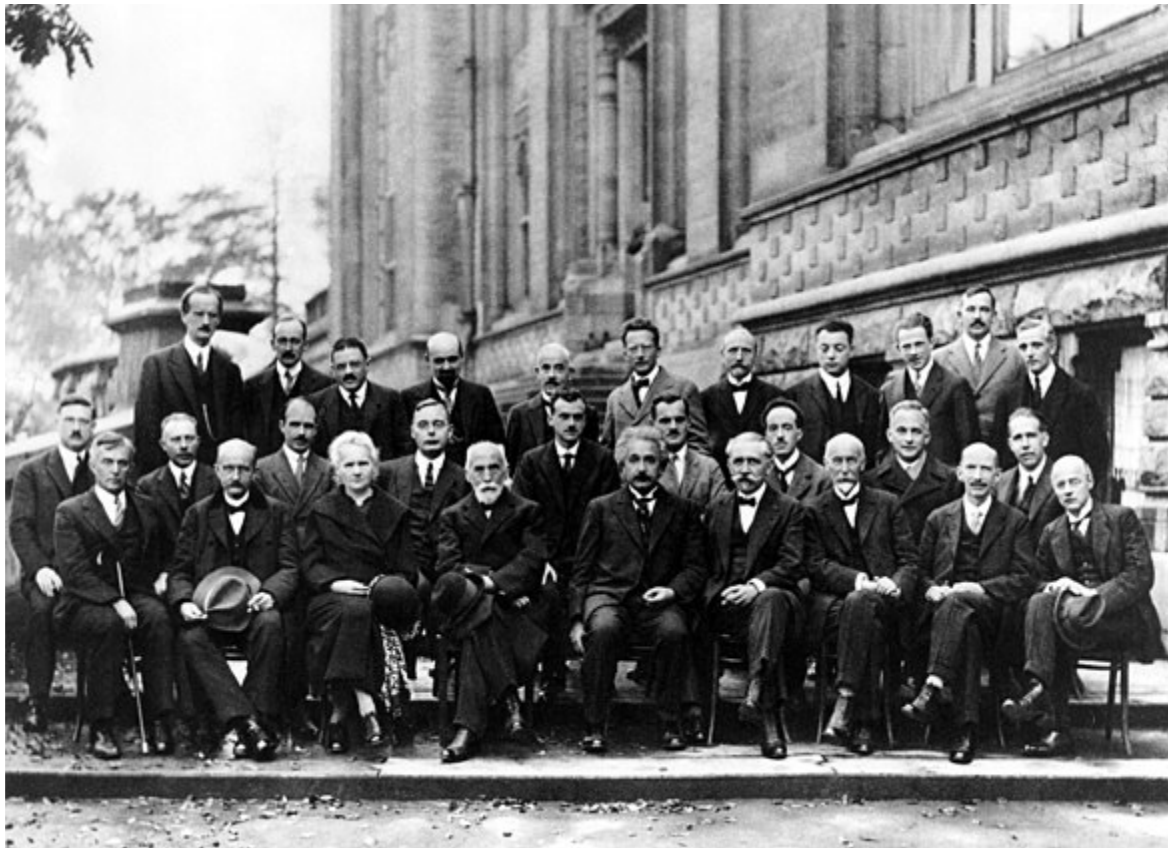
$$E = 13,5 \eta \mu 2\pi \left(10^8 \frac{t}{2} - \frac{x}{6} \right) \text{ (S.I.)}$$

γ. Σύμφωνα με την εκφώνηση, η ταχύτητα διάδοσης v του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο διαφανές υλικό είναι: $v = c - 0,1c = 0,9c \Rightarrow v = 2,7 \cdot 10^8$ m/s.

Εφόσον δεν μεταβάλλεται η συχνότητα του κύματος κατά την είσοδο του στο διαφανές υλικό, η θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής γράφεται: $v = \frac{\lambda'}{T} \Rightarrow \lambda' = v \cdot T \Rightarrow \lambda' = 2,7 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-8} \Rightarrow \lambda' = 5,4 \text{ m}$

Κεφάλαιο 7.

Κβαντομηχανική



Η ιστορική φωτογραφία από το 5ο Συνέδριο Σολβέ, το 1927. Εικονίζονται οι:
 `Ορθιοι (από αριστερά): Ο. Πικάρ, Ε. Ενριό, Π. Έρενφεστ, Ε. Ερζέν, Τ. ντε Ντοντέ, Ε. Σρέντινγκερ, Ζ.-Ε. Βερσαφέλτ, Β. Πάουλι, Β. Χάιζενμπεργκ, Ρ.Χ. Φάουλερ, Λ. Μπριλουέν.
 Μεσαία σειρά (από αριστερά): Π. Ντεμπέι, Μ. Κνούντσεν, Ο.Λ. Μπραγκ, Χ.Α. Κράμερς, Π.Α.Μ. Ντιράκ, Α.Χ. Κόμπτον, Λ. ντε Μπρολί, Μ. Μπορν, Ν. Μπορ.
 Πρώτη σειρά (από αριστερά): Ι. Λάνμουν, Μ. Πλανκ, Μ. κιουρί, Χ.Α. Λόρεντζ, Α. Αϊνστάιν, Π. Λανζεβέν, Σ.-Ε. Γκυ, Τ.Τ.Ρ. Γουίλσον, Ο.Γ. Ρίτσαρντσον.

7. Κβαντομηχανική

Στο τέλος του 19^{ου} αιώνα υπήρχαν τρία σημαντικά προβλήματα που η κλασική φυσική αδυνατούσε να λύσει. Τα προβλήματα αυτά ήταν, η ακτινοβολία του μέλανος σώματος, το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και τα γραμμικά φάσματα εκπομπής και απορρόφησης. Η λύση του προβλήματος του μέλανος σώματος από τον Planck εισάγει τη γέννηση της κβαντομηχανικής και σταδιακά την εξέλιξη αυτής.

Το 1894 ο Πλανκ έστρεψε την προσοχή του στο πρόβλημα της ακτινοβολίας μέλανος σώματος. Είχε αναλάβει να ανακαλύψει για λογαριασμό εταιρειών ηλεκτρισμού τον τρόπο παραγωγής του περισσότερου δυνατού φωτός με λαμπτήρες που θα κατανάλωναν την ελάχιστη ενέργεια. Με το πρόβλημα είχε ήδη ασχοληθεί ο Κίρκοφ το 1859: πώς εξαρτάται η ένταση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που εκπέμπει ένα μέλαν σώμα (ένας τέλει απορροφητής της ξένης ακτινοβολίας, όπως μία κοιλότητα) από τη συχνότητα της ακτινοβολίας (π.χ. το χρώμα του φωτός) και τη θερμοκρασία του μέλανος σώματος; Το ζήτημα είχε ήδη μελετηθεί πειραματικά, αλλά ο νόμος Rayleigh-Jeans που εξαγόταν με τη βοήθεια της Κλασικής Φυσικής αποτύγχανε να εξηγήσει την παρατηρούμενη συμπεριφορά σε υψηλές συχνότητες, δίνοντας πυκνότητα ενέργειας αποκλίνουσα προς το άπειρο, από όπου και ο όρος «υπεριώδης καταστροφή». Ο Wilhelm Wien πρότεινε τον ομώνυμο νόμο (Νόμος του Wien), που προέβλεπε με ακρίβεια τη συμπεριφορά σε υψηλές συχνότητες, αλλά αποτύγχανε στις χαμηλές. Στην προσπάθειά του να συμφιλιώσει τη θεωρία με το πείραμα, ο Πλανκ ανακάλυψε τον περίφημο Νόμο του Πλανκ για την ακτινοβολία μέλανος σώματος, που θα συγκλόνιζε την επιστήμη της Φυσικής από τα θεμέλιά της. Ο νόμος πρωτοπαρουσιάστηκε σε μία συνάντηση της Γερμανικής Φυσικής Εταιρείας, στις 19 Οκτωβρίου 1900, και δημοσιεύθηκε το 1901.

7.1 Ακτινοβολία μέλανος σώματος

7.1.1 Τι είναι μέλαν σώμα και τι ακτινοβολία του μέλανος σώματος;

Τα αντικείμενα τα βλέπουμε είτε επειδή τα ίδια είναι φωτεινές πηγές, δηλαδή εκπέμπουν φως στο ορατό φάσμα και τα ονομάζουμε **αυτόφωτα**, είτε επειδή φωτίζονται από άλλες φωτεινές πηγές και τα ονομάζουμε **ετερόφωτα**.

Οι πιο κοινές πηγές φωτός είναι **α)** Θερμαινόμενα στερεά, π.χ. νήμα από W (βολφράμιο) λυχνίας πυρακτώσεως. **β)** Αέρια με τη βοήθεια ηλεκτρικής εκκένωσης, π.χ. λυχνία με Ne(Νέον). **γ)** Φωτοδίοδοι (Light Emitting Diodes - LED), που αποτελούνται από ημιαγωγούς GaAs, κ.λ.π.

Αν φωτίσουμε ένα ετερόφωτο σώμα τότε ένα μέρος από τις φωτεινές ακτίνες που προσπίπτουν σε αυτό ανακλώνται προς το περιβάλλον και γίνονται ορατές φτάνοντας στα μάτια μας όπου σχηματίζεται η εικόνα του σώματος. Το υπόλοιπο μέρος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας απορροφάται από το σώμα. Ένα κόκκινο σώμα απορροφά όλες τις ακτίνες του ορατού φάσματος και επανεκπέμπει την κόκκινη που φτάνει στα μάτια μας και το βλέπουμε ως κόκκινο. Για να είμαστε πιο ακριβείς, το κόκκινο σώμα απορροφά ένα μεγάλο μέρος του ορατού φάσματος και αυτό που φτάνει στα μάτια μας, δίνει την εντύπωση του κόκκινου. Δεν έρχονται μόνο μήκη κύματος που ανήκουν στο κόκκινο (άλλωστε δεν υπάρχει μια μόνο ακτινοβολία στο κόκκινο), φτάνουν πολλές, με πολλά μήκη κύματος και μας δημιουργείται η εντύπωση κόκκινης απόχρωσης.

Για τα ετερόφωτα σώματα:

α. Αν ένα σώμα φωτιστεί με λευκό φως, τότε αυτό απορροφά ορισμένες ακτινοβολίες αλλά επανεκπέμπει κάποιες άλλες με βάση τις οποίες διακρίνουμε το χρώμα του σώματος.

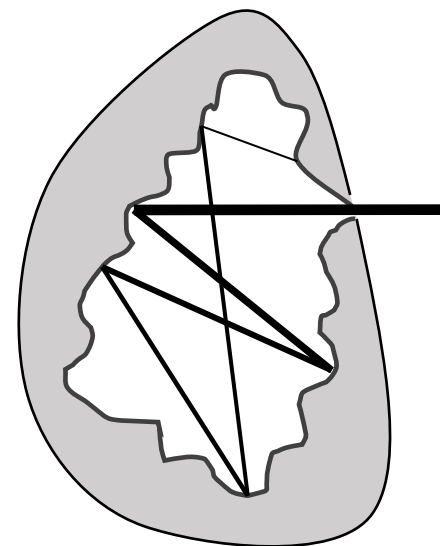
β. Ένα σώμα φαίνεται μαύρο όταν απορροφά όλες τις ακτίνες του ορατού φάσματος και δεν επανεκπέμπει καμία στο ορατό φάσμα, (εκπέμπει στο υπέρυθρο).

γ. Ένα σώμα φαίνεται λευκό όταν δεν απορροφά καμία από τις ακτίνες του ορατού φάσματος. Τότε το σώμα δεν απορρόφησε καμία από τις εισερχόμενες ακτίνες και τις επανεκπέμπει όλες. Το λευκό χρώμα δημιουργείται από την ταυτόχρονη άφιξη όλων των μηκών κύματος του ορατού φωτός στο μάτι μας. Το λευκό δηλαδή δεν αποτελείται από κάποιο μήκος κύματος ή κάποια συχνότητα αλλά αποτελεί τη σύνθεση όλων.

Μέλαν σώμα στη φυσική θεωρείται το σώμα που απορροφά την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που προσπίπτει σ' αυτό, σε όλο το φάσμα της (όλες τις συχνότητες).

- Το μέλαν σώμα αποτελεί μια εξιδανίκευση, αφού στη φύση δεν υπάρχει σώμα από υλικό που να απορροφά το 100% της ενέργειας της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που προσπίπτει σε αυτό. Πρακτικά μπορεί να θεωρηθεί ένα οποιοδήποτε αντικείμενο με αιθαλωμένη την επιφάνειά του.
- Το μέλαν σώμα ούτε ανακλά, ούτε διαχέει την προσπίπτουσα σε αυτό ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Η ονομασία μέλαν προέρχεται από το γεγονός ότι απορροφά όλη την ακτινοβολία οπότε θα φαίνεται μαύρο σε θερμοκρασία περιβάλλοντος. Ωστόσο όπως θα δούμε και αργότερα το μέλαν σώμα εκπέμπει και ακτινοβολία η οποία εξαρτάται από τη θερμοκρασία του και το σώμα θα έχει χρώμα αν εκπέμπει στο ορατό φάσμα.

Το μέλαν σώμα προσεγγίζεται από μια κοιλότητα που επικοινωνεί με το περιβάλλον με μια μικρή οπή. Αυτή η οπή έχει την ιδιότητα του μέλανος σώματος. Μία εισερχόμενη ακτινοβολία στην κοιλότητα αλληλεπιδρά επανειλημμένα με τα τοιχώματα (φορτισμένα σωματίδια) μεταβιβάζοντας σ' αυτά ενέργεια. Η ακτινοβολία θα ανακλαστεί πολλές φορές πάνω στα τοιχώματα της κοιλότητας (στην πραγματικότητα, απορροφήσεις και επανεκπομπές) μέχρι που τελικά να απορροφηθεί όλη. Η πιθανότητα για ένα τμήμα της ακτινοβολίας που μπήκε μέσα στην κοιλότητα από την οπή να ξαναβγεί από αυτήν είναι πολύ μικρή, αν η οπή είναι αρκετά μικρή σε σχέση με την κοιλότητα, που σημαίνει ότι μόνο ένα πολύ μικρό μέρος από το προσπίπτον φως εξέρχεται από την οπή, ενώ το υπόλοιπο έχει απορροφηθεί.



Όταν επέλθει η θερμική ισορροπία τότε εκπέμπεται ακτινοβολία το φάσμα της οποίας εξαρτάται από την θερμοκρασία του σώματος (θερμικής προέλευσης). Αυτό συμβαίνει **ανεξάρτητα από το υλικό των τοιχωμάτων**, το σχήμα, το μέγεθος της κοιλότητας και το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, διότι, καθώς το σώμα αλληλεπιδρά επανειλημμένως με την προσπίπτουσα ακτινοβολία χάνεται η πληροφορία της σύστασης του σώματος και η ακτινοβολία αποκτά θερμική κατανομή της ενέργειάς της στις διάφορες συχνότητες, (θερμοποιημένη). Δύο σώματα από διαφορετικό υλικό που βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία εκπέμπουν το ίδιο είδος θερμικής ακτινοβολίας.

Το μέλαν σώμα αφήνει όλη την προσπίπτουσα ακτινοβολία να μπει μέσα του δηλαδή ανακλά μηδενικό ποσοστό της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, εσωτερικά απορροφά όλη αυτή την προσπίπτουσα ακτινοβολία, χωρίς να αφήνει ακτινοβολία να το διαπεράσει και αυτό ισχύει για όλες τις συχνότητες και για όλες τις γωνίες προσπτώσεως. Άρα ένα μέλαν σώμα είναι τέλειος απορροφητής της προσπίπτουσας Η.Μ. ακτινοβολίας.

Βεβαίως, αν συνέβαιναν μόνο τα παραπάνω, τότε λόγω της συνεχούς απορρόφησης ενέργειας, η θερμοκρασία του σώματος θα αυξανόταν συνεχώς. Έτσι, ένα μέλαν σώμα που βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία άρα και σε σταθερή θερμοκρασία θα πρέπει να επανεκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία η οποία καλείται ακτινοβολία μέλανος σώματος (black-body radiation), έτσι ώστε να διατηρείται το ενεργειακό ισοζύγιο.

Η ακτινοβολία μέλανος σώματος είναι η θερμική ακτινοβολία που εκπέμπουν όλα τα σώματα εξαιτίας της θερμοκρασίας τους.

- Τα στερεά σώματα έχουν συνεχές φάσμα εκπομπής και απορρόφησης καθώς εξαιτίας του μεγάλου αριθμού των ατόμων και των επανειλημμένων αλληλεπιδράσεων θα απορροφηθούν όλα τα μήκη κύματος και θα εκπέμψει συνεχές φάσμα σε όλα τα μήκη κύματος.

- Η ακτινοβολία του μέλανος σώματος έχει **παγκόσμιο χαρακτήρα** δηλαδή δεν εξαρτάται από τη χημική σύσταση του σώματος που την εκπέμπει αλλά μόνο από τη θερμοκρασία του. Η ακτινοβολία έχει χάσει οποιαδήποτε πληροφορία σχετική με τις ιδιότητες των τοιχωμάτων της κοιλότητας - οπής ή των σωμάτων που την εκπέμπουν εκτός από την θερμοκρασία τους. Δύο σώματα στην ίδια θερμοκρασία εμφανίζουν το ίδιο ακριβώς φάσμα εκπομπής. Π.χ. ένα πυρακτωμένο σίδηρο και τα αναμμένα κάρβουνα στην ίδια θερμοκρασία φαίνονται κόκκινα και δεν διακρίνεται το υλικό τους.

7.1.2 Ένταση ακτινοβολίας, I

Για να μετράμε το ποσό της ακτινοβολούμενης ενέργειας από τη μονάδα της επιφάνειας του σώματος, στη μονάδα του χρόνου, ορίζουμε το φυσικό μονόμετρο μέγεθος, ένταση ακτινοβολίας, I.

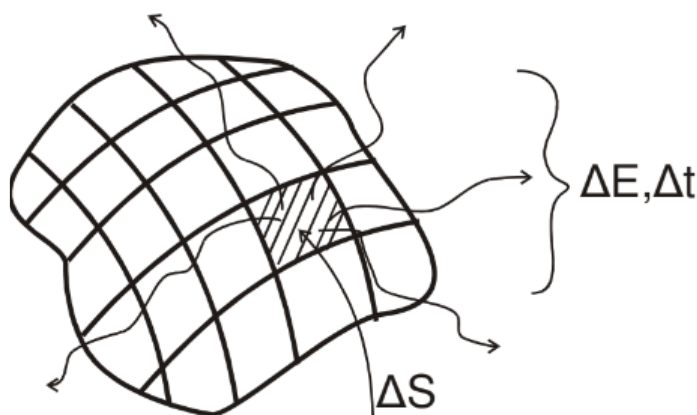
Ονομάζουμε ένταση ακτινοβολίας το φυσικό μέγεθος που είναι ίσο με το πηλίκο της ενέργειας, E, που εκπέμπεται από τη μονάδα της επιφάνειας, σε χρονικό διάστημα Δt προς το χρονικό διάστημα Δt. Δηλαδή:

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta A \cdot \Delta t}$$

Ισοδύναμα αφού η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου είναι η ισχύς P, η ένταση της ακτινοβολίας ορίζεται και ως ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας:

$$I = \frac{P}{\Delta A}$$

Στο S.I. η ένταση της ακτινοβολίας μετριέται σε $\frac{J}{m^2 \cdot s}$ ή $\frac{W}{m^2}$



Στην πράξη είναι πιο χρήσιμο μέγεθος η ένταση ανά μονάδα μήκους κύματος ή συχνότητας

$$I_f = \frac{\Delta E}{\Delta A \cdot \Delta t \cdot \Delta f}. \text{ Η ένταση ανά μονάδα συχνότητας ονομάζεται φασματική ένταση.}$$

Η ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπει ένα σώμα εξαρτάται μόνο από την θερμοκρασία του.

7.1.3 Φάσμα θερμικής ακτινοβολίας

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, λόγω του ρόλου που έπαιξε στην εξέλιξη της φυσικής, έχει η μελέτη της θερμικής ακτινοβολίας του μέλανος σώματος.

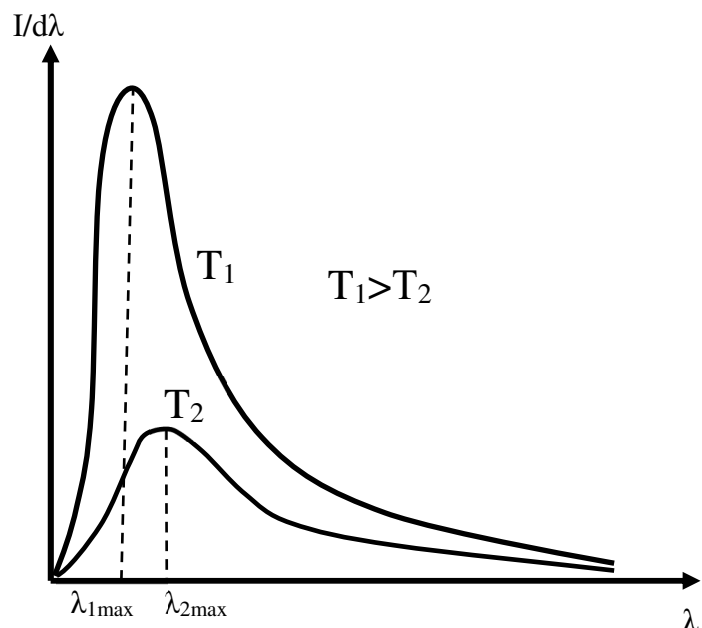
Το μέλαν σώμα (black body), σ' οποιαδήποτε θερμοκρασία και αν βρίσκεται εκπέμπει ενέργεια (black body radiation) με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σ' όλο το φάσμα της. Το διάγραμμα της έντασης της ακτινοβολίας, I ανά μονάδα μήκους κύματος, $d\lambda$, σε συνάρτηση με το μήκος κύματος, λ για μια συγκεκριμένη θερμοκρασία είναι όπως στο διπλανό διάγραμμα.

Από τη μελέτη της γραφικής παράστασης προκύπτει ότι θερμική ακτινοβολία εκπέμπεται σε όλα τα μήκη κύματος, αλλά υπάρχει ένα μήκος κύματος αιχμής, $\lambda_{\max}$, όπου η ένταση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας μεγιστοποιείται.

- Το εμβαδό που σχηματίζεται κάτω από την καμπύλη, εκφράζει τη συνολική ένταση θερμικής ακτινοβολίας που εκπέμπει το μέλαν σώμα στη συγκεκριμένη θερμοκρασία σε όλα τα μήκη κύματος.

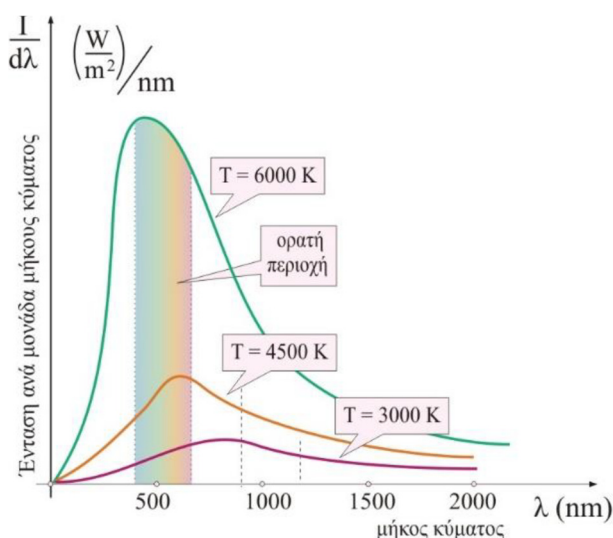
- Το εμβαδό μιας στενής λωρίδας γύρω από ένα συγκεκριμένο μήκος κύματος $\lambda_i + d\lambda_i$ εκφράζει την ένταση θερμικής ακτινοβολίας που εκπέμπει το μέλαν σώμα στην περιοχή $\lambda_i + d\lambda_i$.

- Η αύξηση της θερμοκρασίας οδηγεί αφενός στην αύξηση της εκπεμπόμενης έντασης ακτινοβολίας, αφετέρου στη μετατόπιση του $\lambda_{\max}$ σε μικρότερα μήκη κύματος.



Το διπλανό διάγραμμα παρουσιάζει την ένταση της ακτινοβολίας σε συνάρτηση με το μήκος κύματος για διαφορετικές τιμές της θερμοκρασίας φαίνεται δίπλα. Μπορούμε να δούμε ότι για θερμοκρασίες όπως αυτές που αντιστοιχούν στην επιφάνεια του Ήλιου (5800 K περίπου) η μέγιστη ένταση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας αντιστοιχεί στο ορατό φάσμα (400-700 nm)

Πρέπει εδώ να τονιστεί ότι η μορφή του διαγράμματος είναι ίδια για όλα τα σώματα και ανεξάρτητη από την φύση τους.



Κάθε σώμα με θερμοκρασία έστω και ελάχιστα μεγαλύτερη του απόλυτου μηδενός εκπέμπει θερμική ακτινοβολία, η οποία όμως δεν είναι άμεσα αισθητή από εμάς διότι έχει πολύ χαμηλή ένταση αλλά και μήκη κύματος που πέφτουν στο υπέρυθρο κυρίως και γενικά εκτός ορατής περιοχής. Αντίθετα, η θερμική ακτινοβολία των πυρακτωμένων σωμάτων γίνεται αισθητή όχι μόνο ως θερμότητα αλλά και ως πλούσιο ορατό φως με το χαρακτηριστικό κοκκινωπό ή κίτρινο χρώμα.

7.1.4 Νόμοι ακτινοβολίας μέλανος σώματος.

1. Νόμος μετατόπισης του Wien

Η σχέση που συνδέει την απόλυτη θερμοκρασία, T και το μήκος κύματος αιχμής, $\lambda_{\max}$, ανακαλύφθηκε από τον Wien ονομάστηκε **νόμος της μετατόπισης του Wien** και γράφεται

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{σταθερό}$$

Η τιμή της σταθεράς ισούται με $3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ ή $2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

2. Νόμος των Stefan – Boltzmann

Εκτός ύλης

Η ισχύς που εκπέμπει ένα Μέλαν σώμα ανά μονάδα επιφάνεια καθορίζεται από νόμο των Stefan-Boltzmann, ο οποίος αναφέρει ότι η ολική ένταση της ακτινοβολίας ανά μονάδα επιφάνειας, είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας στην τέταρτη δύναμη.

$$I = \sigma \cdot T^4,$$

όπου σ η σταθερά των **Stefan – Boltzmann** με τιμή $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$

7.1.5 Η ερμηνεία της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος.

Κλασική θεωρία

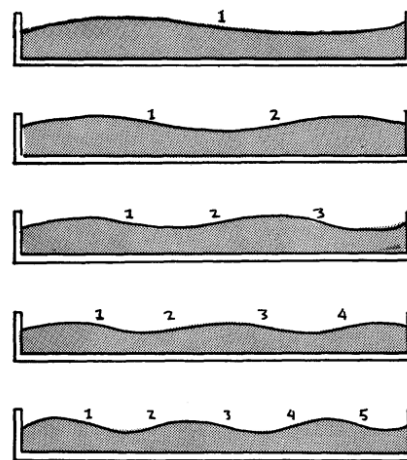
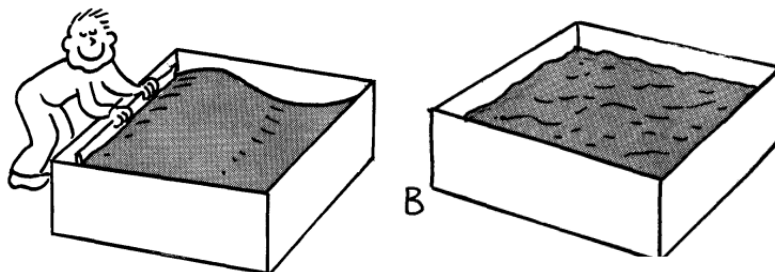
Σύμφωνα με την κλασική θεωρία ένα σώμα μπορεί να εκπέμπει και να απορροφήσει ενέργεια κατά **συνεχή τρόπο** όπως και η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μπορεί να μεταφέρει οποιοδήποτε ποσό ενέργειας. Με βάση την κλασική θεωρία, τα άτομα καθώς ταλαντώνονται εκπέμπουν H/M κύματα ίδιας συχνότητας με αυτήν της ταλάντωσης. Αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση του πλάτους ταλάντωσης και αύξηση της εκπεμπόμενης ενέργειας. Όταν ένα H/M κύμα αλληλεπιδρά με την ύλη (τα άτομα), της μεταφέρει ενέργεια θέτοντας τα άτομα σε εξαναγκασμένη ταλάντωση, με αποτέλεσμα αυτά να επανεκπέμπουν κύμα ίδιας συχνότητας με αυτή του προσπίπτοντος H/M κύματος.

Σύμφωνα με την κλασική φυσική η ακτινοβολία της κοιλότητας προέρχεται από τις ταλαντώσεις των φορτισμένων σωματιδίων στα τοιχώματα της κοιλότητας και η συχνότητά της είναι ίση με τη συχνότητα των ταλαντώσεων αυτών. Η ενέργεια της ακτινοβολίας μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Οι Rayleigh – Jeans προσπάθησαν να εξηγήσουν την ακτινοβολία του μέλανος σώματος σύμφωνα με την στατιστική μηχανική και την H.M. θεωρία του Maxwell. Οι Rayleigh και Jeans έκαναν υπολογισμούς της συνάρτησης $I(\lambda)$, στηριζόμενοι στην αντίληψη της Κλασικής Φυσικής, που θεωρεί τα άτομα του μελανού σώματος ταλαντωτές, οι οποίοι ακτινοβολούν ηλεκτρομαγνητικά κύματα όλων των μηκών κύματος.

Ο Rayleigh υπέδειξε ότι η κλασική μηχανική, όταν εφαρμόζοταν στους ταλαντωτές ενός μέλανος σώματος, οδηγούσε σε μια ενεργειακή κατανομή η οποία αυξάνει με το τετράγωνο της συχνότητας. Ο Rayleigh στήριξε την επιχειρηματολογία του στο λεγόμενο θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας από το οποίο προκύπτει ότι η μέση ενέργεια των ταλαντωτών που αποτελούν ένα μέλαν σώμα θα δίνεται από τη σχέση kT όπου το k είναι η σταθερά του Boltzmann. **Θεωρώντας στάσιμα H.M. κύματα στην κοιλότητα του πρότυπου μέλανος σώματος και ότι το υλικό των τοιχωμάτων, που συνίσταται από φορτισμένους αρμονικούς ταλαντωτές, ανταλλάσσει οποιοδήποτε ποσό ενέργειας με τα H.M. κύματα.** Έτσι μέσα σε μια κοιλότητα θα μπορούσαμε να έχουμε άπειρο αριθμό δυνατών στάσιμων κυμάτων οποιασδήποτε ενέργειας και συχνότητας. (όπως σε μια χορδή έχουμε άπειρο αριθμό μονοδιάστατων κυμάτων). Όταν έχουμε πολύ μικρά μήκη κύματος, τότε σε δεδομένο μήκος μπορούν να δημιουργηθούν πολλές στάσιμες καταστάσεις. Επειδή η κάθε στάσιμη κατάσταση περιέχει το ίδιο ποσό ενέργειας σύμφωνα με το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας, η ισχύς της πηγής θα πρέπει ν' αυξάνεται όσο μικραίνουν τα μήκη κύματος. Όταν τα μήκη κύματος τείνουν στο μηδέν, τότε η ισχύς της πηγής θα πρέπει να απειρίζεται. Αυτό όμως οδηγεί σε υψηλές συχνότητες (μικρά μήκη κύματος) η ένταση της ακτινοβολίας να τείνει στο άπειρο (νόμος Rayleigh – Jeans), ενώ το πείραμα δείχνει ότι τείνει στο μηδέν. Η ασυμφωνία αυτή μεταξύ της σχέσης των Rayleigh-Jeans και της πειραματικής καμπύλης οδηγεί στην λεγόμενη "υπεριώδη καταστροφή". Αυτό σημαίνει ότι αν εισέλθει έστω μια ερυθρή ακτίνα μέσα στον λεγόμενο κύβο του Jeans, που είναι ένας άδειος κύβος με κατοπτρικά τοιχώματα, από μια οπή του, τότε αυτή η υπέρυθη ακτινοβολία σιγά-σιγά μετατρέπεται σε μπλε, ιώδη, υπεριώδη, ακτίνες-X, ακτινοβολία γ και ακόμη παραπέρα χωρίς όριο. Θα ήταν λοιπόν παράτολμο να κάθεται μπροστά στο τζάκι γιατί σε λίγο το κόκκινο φως των κάρβουνων θα μετατρέποταν σε επικίνδυνη πυρηνική ακτινοβολία. Η θεωρητική προσέγγιση των Rayleigh-Jeans λοιπόν οδηγεί σε εκπομπή άπειρης ολικής ενέργειας, αφού είναι επιτρεπτά όλα τα μήκη κύματος. Όταν το μήκος κύματος λ τείνει στο μηδέν τότε το $I(\lambda)$ τείνει στο άπειρο. Σε μικρές συχνότητες η κλασική θεωρία συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα.

Παραστατικά θα μπορούσαμε να σκεφτούμε το εξής ανάλογο:

Αν σε μια δεξαμενή με νερό δημιουργήσουμε έναν κυματισμό μετά από λίγο η εικόνα που θα παρατηρήσουμε είναι το κύμα να έχει διαιρεθεί σε μικρότερους κυματισμούς όπως στο σχήμα Β. Αυτό συμβαίνει επειδή η ενέργεια των κυμάτων διαιρείται και σχηματίζονται όλα τα πιθανά κύματα που χωράνε στη δεξαμενή. Υπάρχουν πολλά περισσότερα κύματα μικρού μήκους κύματος που μπορούν να χωρέσουν σε σχέση με αυτά που έχουν μεγάλο μήκος κύματος. Θεωρητικά, υπάρχουν άπειρα κύματα με πολύ μικρό μήκος κύματος.



Αν συνέβαινε το ίδιο στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα τότε για παράδειγμα μία κίτρινη ακτινοβολία εντός της κοιλότητας που δεν υπήρχε δυνατότητα διαφυγής της, θα μετατρεπόταν σταδιακά σε μπλε, μετά βιολετί, μετά υπεριώδη (υπεριώδης καταστροφή) και τέλος σε ακτίνα Χ. Αν ίσχυε κάτι τέτοιο προφανώς δεν θα είχαμε δυνατότητα ύπαρξης.

Η υπεριώδης όμως καταστροφή δεν υφίσταται. Αυτό συμβαίνει γιατί η ενέργεια των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων δεν διαιρείται. Υπάρχει μια ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για τη δημιουργία ενός κύματος συγκεκριμένου χρώματος ή μήκους κύματος. Για τη δημιουργία κυμάτων μικρού μήκους κύματος απαιτείται υψηλή ενέργεια.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δεν έχουν την ίδια συμπεριφορά με τα μηχανικά.

Ερμηνεία του φαινομένου από τον Planck

Το 1900 ο M. Planck στην προσπάθειά του να ερμηνεύσει το φάσμα του μέλανος σώματος, έκανε μια υπόθεση έξω από κάθε λογική για τη φυσική της εποχής του.

1^η παραδοχή

Υπόθεση Planck: Το άτομο ως ταλαντωτής με ιδιοσυχνότητα f δεν μπορεί να βρεθεί σε οποιαδήποτε ενεργειακή κατάσταση αλλά μόνο σε συγκεκριμένες (κβαντισμένες) καταστάσεις που έχουν ενέργεια πολλαπλάσια της ποσότητας hf .

Οι τιμές της ενέργειας που μπορεί να πάρει ο ατομικός ταλαντωτής είναι:

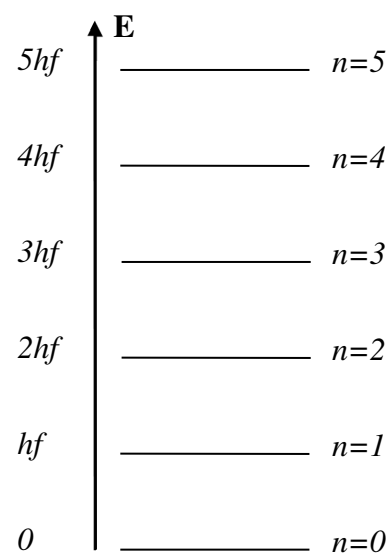
$$E_n = n \cdot h \cdot f$$

όπου:

- n , ένας ακέραιος αριθμός που καλείται κβαντικός αριθμός,
- h , μία σταθερά που ονομάζεται σταθερά δράσης του Planck και είναι ίση με $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- f , η συχνότητα ταλάντωσης του ατόμου.

Ο ατομικός ταλαντωτής μπορεί να εκπέμψει ή να απορροφήσει ενέργεια με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας μόνο σε διακριτές (κβαντισμένες) τιμές και αυτό συμβαίνει μόνον όταν το άτομο αλλάζει ενεργειακή κατάσταση.

Τα σωματίδια των τοιχωμάτων (που φέρουν φορτίο) είναι αρμονικοί ταλαντωτές με συγκεκριμένες ιδιοσυχνότητες f . Τα Η.Μ. κύματα που γεμίζουν την κοιλότητα δεν μπορούν να ανταλλάξουν οποιοδήποτε ποσό ενέργειας με τους ταλαντωτές, παρά μόνον σε διακριτά (ασυνεχή) ποσά ενέργειας.



2^η παραδοχή

Η 2η παραδοχή είναι συνέπεια της 1ης και προκύπτει από την αρχή διατήρησης της ενέργειας στο άτομο, καθώς η μείωση της ενέργειας του ατομικού ταλαντωτή πρέπει να είναι ίση με την ενέργεια που εκπέμπεται από αυτόν με τη μορφή ακτινοβολίας. Αντίστοιχα η αύξηση της ενέργειας του ατομικού ταλαντωτή πρέπει να είναι ίση με την ενέργεια που απορροφάει ο ταλαντωτής με τη μορφή ακτινοβολίας.

Το ποσό της ενέργειας, που μπορεί να απορροφήσει ή να εκπέμψει ένα άτομο, υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, μπορεί να πάρει μόνο διακριτές τιμές.

Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μεταφέρεται σε διάκριτες ποσότητες.

Τα άτομα, λοιπόν, απορροφούν ή εκπέμπουν ενέργεια όχι συνεχώς αλλά κάνοντας ενεργειακά άλματα.

Αν το άτομο απορροφήσει ένα κβάντο ενέργειας δηλαδή ενέργεια $\Delta E = hf$, αυξάνει την ενέργειά του κατά ένα σκαλοπάτι στην κλίμακα των ενεργειακών σταθμών. Αν πάλι το άτομο εκπέμπει ένα κβάντο ενέργειας υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας τότε κατεβαίνει ένα σκαλοπάτι στην ίδια κλίμακα. Όσο ο ταλαντωτής παραμένει σε κάποια από τις κβαντισμένες του καταστάσεις δεν εκπέμπει ούτε απορροφά ακτινοβολία.

Τα κβάντα εκπέμπονται όταν ο ταλαντωτής μεταβαίνει από μια υψηλότερη σε μια χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση. Η ενέργεια ενός κβάντου είναι

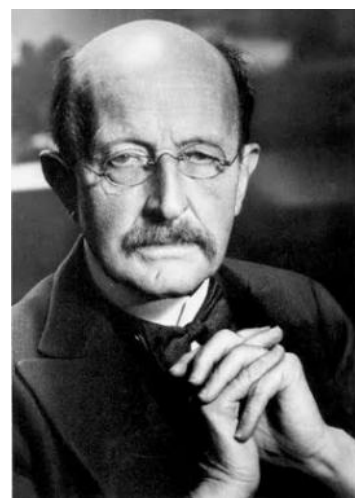
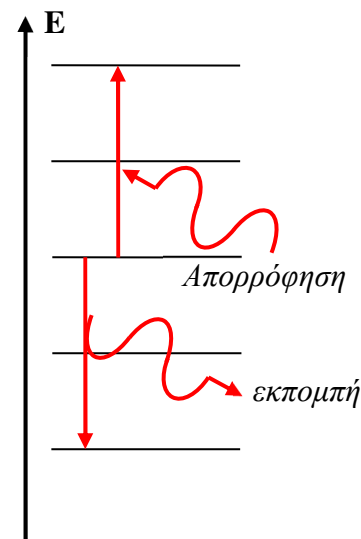
$$\Delta E_n = \Delta n \cdot h \cdot f$$

Όπου Δn η διαφορά των κβαντικών αριθμών.

- Για $f \rightarrow 0$ η ποσότητα $h \cdot f$ παίρνει πολύ μικρές τιμές. Επομένως η απόσταση δύο ενεργειακών σταθμών είναι πολύ μικρή και το φάσμα ακτινοβολίας καθίσταται συνεχές. Οδηγούμαστε δηλαδή σε αυτό που ονομάζεται «κλασικό όριο». Η κβαντική φύση της ακτινοβολίας είναι φανερή στις υψηλές συχνότητες, ενώ στο όριο των χαμηλών συχνοτήτων έχουμε την ισχύ της κλασικής φυσικής.

- Παρά το γεγονός ότι κάθε άτομο (ταλαντωτής) της κοιλότητας εκπέμπει ή απορροφά ακτινοβολία ορισμένης συχνότητας, το φάσμα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας του μέλανος σώματος είναι συνεχές, λόγω του μεγάλου πλήθους των ατόμων του.

Ο Planck προσπάθησε να μετρήσει τον αριθμό των τρόπων, με τους οποίους μια δεδομένη ενέργεια μπορεί να κατανεμηθεί μεταξύ ενός πλήθους ταλαντωτών. Ο Planck δεν δέχτηκε το θεώρημα της ισοκατανομής ως θεμελιώδες. Ας σημειωθεί ότι ο Planck όταν μιλούσε για ταλαντωτές εννοούσε τα άτομα. Ο όρος ταλαντωτής είναι μια ασαφής στοιχειώδης οντότητα που ταλαντώνεται σε μια συχνότητα που εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Στην προσπάθειά του να βρει αυτή τη διαδικασία αρίθμησης, ο Planck εμπνεύστηκε από τον Boltzmann και εισήγαγε αυτό που αποκάλεσε «ενεργειακά στοιχεία», (energy elements αργότερα ονομάστηκαν κβάντα). Αρχικά έπρεπε να παραδεχθεί ότι ο δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος δεν έχει καθολική ισχύ, αλλά όπως είχε δεχθεί ο Boltzmann έχει στατιστική ισχύ (με μεγάλη πιθανότητα να συμβαίνει) και δεύτερον να παραδεχθεί ότι η ενέργεια ταλάντωσης των ατόμων παίρνει όχι συνεχείς τιμές αλλά διακριτές. Έτσι η πιθανότητα ένα άτομο να είναι διεγερμένο σε κατάσταση υψηλής ενέργειας είναι σημαντικά μικρότερη σε σχέση με την πιθανότητα να είναι διεγερμένο σε



Ο Μαξ Πλανκ (Max Karl Ernst Ludwig Planck) 1858 – 1947 .

Γεννήθηκε στις 23 Απριλίου 1858 στο Κίελο της Γερμανίας. Σπούδασε στο Μόναχο και στο Βερολίνο όπου πήρε το διδακτορικό του το 1879. Εργάστηκε για κάποιο διάστημα στο Κίελο και το 1889 έγινε καθηγητής θεωρητικής φυσικής στο πανεπιστήμιο του Βερολίνου στη θέση του Kirchhoff. Αρχικά ασχολείτο με τη θερμοδυναμική και όταν στο Βερολίνο γνώρισε την πειραματική εργασία συναδέλφων πάνω στη θερμική ακτινοβολία, καταπιείστηκε και εξήγησε τον νόμο της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος. Οι εργασίες του ήταν η αρχή της κβαντικής φυσικής και το 1918 τιμήθηκε με το βραβείο Nobel για την ανακάλυψη της κβάντωσης της ενέργειας. Θεωρείται ως ο πατέρας της Κβαντικής Θεωρίας κι ένας από τους πιο σημαντικούς φυσικούς του εικοστού αιώνα.

χαμηλής ενέργειας για δεδομένη θερμοκρασία. Στις μικρές συχνότητες δηλαδή στα μεγάλα μήκη κύματος περισσότερα άτομα είναι διεγερμένα, αλλά οι ενεργειακές στάθμες είναι κοντά η μία με την άλλη με αποτέλεσμα κατά τις αποδιεγέρσεις να εκπέμπεται μικρό ποσό ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και συνολικά η ένταση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας να είναι χαμηλή. Στις υψηλές συχνότητες παρόλο που οι διαφορές μεταξύ των ενεργειακών σταθμών των ατόμων είναι μεγαλύτερες, εντούτοις τα άτομα που είναι διεγερμένα είναι πολύ λιγότερα, οπότε οι αποδιεγέρσεις τους συνεισφέρουν και πάλι μικρό ποσό ενέργειας ανά μονάδα χρόνου, άρα και χαμηλή ένταση εκπεμπόμενης ακτινοβολίας.

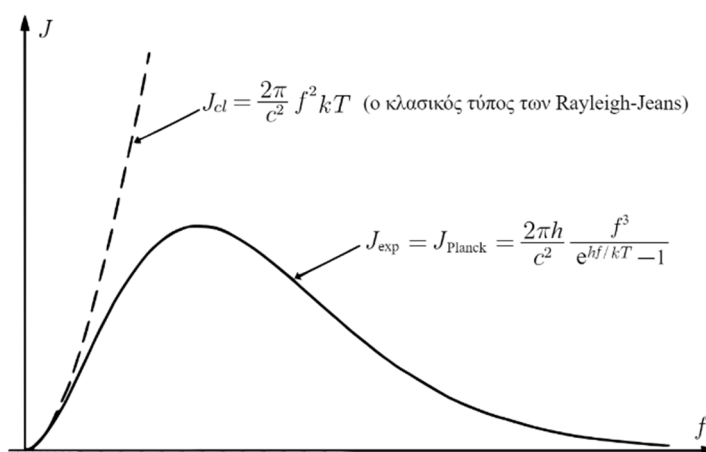
Ηλεκτρονιοβόλτ, eV

Το ηλεκτρονιοβόλτ (eV) είναι μονάδα μέτρησης ενέργειας. Είναι η ενέργεια που μεταβιβάζεται σε ένα ηλεκτρόνιο αν αυτό επιταχυνθεί από τάση $V=1\text{ Volt}$. Είναι ίση με:

$$1\text{ eV}=1\text{e}\cdot 1\text{V}=1,6\cdot 10^{-19}\text{C}\cdot 1\text{V}=1,6\cdot 10^{-19}\text{J}$$

Είναι πολύ μικρή μονάδα ενέργειας της τάξης μεγέθους αυτών που συναντώνται στα ατομικά φαινόμενα, και έτσι χρησιμοποιείται συχνά στη μελέτη τους.

Ο θερμικός χαρακτήρας της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος σε συνδυασμό με την υπόθεση του Planck μας δίνει μια φυσική ερμηνεία του διαγράμματος. Από την κινητική ενέργεια των αερίων γνωρίζουμε ότι η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο είναι $(3/2)kT$. Γενικά ο παράγοντας kT χαρακτηρίζει τη ζωηρότητα της θερμικής κίνησης των μορίων και είναι περίπου ίσος με $1/40$ του ηλεκτρονιοβόλτ, ($1\text{eV}=1,6\cdot 10^{-19}\text{J}$) σε θερμοκρασία δωματίου η οποία είναι περίπου εκατό φορές μικρότερη από την



ενέργεια των κβάντων του ορατού φωτός ($\epsilon \approx 2\text{ eV}$) και επομένως η διέγερση αυτών των κβάντων είναι αδύνατη σε αυτή τη θερμοκρασία. Για το λόγο αυτό τα σώματα σε θερμοκρασία δωματίου εκπέμπουν θερμική (αόρατη υπέρυθη) ακτινοβολία αλλά όχι φως. Σε θερμοκρασία δωματίου θα μπορούν λοιπόν να δημιουργηθούν μόνο εκείνα τα φωτεινά κβάντα με ενέργεια μικρότερη του kT , δηλαδή τα μικρής συχνότητας. Τα κβάντα με υψηλή συχνότητα και μικρό μήκος κύματος δεν θα είναι δυνατόν να δημιουργηθούν και να είναι παρόντα στο εκπεμπόμενο φάσμα πράγμα που η κλασική φυσική δεν μπορούσε να ερμηνεύσει.

7.1.6 Λυμένα Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

Η θερμοκρασία της επιφάνειας του Ήλιου είναι $T = 6.000 \text{ K}$. Δίνονται η σταθερά του Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, η ταχύτητα του φωτός στο κενό $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, η σχέση $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ και η σταθερά του νόμου Wien $2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$. Θεωρώντας ότι ο Ήλιος είναι μέλαν σώμα, να υπολογιστούν:

- α1.** το μήκος κύματος αιχμής $\lambda_{\max}$ της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας,
- α2.** η συχνότητα f της ακτινοβολίας που αντιστοιχεί στο μήκος κύματος αιχμής,
- α3.** η ενέργεια που έχει ένα κβάντο ενέργειας της ακτινοβολίας μήκους κύματος $\lambda_{\max}$

B. Μία φωτεινή πηγή με ισχύ $P = 411 \text{ W}$ εκπέμπει μονοχρωματική ακτινοβολία μήκους κύματος $\lambda_{\max}$. Να υπολογιστεί ο αριθμός των κβάντων ενέργειας που εκπέμπονται από την πηγή σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 1 \text{ min}$.

Απάντηση:

α1. Από τον νόμο του Wien: $\lambda_{\max} T = \text{σταθερό έχουμε:}$

$$\lambda_{\max} T = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K} \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}}{T} \Rightarrow \lambda_{\max} = \mathbf{483 \text{ nm}}$$

Επομένως, η ακτινοβολία ανήκει στην περιοχή του ορατού φωτός.

α2. Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής $c = \lambda f$ προκύπτει: $f = \frac{c}{\lambda_{\max}} \Rightarrow f = 6,21 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

α3. Η ενέργεια που έχει ένα κβάντο ενέργειας της ακτινοβολίας μήκους κύματος $\lambda_{\max}$ δίνεται από τη σχέση $E = hf$. Επομένως: $E = hf \Rightarrow E = 41,1723 \cdot 10^{-20} \text{ J} \Rightarrow \mathbf{E = 2,57 \text{ eV}}$

B. Η ισχύς μίας φωτεινής πηγής δίνεται από τη E σχέση $P = \frac{E}{\Delta t}$. Εάν σε χρονικό διάστημα Δt η πηγή

εκπέμπει N κβάντα ενέργειας, η συνολική τους ενέργεια είναι: $E = Nhf$. Επομένως:

$$P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{Nhf}{\Delta t} \Rightarrow N = \frac{P\Delta t}{hf} \Rightarrow \mathbf{N = 6 \cdot 10^{22} \text{ κβάντα ενέργειας.}}$$

Παράδειγμα 2.

Ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ είναι δεμένο στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθερός $k = 32 \text{ N/m}$ και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 2 \text{ cm}$. Θεωρούμε ότι το σύστημα αποτελεί κβαντικό ταλαντωτή, δηλαδή ταλαντωτή του οποίου η ενέργεια παίρνει μόνο διακριτές τιμές. Δίνεται η σταθερά του Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$. Να υπολογιστούν:

- α.** η συχνότητα της ταλάντωσης,
- β.** η ενέργεια του ταλαντωτή,
- γ.** το ενεργειακό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών,
- δ.** ο κβαντικός αριθμός n της ενεργειακής στάθμης στην οποία βρίσκεται ο ταλαντωτής,
- ε.** το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής της ενέργειας της ταλάντωσης, εάν ο κβαντικός αριθμός της ενεργειακής στάθμης του ταλαντωτή αυξηθεί κατά 2 μονάδες.

Απάντηση:

α. Η συχνότητα της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \mathbf{f = \frac{2}{\pi} \text{ Hz}}$$

β. Η ενέργεια του ταλαντωτή είναι: $E = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow E = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ J}$

γ. Σύμφωνα με την υπόθεση του Planck, η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών του ταλαντωτή είναι: $\Delta E = hf \Rightarrow \Delta E = 4,22 \cdot 10^{-34} \text{ J}$. Είναι προφανές ότι η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών του ταλαντωτή είναι πολύ μικρή και επομένως πολύ δύσκολα ανιχνεύεται.

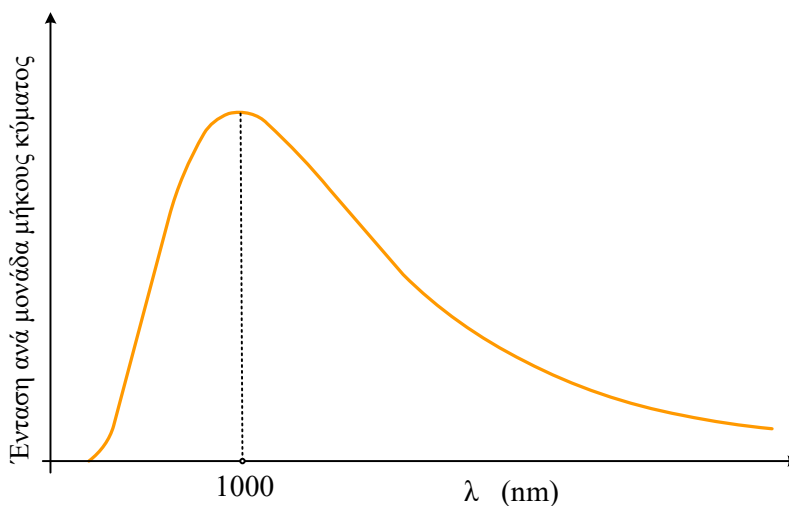
δ. Εάν η είναι ο κβαντικός αριθμός της ενεργειακής κατάστασης στην οποία βρίσκεται ο ταλαντωτής, ισχύει: $E = nhf \Rightarrow 6,4 \cdot 10^{-3} = n \cdot 4,22 \cdot 10^{-34} \Rightarrow n = 1,5 \cdot 10^{31}$.

ε. Όταν ο κβαντικός αριθμός της ενεργειακής στάθμης του ταλαντωτή γίνεται $n' = n + 2$, έχουμε:

$$\pi = \frac{E' - E}{E} \cdot 100\% = \frac{(n+2)hf - nhf}{nhf} \cdot 100\% = \frac{2}{n} \cdot 100\% \Rightarrow \frac{2}{1,5 \cdot 10^{31}} \cdot 100\% \pi = 1,33 \cdot 10^{-29} \%$$

Παράδειγμα 3.

Διαθέτουμε ένα λαμπτήρα πυρακτώσεως των 100W, (περιλαμβάνει ένα λεπτό σύρμα Βολφραμίου), ο οποίος λειτουργεί κανονικά, με θερμοκρασία σύρματος $T=3.200\text{K}$. Στο διάγραμμα φαίνεται η ένταση της ακτινοβολίας του λαμπτήρα, ανά μονάδα μήκους κύματος, σε συνάρτηση με το μήκος κύματος της ακτινοβολίας, από όπου προκύπτει ότι η μέγιστη ισχύς εκπέμπεται σε μήκος κύματος $\lambda_{\text{max}} = 1.000\text{nm}$. Δεδομένου ότι το ορατό φως έχει μήκη κύματος περίπου από τα 400nm έως τα 700nm:

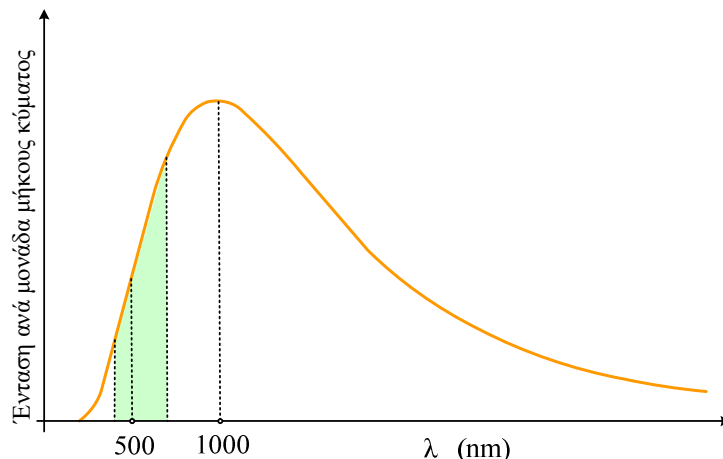


- i) Να δικαιολογήσετε γιατί ο λαμπτήρας αυτός εκπέμπει **και** ορατό φως.
 - ii) Το φως του λαμπτήρα αυτού, δεν είναι «καθαρό λευκό χρώμα», αλλά έχει μια απόχρωση προς το κίτρινο. Μπορείτε να το εξηγήσετε;
 - iii) Αν οι απώλειες ισχύος στον λαμπτήρα φτάνουν τα 12W, τότε η ισχύς της ορατής ακτινοβολίας που εκπέμπει ο λαμπτήρας μπορεί να είναι:
 - α) 5W, β) 44W, γ) 88W
 - iv) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω απάντησή σας, πόσα φωτόνια φτάνουν στην ίριδα του ματιού μας, όταν στεκόμαστε σε απόσταση 2m από τον λαμπτήρα, ανά δευτερόλεπτο; Θεωρείστε ότι η επιφάνεια της ίριδας είναι 12mm^2 και ότι όλα τα φωτόνια του φωτός έχουν το ίδιο μήκος κύματος $\lambda=600\text{nm}$.
 - v) Αν μια μέρα έχουμε πτώση τάσεως δικτύου από τα 230V στα 160V, τι πρόκειται να παρατηρήσουμε στην λειτουργία του λαμπτήρα;
 - vi) Λαμβάνοντας την αντίστοιχη καμπύλη της ($I/\Delta\lambda=f(\lambda)$) για το ηλιακό φως, βρίσκουμε ότι το μέγιστο της ακτινοβολούμενης έντασης εμφανίζεται περίπου στα 550nm (η μέση τιμή των μηκών κύματος του ορατού φωτός). Θεωρώντας ότι το φως αυτό προέρχεται από την επιφάνεια του Ήλιου, μπορείτε να υπολογίσετε την επιφανειακή του θερμοκρασία;
- Δίνονται η σταθερά του Planck $h=6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ και η ταχύτητα του φωτός $c=3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Απάντηση:

- i) Ο λαμπτήρας μπορεί να εκπέμπει την μέγιστη ισχύ σε μήκος κύματος 1.000nm, αλλά με βάση το διάγραμμα που μας δίνεται, εκπέμπει και κάποια ενέργεια στην περιοχή του ορατού, από τα 400nm-700nm (βλέπε στο σχήμα περιοχή γύρω από τα 500nm)

- ii) Με βάση το διπλανό σχήμα, βλέπουμε ότι πολύ μεγαλύτερη είναι η ένταση της ακτινοβολίας στα μεγαλύτερα μήκη κύματος του ορατού, γύρω στα 700nm, ενώ έχουμε πολύ μικρότερη ένταση στα μικρότερα μήκη κύματος (400nm). Αλλά αφού δεν υπάρχει μια ισορροπημένη εκπομπή σε όλα τα μήκη κύματος, το φως δεν είναι απόλυτα λευκό αφού υπερτερούν οι ακτινοβολίες στην περιοχή του ερυθρού. Έτσι το φως μπορεί να έχει μια ελαφρά κίτρινη απόχρωση.



- iii) Το εμβαδόν στο διάγραμμα, μεταξύ της παραπάνω γραφικής παράστασης και του οριζόντιου άξονα, είναι αριθμητικά ίσο με την ολική ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπει ο λαμπτήρας. Αντίστοιχα το χωρίο με το πρασινωπό χρώμα, θα μας δίνει την συνολική ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπεται στην περιοχή του ορατού φωτός. Αλλά τότε η σύγκριση των δύο εμβαδών, προκύπτει ότι στο ορατό φως εκπέμπεται ένα μικρό μέρος της ακτινοβολούμενης ενέργειας. Κατά συνέπεια η ισχύς που ακτινοβολείται στην περιοχή του ορατού φωτός (από τις τιμές που μας δίνονται), θα είναι ίση με 5W. Σωστό το α).

- iv) Αν θεωρήσουμε τον λαμπτήρα να κατέχει το κέντρο μιας σφαίρας με ακτίνα $R=2m$, τότε η ένταση του φωτός που φτάνει στην επιφάνεια της σφαίρας αυτής, θα είναι:

$$I_1 = \frac{\Delta W}{S \cdot \Delta t} = \frac{P}{4\pi R^2}$$

Αλλά τότε στην ίριδα του ματιού μας, με εμβαδόν S_1 , σε χρόνο Δt θα φτάνει ενέργεια:

$$\Delta W_1 = I_1 \cdot S_1 \cdot \Delta t = \frac{P}{4\pi R^2} \cdot S_1 \cdot \Delta t = \frac{5}{4\pi \cdot 2^2} \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 1J = 1,2 \cdot 10^{-6} J$$

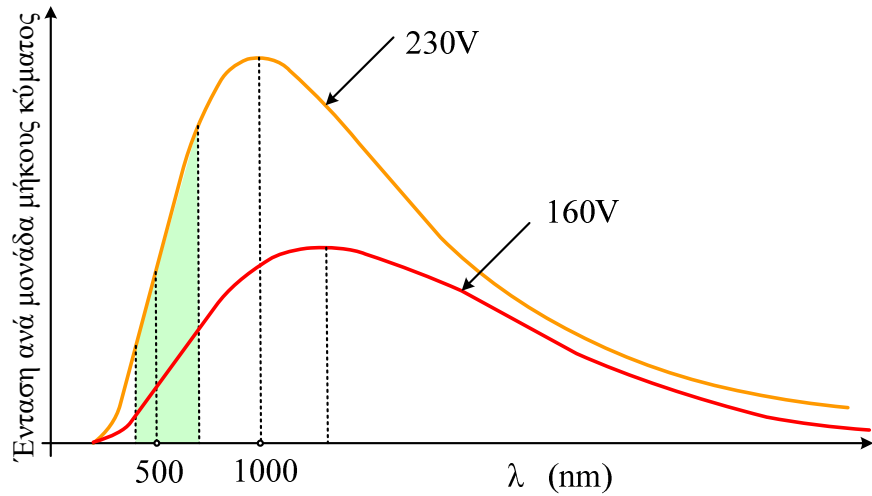
Η ενέργεια αυτή μεταφέρεται από N φωτόνια, όπου το καθένα έχει ενέργεια $E_1=hf$, οπότε:

$$N = \frac{\Delta W_1}{E_1} = \frac{\Delta W_1}{hf} = \frac{\Delta W_1}{h \frac{c}{\lambda}} = \frac{\Delta W_1}{hc} \lambda = \frac{1,2 \cdot 10^{-6}}{6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} 600 \cdot 10^{-9} = 36 \cdot 10^{11}$$

Είναι πολύ «μεγάλος» ο αριθμός αυτός των φωτονίων.

- v) Αν παρουσιαστεί πτώση τάσης, τότε ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα στην αντίσταση του λαμπτήρα, θα μειωθεί, αφού $P_0 = \frac{V^2}{R}$. Οπότε άμεση συνέπεια είναι να μειωθεί η θερμοκρασία του

σύρματος, να μειωθεί η ακτινοβολούμενη ενέργεια, αλλά τότε, με βάση το νόμο του Wien, θα αυξηθεί το μήκος κύματος στο οποίο εκπέμπεται η μέγιστη ένταση της ακτινοβολίας. Πράγμα που σημαίνει ότι συνολικά το χρώμα του φωτός που εκπέμπει ο λαμπτήρας, να μετακινηθεί από την περιοχή του λευκού-ελαφρά κιτρινωπού, στην περιοχή του ερυθρού. Άρα λιγότερο φως και με απόχρωση κοκκινωπή!



- vi)** Θεωρώντας και το νήμα του λαμπτήρα και την επιφάνεια του Ήλιου, ότι συμπεριφέρονται ως μέλανα σώματα, εφαρμόζουμε το νόμο του Wien και παίρνουμε:

$$\lambda_{1,\max} \cdot T_1 = \lambda_{2,\max} \cdot T_2 \rightarrow$$

$$T_H = T_2 = \frac{\lambda_{1,\max}}{\lambda_{2,\max}} \cdot T_1 = \frac{1000nm}{550nm} \cdot 3.200K \approx 5.800K$$

7.2 Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο ανακαλύφθηκε το 1887 από τον Hertz, εντούτοις μόλις το 1905 ο Einstein κατόρθωσε να το ερμηνεύσει, διευρύνοντας τη θεωρία των κβάντα του Planck. Για την ερμηνεία του φαινομένου τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ το 1921. Η μελέτη του φαινομένου υπήρξε ιδιαίτερα σημαντική για την κατανόηση της κβαντικής φύσης του φωτός.

Με το όνομα «φωτοηλεκτρικό φαινόμενο» χαρακτηρίζουμε την εκπομπή ηλεκτρονίων από ένα μέταλλο η οποία προκαλείται από την πρόσπτωση ορατής ή υπεριώδους ακτινοβολίας στην επιφάνειά του. Στην πραγματικότητα ο όρος χρησιμοποιείται σήμερα με ένα πολύ ευρύτερο περιεχόμενο. Δηλώνει την απόσπαση ηλεκτρονίων από οποιοδήποτε φυσικό σύστημα —άτομο, μόριο ή στερεό— στο οποίο τα ηλεκτρόνια αυτά είναι δέσμια.

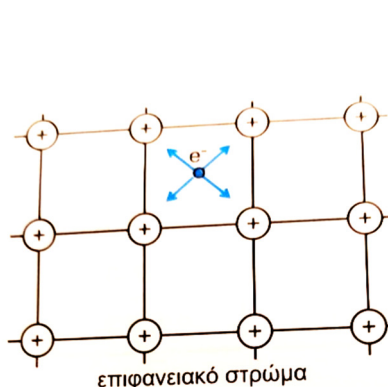
Στα πλαίσια του μαθήματος θα μελετηθεί το φαινόμενο στην περίπτωση που ακτινοβολία προσπίπτει σε **μεταλλική** επιφάνεια και ορίζουμε το φαινόμενο ως εξής:

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι το φαινόμενο κατά το οποίο μια μεταλλική επιφάνεια απελευθερώνει ηλεκτρόνια στο περιβάλλον όταν πάνω της προσπίπτει φως.

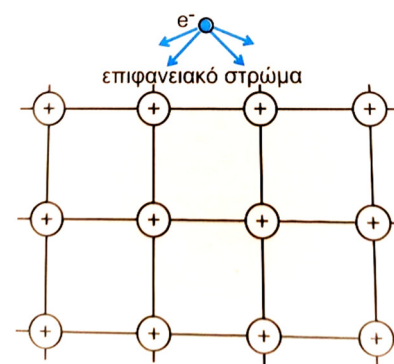
7.2.1 Εξαγωγή ηλεκτρονίων από μέταλλα.

Είναι γνωστό ότι τα μέταλλα αποτελούνται από θετικά ιόντα που είναι τοποθετημένα συμμετρικά στο κρυσταλλικό πλέγμα. Μέσα στο μέταλλο βρίσκονται εγκλωβισμένα τα ελεύθερα ηλεκτρόνια, περίπου 10^{22} ηλεκτρόνια ανά cm^3 , που πρακτικά ισοδυναμεί με ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο για κάθε άτομο του υλικού.

Πάνω στα ελεύθερα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στο εσωτερικό ενός μετάλλου, εξασκούνται δυνάμεις από τα θετικά ιόντα του πλέγματος. Οι



Σχήμα 1



Σχήμα 2

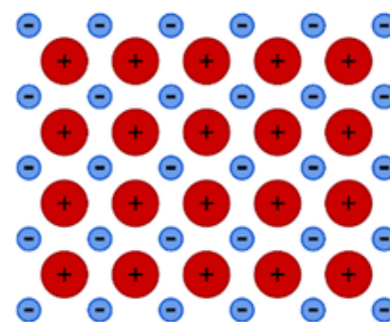
δυνάμεις αυτές έχουν τυχαίες διευθύνσεις και επομένως η συνισταμένη τους είναι μηδέν, με αποτέλεσμα τα ελεύθερα ηλεκτρόνια να μπορούν να κινούνται μέσα στο μέταλλο, σχήμα 1. Όταν ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο λόγω της ταχύτητάς του, βρεθεί έξω από το μέταλλο, τότε δέχεται δυνάμεις από τα ιόντα. Η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών έχει τέτοια φορά, που τείνει να επαναφέρει το ελεύθερο ηλεκτρόνιο στο εσωτερικό του μετάλλου σχήμα 2. Για να μπορέσει, λοιπόν, να απομακρυνθεί από το μέταλλο ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο, πρέπει να υπερνικήσει αυτές τις ελκτικές δυνάμεις του πλέγματος.

Σε κανονικές συνθήκες η μέγιστη κινητική ενέργεια των ελεύθερων ηλεκτρονίων δεν είναι αρκετή για να υπερνικηθούν αυτές οι δυνάμεις. Επομένως, για να μπορέσει να ξεφύγει οριστικά ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο από το μέταλλο, θα πρέπει να του προσφερθεί με κάποιο τρόπο επιπλέον ενέργεια. Η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να προσφερθεί σε ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο κάποιου μετάλλου, για να μπορέσει να εγκαταλείψει οριστικά την επιφάνεια του μετάλλου, ονομάζεται έργο εξαγωγής ϕ και αποτελεί μια χαρακτηριστική σταθερά του μετάλλου. Το έργο εξαγωγής συνήθως το εκφράζουμε σε ηλεκτρονιοβόλτ, eV.

Η εξαγωγή των ηλεκτρονίων μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι με θέρμανση του μετάλλου. Όταν θερμάνουμε σε υψηλή θερμοκρασία ένα μέταλλο, ένας μεγάλος αριθμός ελεύθερων ηλεκτρονίων αποκτά μεγάλες ταχύτητες άρα και μεγάλη κινητική ενέργεια. Τα ηλεκτρόνια αυτά υπερνικούν τις ελκτικές δυνάμεις των θετικών ιόντων του μετάλλου και έτσι διαφεύγουν από αυτό. Η εξαγωγή αυτή καλείται **θερμική ή θερμιονική εκπομπή**. Ένας άλλος τρόπος είναι με απορρόφηση ακτινοβολίας που καλείται **φωτοηλεκτρικό φαινόμενο** και παρουσιάζεται παρακάτω.

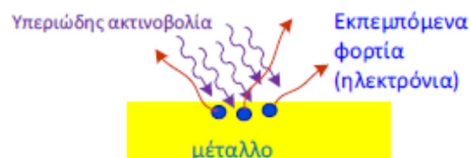
7.2.2 Περιγραφή φωτοηλεκτρικού φαινομένου

Τα **ελεύθερα**¹ ηλεκτρόνια των μετάλλων, κινούμενα με τυχαίες ταχύτητες, περιορίζονται στο εσωτερικό των αγωγών λόγω ελκτικών δυνάμεων (μεταλλικός δεσμός) και δεν μπορούν να διαχυθούν στο περιβάλλον. Όταν μια δέσμη φωτός προσπίπτει πάνω στην επιφάνεια του αγωγού κάποια ηλεκτρόνια απορροφούν ενέργεια αρκετή για να υπερνικήσουν αυτές τις δυνάμεις και βγαίνουν από το μέταλλο (**φωτοηλεκτρόνια**).



Η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να προσλάβει ένα ηλεκτρόνιο της επιφάνειας του μετάλλου για να υπερνικήσει τις ελκτικές δυνάμεις του μετάλλου που το συγκρατούν όπως ήδη έχει αναφερθεί την ονομάζουμε **έργο εξαγωγής**, συμβολίζεται (διεθνώς) με ϕ και εξαρτάται μόνο από το είδος του μετάλλου.

Να τονιστεί **ότι το έργο εξαγωγής αναφέρεται στην ελάχιστη ενέργεια που χρειάζονται εκείνα τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στις υψηλότερες ενεργειακές καταστάσεις**, που κινούνται δηλαδή με τις μεγαλύτερες ταχύτητες. Τα ηλεκτρόνια που κινούνται με μικρότερες ταχύτητες, χρειάζονται περισσότερη ενέργεια.



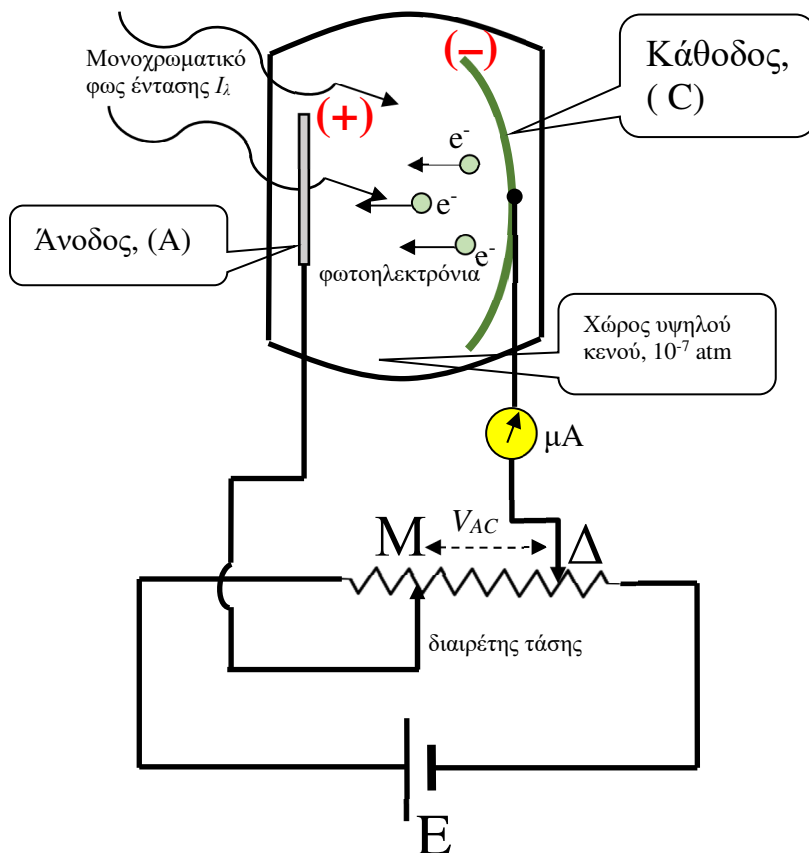
¹ Ελεύθερα εννοείται ότι δεν ανήκουν σε ένα συγκεκριμένο πυρήνα αλλά είναι δέσμια στο μέταλλο. Σε τελείως ελεύθερα ηλεκτρόνια δεν μπορεί να απορροφηθεί τελείως η ενέργεια του φωτονίου και δεν μπορεί να συμβεί το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο καθώς παραβιάζει αρχές διατήρησης ενέργειας και ορμής. Πρέπει να είναι δέσμιο είτε σε άτομο ή σε μέταλλο.

7.2.3 Περιγραφή της διάταξης για τη μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου

Η πειραματική διάταξη με την οποία μελετάμε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο αποτελείται από μια μεταλλική καμπύλη επιφάνεια, την **κάθοδο**, (C) και ένα μεταλλικό σύρμα, την **άνοδο**, (A). Από την κάθοδο, που φέρει επίστρωση αλκαλιμέταλλου (K ή Cs), ελευθερώνονται τα φωτοηλεκτρόνια και στην άνοδο συλλέγονται. Τα δύο ηλεκτρόδια βρίσκονται μέσα σε σωλήνα υψηλού κενού (περίπου 10^{-7} atm) και συνδέονται με μια ποτενσιομετρική διάταξη, η οποία μας επιτρέπει να μεταβάλλουμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων. Ένα μικροαμπερόμετρο που παρεμβάλλεται στο κύκλωμα, μας επιτρέπει να μετράμε την ένταση του ρεύματος που δημιουργείται. Όταν η κάθοδος φωτίζεται, ελευθερώνονται ηλεκτρόνια, **φωτοηλεκτρόνια**, τα οποία επιταχυνόμενα από το ηλεκτρικό πεδίο φθάνουν στην άνοδο, δημιουργώντας ένα μικρό ηλεκτρικό ρεύμα, το **φωτοηλεκτρικό ρεύμα**.

Με την πολικότητα της πηγής όπως φαίνεται στο σχήμα τα ηλεκτρόνια που εκπέμπονται από την κάθοδο επιταχύνονται. Μπορούμε όμως να μηδενίσουμε την τάση ή ακόμα και να αλλάξουμε την πολικότητα μεταξύ ανόδου και καθόδου όταν ο δρομέας Δ βρίσκεται αριστερά του M, εμποδίζοντας την κίνηση των ηλεκτρονίων.

Παρατηρήθηκε ότι υπάρχει ρεύμα και με μηδενική τάση καθώς τα ηλεκτρόνια εκπέμπονται από την κάθοδο έχοντας ήδη κινητική ενέργεια. Αυξάνοντας σταδιακά την αντίθετη πολικότητα μπορούμε να μετρήσουμε έμμεσα την κινητική ενέργεια των εκπεμπόμενων φωτοηλεκτρονίων βλέποντας για ποια τιμή της τάσης σταματά το ρεύμα.



Με την μετακίνηση του δρομέα Δ , μπορούμε να μεταβάλλουμε την τάση μεταξύ ανόδου και καθόδου. Όταν ο δρομέας Δ είναι αριστερά του M αλλάζει η πολικότητα μεταξύ ανόδου και καθόδου και το πεδίο δυσκολεύει την κίνηση των φωτοηλεκτρονίων

7.2.4 Πειραματικές διαπιστώσεις από τη μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο μελετήθηκε από τους Hallwachs και Lenard οι οποίοι μελέτησαν πώς μεταβάλλεται το φωτοηλεκτρικό ρεύμα, i σε συνάρτηση:

- με τη συχνότητα, f , του προσπίπτοντος φωτός,
- με την ένταση ακτινοβολίας, I , του προσπίπτοντος φωτός,
- με την εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού, V , μεταξύ ανόδου και καθόδου.

Οι Hallwachs και Lenard διαπίστωσαν ότι:

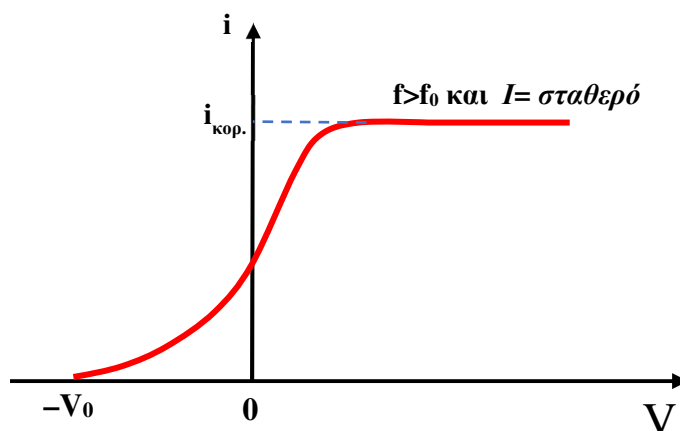
1) Για να ελευθερωθούν φωτοηλεκτρόνια πρέπει η προσπίπτουσα ακτινοβολία να έχει συχνότητα **μεγαλύτερη ή ίση** από μια ελάχιστη τιμή, την οποία ονόμασαν **συχνότητα κατωφλίου**, f_0 , και η οποία εξαρτάται μόνο από το υλικό της καθόδου. Όταν το φως έχει συχνότητα μικρότερη από τη συχνότητα κατωφλίου, από την κάθοδο δεν εξέρχονται φωτοηλεκτρόνια, **ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλη είναι η ένταση της φωτεινής ακτινοβολίας**.

2) Για ακτινοβολία με συχνότητα μεγαλύτερη της συχνότητας κατωφλίου, η αύξηση της έντασης ακτινοβολίας προκαλεί αύξηση του φωτοηλεκτρικού ρεύματος. Δηλαδή ο αριθμός των ηλεκτρονίων που αποσπώνται από το μέταλλο ανά μονάδα χρόνου **είναι ανάλογος της έντασης** της φωτεινής ακτινοβολίας που προσπίπτει σε αυτό. (όχι όμως με μεγαλύτερη ενέργεια για συγκεκριμένη συχνότητα).

3) Η ταχύτητα με την οποία εξέρχονται τα ηλεκτρόνια **δεν εξαρτάται από την ένταση** της φωτεινής ακτινοβολίας **αλλά μόνο από τη συχνότητά της** και αυξάνεται όταν η συχνότητα της ακτινοβολίας μεγαλώνει.

4) Το ρεύμα εμφανίζεται χωρίς καθυστέρηση όταν προσπίπτει το φως. Σε νεότερα πειράματα έχει υπολογιστεί ότι η όποια καθυστέρηση είναι μικρότερη από 1ns ακόμη και με ασθενή ένταση ακτινοβολίας.

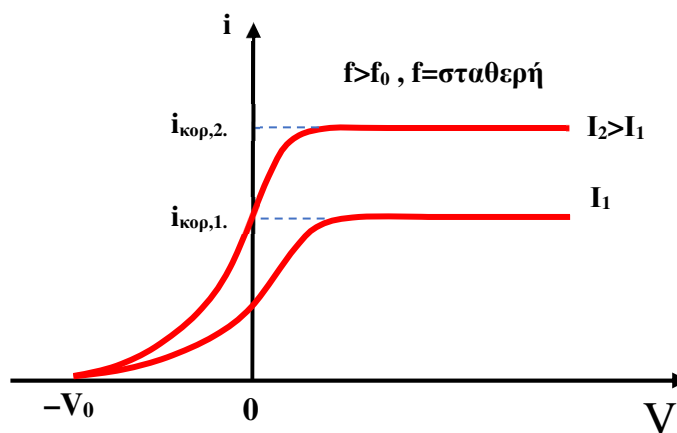
5) Στο διπλανό διάγραμμα παριστάνεται η ένταση του ρεύματος σε συνάρτηση με την διαφορά δυναμικού V_{AC} μεταξύ ανόδου και καθόδου στο κύκλωμα, για μία συγκεκριμένη τιμή της έντασης της ακτινοβολίας I και δεδομένης συχνότητας μεγαλύτερης της συχνότητας κατωφλίου, $f > f_0$. Από την μελέτη του διαγράμματος παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η διαφορά δυναμικού αυξάνεται το ρεύμα των φωτοηλεκτρονίων. Αυτό εξηγείται από την αύξηση του ηλεκτρικού πεδίου άρα και της δύναμης που δέχονται τα ηλεκτρόνια και συνεπώς να αυξάνεται το πλήθος των



ηλεκτρονίων που προσκρούουν στην άνοδο. Όταν η τάση γίνει αρκετά μεγάλη, το φωτοηλεκτρικό ρεύμα παίρνει μία σταθερή τιμή, ρεύμα κόρου. Αυτό συμβαίνει γιατί από κάποια τάση και μετά όλα τα

ηλεκτρόνια που παράγονται στην κάθοδο συλλέγονται στην άνοδο. Όταν η εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού είναι μηδέν, κάποια φωτοηλεκτρόνια έχουν αρκετή κινητική ενέργεια για να φθάσουν στην άνοδο και να δημιουργήσουν ένα μικρό φωτοηλεκτρικό ρεύμα. Ακόμη και όταν η εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού αντιστραφεί και τα ηλεκτρόνια **εμποδίζονται από το πεδίο**, κάποια καταφέρνουν να φθάσουν στην άνοδο. Η ροή των ηλεκτρονίων μηδενίζεται μόνο όταν η αντίστροφη διαφορά δυναμικού V είναι αρκετά μεγάλη ώστε τα ηλεκτρόνια να μην φτάνουν στην άνοδο.

6) Επαναλαμβάνοντας το πείραμα για μεγαλύτερη ένταση ακτινοβολίας προκύπτει το εξής διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι η τάση αποκοπής δεν εξαρτάται από την ένταση της ακτινοβολίας. Δηλαδή η κινητική ενέργεια με την οποία φεύγουν τα ηλεκτρόνια από την κάθοδο δεν σχετίζεται με την συνολική ενέργεια που προσπίπτει στο μέταλλο αλλά με την συχνότητα της ακτινοβολίας. Από την άλλη βέβαια όταν η ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη έχουμε μεγαλύτερο ρεύμα δηλαδή μεγαλύτερο αριθμό ηλεκτρονίων που εκπέμπονται από την κάθοδο.



7.2.5 Αποτυχία ερμηνείας του φωτοηλεκτρικού φαινομένου από την κλασική θεωρία

Τα πειραματικά αποτελέσματα του φωτοηλεκτρικού φαινομένου είχαν δημιουργήσει, προς στιγμή, σύγχυση στους φυσικούς επιστήμονες της τότε εποχής. Η κλασική φυσική με την κυματική θεωρία σύμφωνα με την οποία ένα σώμα μπορεί να εκπέμψει ή να απορροφήσει ενέργεια κατά **συνεχή** τρόπο, δεν μπορούσε να εξηγήσει πολλές από τις ιδιότητες του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία το φως, που είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα, μεταφέρει ενέργεια η οποία απορροφάται από τα ηλεκτρόνια, τα οποία στη συνέχεια εξέρχονται του μετάλλου. Αυτό θα εξηγούσε την αύξηση της ενέργειας των ηλεκτρονίων και την εκπομπή τους από την κάθοδο, όπως και το γεγονός ότι μεγαλύτερη ένταση ακτινοβολίας είχε ως αποτέλεσμα μεγαλύτερο ρεύμα. Αδυνατούσε όμως να ερμηνεύσει κάποια άλλα χαρακτηριστικά του φαινομένου:

- Επειδή η ένταση I της ακτινοβολίας εξαρτάται από την μεταφερόμενη ενέργεια της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, θα έπρεπε η τάση αποκοπής να αυξάνεται με την αύξηση της έντασης I . Η αύξηση της έντασης της ακτινοβολίας θα έπρεπε να προκαλέσει μεγαλύτερη απορρόφηση ενέργειας, επομένως τα εξερχόμενα ηλεκτρόνια θα έπρεπε να είχαν μεγαλύτερη κινητική ενέργεια, άρα και το δυναμικό αποκοπής θα έπρεπε να αυξηθεί. Καθώς η ένταση ακτινοβολίας δεν εξαρτάται από τη συχνότητα f , θα έπρεπε η τάση αποκοπής να μην επηρεάζεται από τη συχνότητα. Όμως το δυναμικό αποκοπής δεν εξαρτάται από την ένταση της φωτεινής ακτινοβολίας, αλλά μόνον από τη συχνότητά της.
- Η κλασική θεωρία δεν μπορούσε να ερμηνεύσει τη συχνότητα κατωφλίου. Η ένταση I της ακτινοβολίας εξαρτάται από το πλάτος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος, δηλαδή την μεταφερόμενη

ενέργεια και όχι από τη συχνότητα, άρα θα έπρεπε να συμβαίνει το φαινόμενο για οποιαδήποτε συχνότητα f . Όταν η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μικρή, θα έπρεπε τα ηλεκτρόνια του μετάλλου, αθροίζοντας σταδιακά την προσπίπτουσα ενέργεια, κάποια στιγμή να συγκεντρώσουν αρκετή για να υπερνικήσουν τις ελκτικές δυνάμεις και να εξέλθουν. Αυτό πειραματικά δεν συνέβαινε, απεναντίας οι πειραματικοί φυσικοί της εποχής παρατηρούσαν το αντίθετο. Στην περίπτωση που η προσπίπτουσα ακτινοβολία είχε πολύ μικρή ένταση, αλλά η συχνότητά της ήταν μεγαλύτερη της συχνότητας κατωφλίου, το φωτοηλεκτρικό ρεύμα εμφανιζόταν ακαριαία.

- Ακόμα και το χρονικό διάστημα που χρειαζόταν για να ξεκινήσει το φαινόμενο (μερικά ns) το οποίο δεν άλλαζε ακόμα και για πολύ μικρές εντάσεις προσπίπτουσας ακτινοβολίας δεν μπορούσε να εξηγηθεί με το κλασικό μοντέλο. Αφού η Κλασική φυσική προβλέπει ότι για ακτινοβολία χαμηλής ενέργειας, θα χρειαζόταν σημαντικός χρόνος προτού τα ακτινοβολούμενα ηλεκτρόνια αποκτήσουν επαρκή ενέργεια για να εγκαταλείψουν την επιφάνεια του ηλεκτροδίου- ωστόσο, δεν παρατηρείται τέτοια άθροιση ενέργειας.

7.2.6 Θεωρία Einstein. Εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου

Η υπόθεση φωτονίων του Einstein

Για την εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου ο Einstein το 1905 διατύπωσε τη θεωρία των φωτονίων που ήταν ένα επιπλέον άλμα πέρα από τη θεωρία του Planck. Κατά την θεωρία των φωτονίων του Einstein το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι ασυνεχές όχι διότι εκπέμπεται και απορροφάται ασυνεχώς στην περίπτωση της θερμικής εκπομπής του μέλανος σώματος, αλλά γιατί από τη φύση του έχει ασυνεχή υπόσταση όπως και αν παράγεται και διαδίδεται κατά ασυνεχή τρόπο αποτελούμενο από φωτόνια, τα οποία είναι πακέτα ενέργειας εντοπισμένα και στο χώρο, που διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός. Σύμφωνα με τον Einstein:

1) «το φως αποτελείται από μικρά πακέτα ενέργειας που ονομάζονται κβάντα φωτός ή φωτόνια». Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, το φως συμπεριφέρεται σαν ένα σύνολο «σωματιδίων». Κάθε ένα από αυτά μεταφέρει ενέργεια και ορμή, παρόλο που έχει μηδενική μάζα ηρεμίας.

Η ενέργεια κάθε φωτονίου είναι $E = h \cdot f$ ή $E = h \cdot \frac{c}{\lambda}$

Όπου f η συχνότητα του φωτονίου,
 $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ η σταθερά του Planck και
 $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

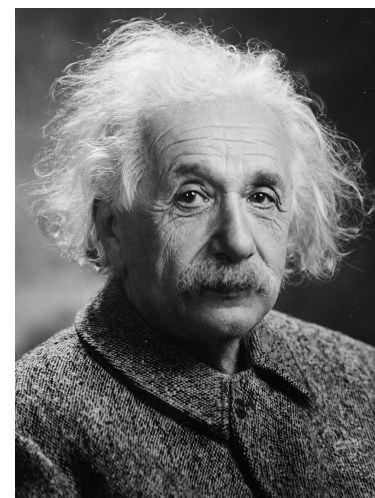
2) Κάθε φωτόνιο της δέσμης που προσπίπτει στη μεταλλική επιφάνεια μεταφέρει την ενέργειά του σε ένα μόνο ηλεκτρόνιο, δηλαδή έχουμε σύγκρουση ενός φωτονίου με ένα ηλεκτρόνιο. Δεδομένου ότι τα φωτόνια είναι αδιαίρετα, ένα μόνο ηλεκτρόνιο υποχρεούται να απορροφήσει δια μιας ολόκληρη την ενέργεια ενός τέτοιου φωτονίου και θα αποσπαστεί ή όχι από το μέταλλο ανάλογα με το αν η ενέργεια αυτή είναι μεγαλύτερη ή όχι από το έργο εξαγωγής

Επομένως λόγω της αρχής διατήρησης της ενέργειας η ενέργεια αυτή hf θα ισούται με το έργο εξαγωγής ϕ και τη μέγιστη κινητική ενέργεια $K_{\max}$ που αποκτά. Δηλαδή:

$$K_{\max} = h \cdot f - \phi$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται **Φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein**.

Η παραπάνω εξίσωση δίνει την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων που εγκαταλείπουν το μέταλλο από την επιφάνειά του δηλαδή τα υψηλότερης ενέργειας ηλεκτρόνια και απαιτείται η μικρότερη προσφορά ενέργειας. Επομένως αποκτούν μέγιστη κινητική ενέργεια. Αν τα ηλεκτρόνια εξέρχονται από



Ο Ο Άλμπερτ Αϊνστάιν Albert Einstein
 (14 Μαρτίου 1879 – Πρίνστον, 18
 Απριλίου 1955)

Ήταν Γερμανός φυσικός εβραϊκής καταγωγής, ο οποίος βραβεύτηκε με το Νόμπελ Φυσικής το 1921 για το Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Είναι ο θεμελιωτής της Θεωρίας της Σχετικότητας και από πολλούς θεωρείται ο σημαντικότερος επιστήμονας του 20ού αιώνα και ένας απ'τους μεγαλύτερους όλων των εποχών.

Είναι πιο γνωστός στο ευρύ κοινό ιδιαίτερα για τον τύπο του $E=mc^2$ που αναφέρεται από πολλούς ως «η πιο διάσημη εξίσωση στη φυσική».

Η επίδραση των ανακαλύψεων του Αϊνστάιν σχετικά με την φύση του χώρου και του χρόνου, εξακολουθεί να αποτελεί κεντρικό αντικείμενο της επιστημονικής έρευνας σε φυσική, κοσμολογία, και μαθηματικά.

χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες, (λιγότερο ενεργητικά) πρέπει να απορροφήσουν μεγαλύτερο ποσό ενέργειας για να εξαχθούν λόγω αλληλεπίδρασης με τα ιόντα και άλλα ηλεκτρόνια.

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας γράφεται:

$$hf = \Delta E + \phi + K$$

Όπου

hf : η ενέργεια του φωτονίου που απορροφά το ηλεκτρόνιο του μετάλλου,

ΔE : η ενέργεια που πρόκειται να χάσει το ηλεκτρόνιο κατά την διαδρομή, μέχρι την έξοδο από το μέταλλο (λόγω αλληλεπίδρασης με τα ιόντα και άλλα ηλεκτρόνια),

ϕ : το έργο εξαγωγής και

K : η κινητική ενέργεια που έχει απομείνει στο ηλεκτρόνιο, τη στιγμή που εγκαταλείπει την επιφάνεια της καθόδου.

Αν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται αρχικά στην επιφάνεια, τότε $\Delta E = 0$ και η εξίσωση γίνεται: $K_{\max} = h \cdot f - \phi$

• Αν η ενέργεια του φωτονίου, $h \cdot f$, είναι μικρότερη από το έργο εξαγωγής, ϕ , το ηλεκτρόνιο δεν φεύγει από το μέταλλο.

• Αν η ενέργεια του φωτονίου, $h \cdot f$, είναι μεγαλύτερη από το έργο εξαγωγής, ϕ , τότε το ηλεκτρόνιο εγκαταλείπει το μέταλλο με κινητική ενέργεια που είναι ίση με

$$K_{\max} = h \cdot f - \phi$$

7.2.7 Ερμηνεία των πειραματικών δεδομένων με βάση τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein

Η φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein ερμηνεύει πλήρως τα πειραματικά δεδομένα του φωτοηλεκτρικού φαινομένου:

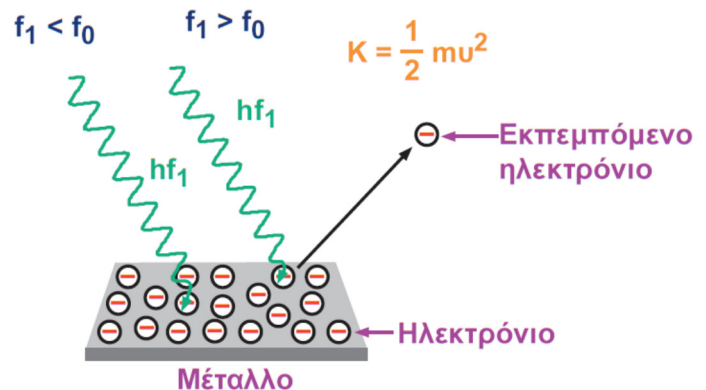
1. Για να εξέλθει ένα ηλεκτρόνιο από το μέταλλο θα πρέπει το φωτόνιο να του μεταφέρει ενέργεια μεγαλύτερη ή ίση από το έργο εξαγωγής

$$K_{\max} \geq 0 \rightarrow h \cdot f - \phi \geq 0 \Rightarrow f \geq \frac{\phi}{h}$$

Άρα, υπάρχει μια ελάχιστη τιμή της συχνότητας για να εμφανιστεί το φαινόμενο, η οποία είναι ίση με

$$f_{\min} = f_0 = \frac{\phi}{h} \quad \text{και} \quad \text{ονομάζεται} \quad \text{συχνότητα}$$

κατωφλίου.



2. Για ακτινοβολία με συχνότητα μεγαλύτερη της συχνότητας κατωφλίου, η αύξηση της έντασης ακτινοβολίας προκαλεί αύξηση του αριθμού των φωτονίων που προσπίπτουν στο μέταλλο, με αποτέλεσμα να ελευθερώνονται περισσότερα φωτοηλεκτρόνια στη μονάδα του χρόνου και να προκαλείται αύξηση του φωτοηλεκτρικού ρεύματος.

Αν θεωρήσουμε ότι σε μια περιοχή της καθόδου εμβαδού A προσπίπτουν N φωτόνια ανά μονάδα χρόνου, τότε η ένταση της προσπίπτουσας στην κάθοδο ακτινοβολίας θα είναι:

$$I = \frac{E}{\Delta t \cdot A} \rightarrow I = \frac{N \cdot h \cdot f}{\Delta t \cdot A}$$

Επομένως αύξηση της έντασης ακτινοβολίας σημαίνει ότι περισσότερα φωτόνια πέφτουν στην κάθοδο στη μονάδα του χρόνου, άρα αποσπώνται περισσότερα φωτοηλεκτρόνια από αυτήν, άρα μεγαλύτερη ένταση ηλεκτρικού ρεύματος.

3. Δεν υπάρχει καμία καθυστέρηση έναρξης του φαινομένου, από τη στιγμή που διαθέτουμε φωτόνια επαρκούς ενέργειας, (συχνότητας), εφόσον αυτά απορροφηθούν η εκπομπή φωτορεύματος παρατηρείται ακαριαία. Η ενέργεια προσφέρεται στο ηλεκτρόνιο όχι βαθμιαία, όπως με τον κλασικό μηχανισμό, αλλά με την απορρόφηση (δια μιάς) ολόκληρης της ενέργειας ενός φωτονίου. Έτσι είναι φανερό ότι δεν θα υπάρχει χρονική καθυστέρηση από την πρόσπτωση του φωτός στο μέταλλο έως την εμφάνιση φωτοηλεκτρικού ρεύματος.

4. Από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση, $K_{\max} = h \cdot f - \phi$, προκύπτει άμεσα ότι η $K_{\max}$, άρα και η $v_{\max}$ των εξερχομένων φωτοηλεκτρονίων εξαρτάται από τη συχνότητα και όχι από την ένταση της φωτεινής ακτινοβολίας.

Εδώ να τονιστεί ότι η πιθανότητα να απορροφήσει περισσότερα του ενός φωτονίου το ίδιο ηλεκτρόνιο είναι στατιστικά απίθανο να συμβεί και συνεπώς είναι απίθανο να συμβεί το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο όταν η συχνότητα της ακτινοβολίας είναι μικρότερη της f_0 όποια και να είναι η ένταση της ακτινοβολίας.

Η σχέση $K_{\max} = h \cdot f - \phi$ είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας f για ένα συγκεκριμένο υλικό της καθόδου.

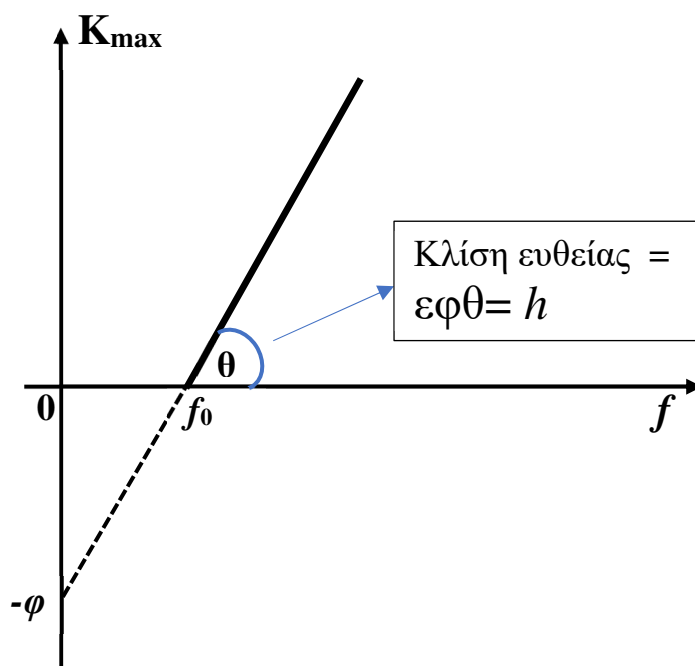
• Ο συντελεστής διεύθυνσης της εξίσωσης ισούται με h . Έτσι από την κλίση της ευθείας μπορεί κάποιος να υπολογίσει πειραματικά την σταθερά του Planck.

• Το σημείο όπου τέμνει τον οριζόντιο άξονα (δηλαδή η συχνότητα για την οποία ξεκινά το φαινόμενο) είναι η συχνότητα κατωφλίου f_0 .

$$K_{\max}=0 \rightarrow f=\varphi/h=f_0.$$

• Τέλος αν προεκτείνουμε την ευθεία αυτή θα τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στην τιμή $-\varphi$ και συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο εξαγωγής.

$$\text{Για } f=0 \rightarrow K_{\max} = -\varphi$$



Από την γραφική παράσταση της (μέγιστης) κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων που εκπέμπονται από την επιφάνεια ενός μετάλλου σε σχέση με τη συχνότητα, του προσπίπτοντος φωτός μπορούμε να βρούμε τη συχνότητα κατωφλίου, το έργο εξαγωγής και τη σταθερά του Planck.

5. Η τάση στην οποία διακόπτεται το φωτοηλεκτρικό ρεύμα ονομάζεται τάση αποκοπής, V_0 .

Είναι προφανές πως αν επιτύχουμε να αποκόψουμε τα πιο κινητικά, δηλαδή αυτά που φεύγουν από την κάθοδο με τη **μέγιστη κινητική ενέργεια** K_{max} , θα μηδενίσουμε το ρεύμα.

Αντιστρέφοντας την πολικότητα μεταξύ ανόδου και καθόδου, το ηλεκτρικό πεδίο δυσκολεύει την κίνηση των φωτοηλεκτρονίων κατά την μετακίνησή τους προς την άνοδο. Για μία τιμή τάσης κανένα ηλεκτρόνιο δεν καταφέρνει να φτάσει στην άνοδο και τότε δεν εμφανίζεται φωτόρρευμα. Η τάση αποκοπής θα είναι αυτή για την οποία ένα ηλεκτρόνιο θα φτάνει στην άνοδο με μηδενική ταχύτητα.

Εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ από την κάθοδο στην άνοδο (με ανεστραμμένη την πολικότητα της πηγής) για τα πιο κινητικά φωτοηλεκτρόνια και θεωρώντας ότι για την τάση αποκοπής θα φτάσουν οριακά στην άνοδο ($K_{τελ} = 0$) παίρνουμε

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{Fηλ} \rightarrow$$

$$0 - K_{αρχ} = q(V_{καθ} - V_{αν}) \rightarrow$$

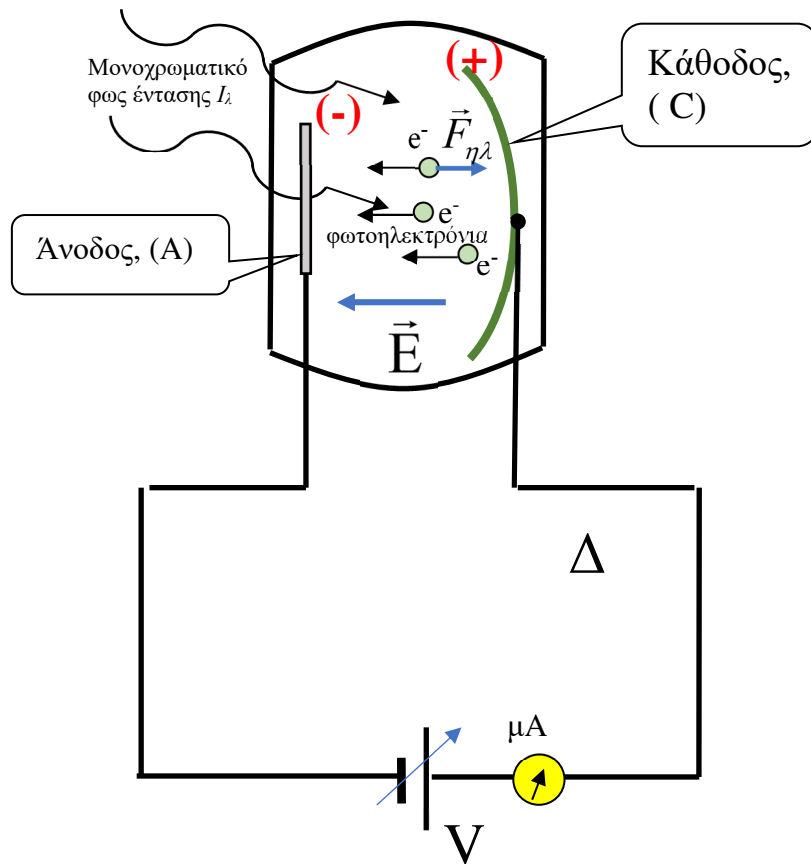
$$0 - K_{max} = -e \cdot V_0 \rightarrow K_{max} = e \cdot V_0$$

Άρα, η μέτρηση της τάσης αποκοπής μας δίνει απευθείας τη μέγιστη κινητική ενέργεια που έχουν κάποια φωτοηλεκτρόνια καθώς εγκαταλείπουν την κάθοδο.

Από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein μπορούμε να γράψουμε:

$$K_{max} = h \cdot f - \phi \rightarrow eV_0 = h \cdot f - \phi \rightarrow V_0 = \frac{h \cdot f}{e} - \frac{\phi}{e}$$

Η τάση αποκοπής εξαρτάται από τη συχνότητα της προσπίπτουσας στην κάθοδο ακτινοβολίας.



Αντιστρέφοντας την πολικότητα μεταξύ ανόδου και καθόδου, το ηλεκτρικό πεδίο δυσκολεύει την κίνηση των φωτοηλεκτρονίων κατά την μετακίνησή τους προς την άνοδο.

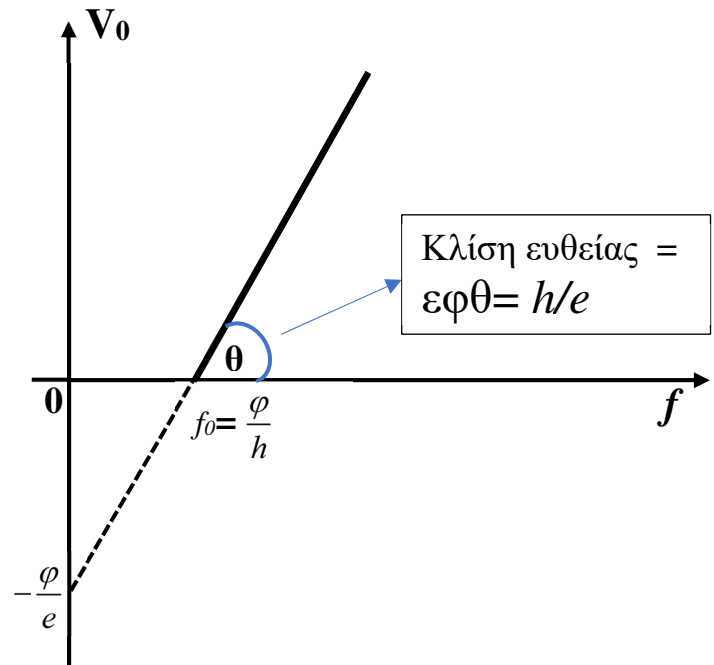
Η παραπάνω σχέση δίνει την τάση αποκοπής σε συνάρτηση με τη συχνότητα του φωτονίου για ένα συγκεκριμένο υλικό της καθόδου.

- Η γραφική παράσταση της παραπάνω σχέσης

είναι ευθεία που έχει κλίση $\tan(\theta) = \frac{h}{e}$.

- Το σημείο όπου τέμνει τον οριζόντιο άξονα (δηλαδή η συχνότητα για την οποία ξεκινά το φαινόμενο) είναι η συχνότητα κατωφλίου f_0 .

Για $V_0=0 \rightarrow f=\phi/h=f_0$. Το σημείο είναι το $\left(\frac{\phi}{h}, 0\right)$



- Αν προεκτείνουμε την ευθεία θα τέμνει τον

κατακόρυφο άξονα στην τιμή $-\frac{\phi}{e}$ και συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο εξαγωγής.

Για $f=0 \rightarrow V_0 = -\phi/e$. Το σημείο αυτό περνάει από το σημείο $\left(0, -\frac{\phi}{e}\right)$.

Επομένως από το διάγραμμα $V_0(f)$ είναι δυνατό να υπολογιστούν η σταθερά h (σταθερά του Planck) και το ϕ (έργο εξαγωγής για το υλικό της φωτοκαθόδου).

7.2.8 Η ορμή των φωτονίων

Η 2η υπόθεση του Einstein για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, δηλαδή, ότι κάθε φωτόνιο της δέσμης που προσπίπτει στη μεταλλική επιφάνεια μεταφέρει την ενέργειά του σε ένα μόνο ηλεκτρόνιο, άφηνε να εννοηθεί ότι το φως στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο συμπεριφέρεται ως ένα ρεύμα σωματιδίων (φωτονίων) και η αλληλεπίδραση φωτονίων -ηλεκτρονίων είναι σύγκρουση δύο σωματιδίων. Από τη στιγμή που στο φως αποδόθηκε και σωματιδιακή φύση αυτό έπρεπε να έχει και ορμή, p , όπως έχουν όλα τα κινούμενα σωματίδια.

Η ορμή που αποδόθηκε σε ένα φωτόνιο είναι ίση με:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Όπου λ το μήκος κύματος της ακτινοβολίας (στο κενό).

Η σχέση προκύπτει ως εξής:

Από τη θεωρία της σχετικότητας προκύπτει πως η ενέργεια του φωτονίου και η ορμή του συνδέονται με τη σχέση $E = p \cdot c$. Παίρνοντας υπόψη ότι η ενέργεια του φωτονίου είναι ίση με $E = h \cdot f$, και την θεμελιώδη κυματική εξίσωση προκύπτει:

$$h \cdot f = p \cdot \lambda \cdot f \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

Η τελευταία σχέση είναι ιδιαίτερα σημαντική, γιατί συνδέει μία καθαρά σωματιδιακή ιδιότητα, όπως η ορμή (p), με μια καθαρά κυματική ιδιότητα, όπως το μήκος κύματος (λ), συνδέοντας έτσι την κυματική φύση του φωτός με τη σωματιδιακή του φύση (p) και τονίζοντας τη δυαδική φύση του φωτός.

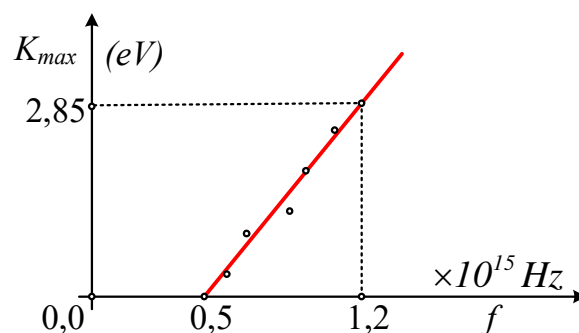
Η ανηγμένη σταθερά του Planck, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, αποτελεί το “κβάντο” της στροφορμής στην κβαντική μηχανική.

7.2.9 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

Κατά τη διάρκεια ενός πειράματος μελέτης του φωτοηλεκτρικού φαινομένου, κατασκευάσαμε το διάγραμμα της μέγιστης κινητικής ενέργειας των εκπεμπόμενων φωτοηλεκτρονίων σε συνάρτηση με τη συχνότητα της ακτινοβολίας που πέφτει στην κάθοδο, παίρνοντας το διπλανό διάγραμμα. Αντλώντας πληροφορίες από το διάγραμμα αυτό και γνωρίζοντας το φορτίο του ηλεκτρονίου $q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$, να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- Ποια η τάση ανακοπής για τις συχνότητες $f_1 = 0,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ και $f_2 = 1,2 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$;
- Να υπολογιστεί η σταθερά h του Planck.
- Ποιο το έργο εξαγωγής του υλικού της καθόδου;
- Αν αλλάξουμε την λυχνία, χρησιμοποιώντας μια άλλη όπου το υλικό της καθόδου έχει έργο εξαγωγής $\phi_1 = 3,25 \text{ eV}$:
 - Να βρεθεί η πειραματική τιμή της συχνότητας κατωφλίου.
 - Να χαράξετε, πάνω στο προηγούμενο διάγραμμα, την γραφική παράσταση $K_{\max} = f(V)$ και να υπολογίστε την τάση αποκοπής για ακτινοβολία με συχνότητα $f_2 = 1,2 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$.



Απάντηση:

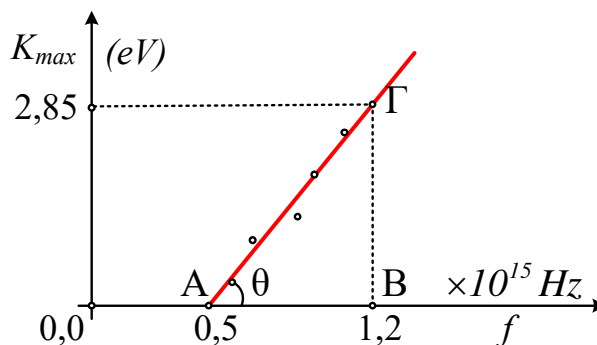
- i)** Για συχνότητα ακτινοβολίας f_1 η μέγιστη κινητική ενέργεια των εξερχομένων ηλεκτρονίων είναι μηδενική, πράγμα που σημαίνει ότι η συχνότητα αυτή είναι η συχνότητα κατωφλίου και η τάση αποκοπής είναι μηδενική, αφού από την φωτοηλεκτρική εξίσωση Einstein παίρνουμε:

$$K_{\max} = hf - \phi \quad (1) \rightarrow$$

$$hf_1 = \phi \quad (2)$$

Αντίθετα για την συχνότητα f_2 η μέγιστη κινητική ενέργεια είναι ίση με 2,85 eV, συνεπώς η τάση αποκοπής θα είναι ίση με 2,85 V. (Τάση μεταξύ ανόδου και φωτιζόμενης καθόδου ίση με -2,85 V).

- ii) Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι η συνάρτηση $K_{max}=f(f)$ είναι πρώτου βαθμού (γι' αυτό και η παραπάνω ευθεία στο διάγραμμα) με την σταθερά του Plank να είναι ίση με τον συντελεστή διεύθυνσής της ευθείας:



$$h = \varepsilon \varphi \theta = \frac{(B\Gamma)}{(AB)} = \frac{2,85 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{(1,2 - 0,5) \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}} = 6,5 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

- iii) Αντικαθιστώντας στην σχέση (2) υπολογίζουμε το έργο εξαγωγής για το υλικό της καθόδου:

$$\varphi = hf_l = 6,5 \cdot 10^{-34} \cdot 0,5 \cdot 10^{15} \text{ J} = 3,25 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad \text{ή}$$

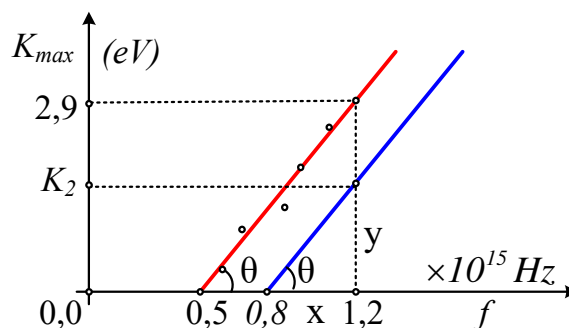
$$\varphi = \frac{3,25 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 2,03 \text{ eV}$$

- iv) Για την δεύτερη λυχνία με άλλο υλικό καθόδου, θα έχουμε:

α) Από την εξίσωση (2) βρίσκουμε για την συχνότητα κατωφλίου:

$$\varphi_l = hf_{0l} \rightarrow f_{0l} = \frac{\varphi_l}{h} = \frac{3,25 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6,5 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 0,8 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

β) Με βάση τα προηγούμενα και το αντίστοιχο γράφημα για την δεύτερη λυχνία, θα είναι επίσης μια ημιευθεία, η οποία θα ξεκινά από την τιμή $f_{0l} = 0,8 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ και θα είναι παράλληλη στην προηγούμενη, αφού η κλίση της θα είναι ξανά θ (ίδιο $h \dots$), όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αλλά τότε παίρνοντας την εφθ θα έχουμε:



$$h = \varepsilon \varphi \theta = \frac{y}{x} \rightarrow$$

$$y = K_2 = x \cdot \varepsilon \varphi \theta = x \cdot h = (1,2 - 0,8) 10^{15} \cdot 6,5 \cdot 10^{-34} \text{ J} = 2,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad \text{ή}$$

$$K_2 = \frac{2,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} \approx 1,6 \text{ eV}$$

Αλλά τότε η τάση αποκοπής για την συχνότητα $1,2 \cdot 10^{15} \text{ J}$ είναι ίση με 1,6V.

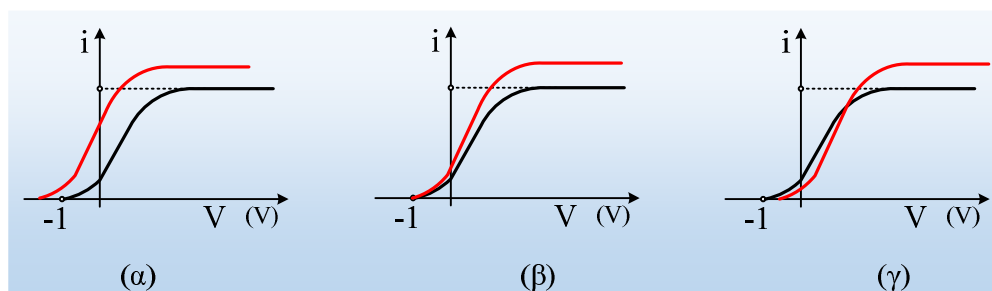
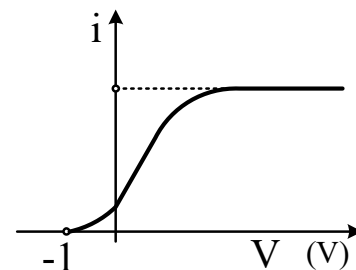
Εναλλακτικά, από την εξίσωση (1) θα έχουμε:

$$K_{2,\max} = hf_2 - \phi_1 = \frac{6,5 \cdot 10^{-34} \cdot 1,2 \cdot 10^{15} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} - 3,25 \text{ eV} \approx 1,6 \text{ eV}$$

Παράδειγμα 2.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το διάγραμμα της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με την τάση μεταξύ ανόδου-καθόδου σε ένα φωτοκύτταρο, όπου φωτίζουμε την κάθοδο με την βοήθεια μιας λάμπας Α, η οποία τοποθετείται σε απόσταση d .

- i) Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα δίνει την μορφή της καμπύλης (κόκκινη γραμμή), στην περίπτωση που πλησιάσουμε την λάμπα σε απόσταση $d_1 < d$;



- ii) Απομακρύνουμε την λάμπα φωτισμού σε απόσταση $d_2 > d$. Να χαράξετε πάνω στο αρχικό διάγραμμα, την νέα καμπύλη $i=f(V)$.
- iii) Αλλάζουμε λάμπα φωτισμού πλησιάζοντας σε απόσταση d , μια άλλη Β η οποία εκπέμπει σε μικρότερα μήκη κύματος, στέλνοντας στην κάθοδο, τον ίδιο αριθμό φωτονίων, με την Α. Ποια θα είναι τώρα η μορφή της καμπύλης $i=f(V)$. Η νέα καμπύλη να χαραχθεί πάνω στο αρχικό διάγραμμα.
- iv) Ποια η αντίστοιχη καμπύλη αν η λάμπα Β εξέπεμπε ακτινοβολία της ίδιας έντασης με την αρχική λάμπα Α;

Θεωρούμε ότι ο αριθμός των εξερχομένων φωτοηλεκτρονίων είναι ίσος με ένα σταθερό ποσοστό του αριθμού των φωτονίων, τα οποία προσπίπτουν στην κάθοδο.

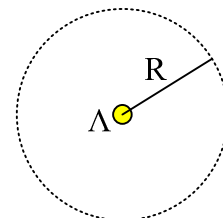
Απάντηση:

- i) Η τάση αποκοπής είναι ίση με 1V (η διαφορά δυναμικού ανόδου-καθόδου είναι ίση με -1V). Αλλά τότε από την φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein παίρνουμε:

$$K_{\max} = hf - \phi \rightarrow q_e V_a = hf - \phi$$

Αλλά αν έχουμε μια λάμπα που εκπέμπει φως με διαφορετικές συχνότητες, η μεγαλύτερη συχνότητα θα καθορίσει και την τάση αποκοπής. Και αν δεν αλλάξει η λάμπα, δεν θα αλλάξει και η τάση αποκοπής η οποία θα παραμείνει στην τιμή $V_0=1V$. Τι συμβαίνει όμως με το πλησίασμα της λάμπας;

Έστω μια φωτεινή πηγή Λ, ας την θεωρήσουμε αμελητέων διαστάσεων, η οποία εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με ισχύ Ρ. Τότε παίρνοντας μια σφαίρα με κέντρο την πηγή και ακτίνα R, στην επιφάνειά της θα φτάνει



ενέργεια $W=Pt$, ίση με αυτήν που εκπέμπει η πηγή, οπότε η ένταση της ακτινοβολίας στην επιφάνειά της, θα είναι ίση:

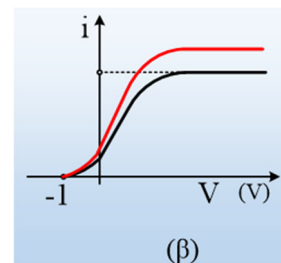
$$I = \frac{W}{S \cdot \Delta t} = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi R^2}$$

Αφού η επιφάνεια της σφαίρας έχει εμβαδόν $4\pi R^2$.

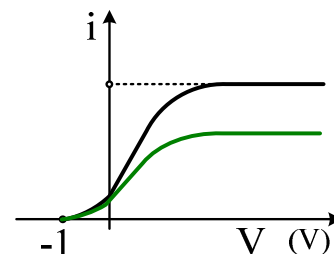
Βλέπουμε δηλαδή ότι η ένταση της ακτινοβολίας είναι αντιστρόφως ανάλογη προς το τετράγωνο της απόστασης της πηγής από την επιφάνεια πρόσπτωσης.

Αλλά τότε πλησιάζοντας την λάμπα στην κάθοδο, αυξάνουμε την ένταση της ακτινοβολίας, στην κάθοδο προσπίπτουν περισσότερα φωτόνια, συνεπώς θα ελευθερώνονται και περισσότερα ηλεκτρόνια και θα αυξάνεται η ένταση του ρεύματος.

Σύμφωνα με όλα αυτά, το σωστό διάγραμμα είναι το (β), όπως στο διπλανό σχήμα.



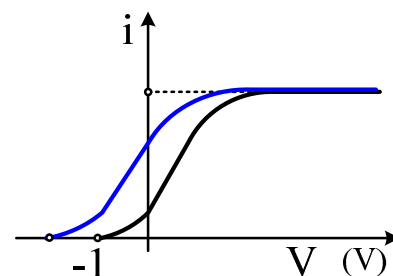
- ii)** Με βάση τα παραπάνω, απομακρύνοντας την λάμπα από το φωτοκύτταρο, δεν θα αλλάξει η τάση αποκοπής, αλλά θα μειωθεί η ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και η καμπύλη θα πάρει τη μορφή του διπλανού σχήματος, με πράσινο χρώμα.



- iii)** Αφού όταν φωτίζεται η κάθοδος από την λάμπα B, δέχεται τον ίδιο αριθμό φωτονίων με πριν, θα εξέρχονται και ίδιος αριθμός ηλεκτρονίων (ένα ποσοστό των φωτονίων που προσπίπτουν θα απορροφηθούν από ηλεκτρόνια, τα οποία θα εξέλθουν της επιφάνειας), συνεπώς και θα έχουμε την ίδια μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος. Όμως τώρα η λάμπα B εκπέμπει σε μικρότερη μήκη κύματος, συνεπώς τα φωτόνια θα μεταφέρουν μεγαλύτερη ενέργεια από τα αντίστοιχα της A λάμπας, με αποτέλεσμα τα ηλεκτρόνια που ελευθερώνονται να έχουν μεγαλύτερες κινητικές ενέργειες και άρα μεγαλύτερη $K_{\max}$ άρα και πιο «μεγάλη» τάση αποκοπής, αφού:

$$q_e V_a = hf - \phi$$

Έτσι το διάγραμμα παίρνει την μορφή του διπλανού σχήματος.

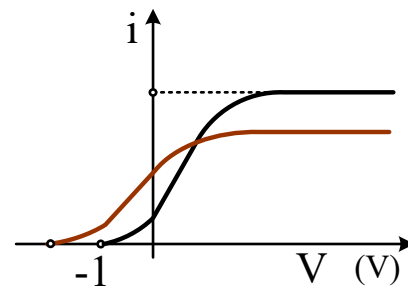


- iv)** Αν η λάμπα B εξέπεμπε ακτινοβολία της ίδιας έντασης, αλλά με μεγαλύτερες συχνότητες, τότε στην κάθοδο θα έφταναν λιγότερα φωτόνια. Πράγματι για την ενέργεια της προσπίπτουσας ακτινοβολίας στην κάθοδο (ας την πάρουμε ως μονοχρωματική...) θα έχουμε:

$$W_k = I \cdot A = \frac{W_A}{4\pi R^2} \cdot A = \frac{N \cdot hf}{4\pi R^2} \cdot A$$

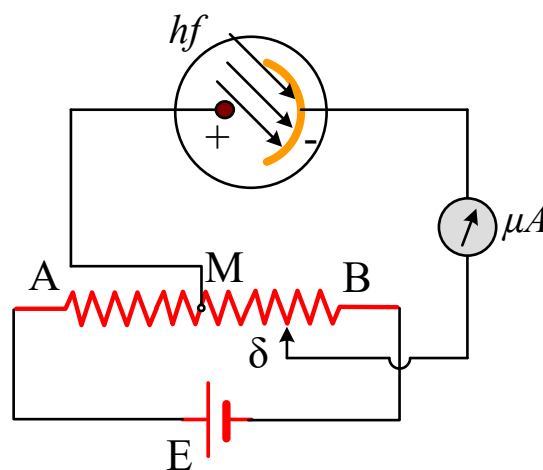
Όπου I η ένταση της ακτινοβολίας που πέφτει στην κάθοδο η οποία έχει εμβαδόν A , W_A η συνολική ενέργεια που ακτινοβολεί η λάμπα και N ο αριθμός των φωτονίων που εκπέμπονται.

Πράγμα που σημαίνει ότι για την ίδια ένταση, όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα, τόσο μικρότερος αριθμός (N) φωτονίων απαιτούνται για την διάδοση της ενέργειας αυτής. Κατά συνέπεια θα εξέρχεται από την κάθοδο και ένας μικρότερος αριθμός ηλεκτρονίων, με αποτέλεσμα να έχουμε και μικρότερη μέγιστη ένταση ρεύματος, (**ρεύματος κόρου**). Αντίθετα η τάση αποκοπής θα είναι ίδια με αυτήν του προηγούμενου ερωτήματος. Με βάση αυτά η καμπύλη παίρνει τη μορφή του διπλανού σχήματος.



Παράδειγμα 3.

Στο σχήμα δίνεται μια πειραματική διάταξη για την μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου, όπου $E=8V$, ενώ το ποτενσιόμετρο μήκους $(AB)=20cm$ παρουσιάζει αντίσταση $R=4\Omega$. Η φωτιζόμενη κάθοδος του αερόκενου σωλήνα συνδέεται με τον δρομέα δ , ενώ η άνοδος με το μέσον M του ποτενσιόμετρου. Ρίχνουμε στην κάθοδο μονοχρωματική ακτινοβολία με μήκος κύματος $\lambda=375nm$ (στην περιοχή του υπεριώδους), με αποτέλεσμα από την κάθοδο να εξέρχονται φωτοηλεκτρόνια, ενώ ο δρομέας απέχει από το M απόσταση $(M\delta)=5cm$. Δίνονται το έργο εξαγωγής του υλικού της καθόδου $\phi=2,1eV$, η ταχύτητα του φωτός στο κενό $c=3 \cdot 10^8 m/s$, το φορτίο του ηλεκτρονίου $q_e=-e=-1,6 \cdot 10^{-19}C$ και η σταθερά του Plank $h=6,6 \cdot 10^{-34}J \cdot s$.



- Να υπολογίσετε την ενέργεια ενός φωτονίου της προσπίπτουσας ακτινοβολίας σε J και σε eV .
- Ποια η μέγιστη κινητική ενέργεια, την οποία μπορεί να έχει ένα ηλεκτρόνιο, την στιγμή της εξόδου του από την κάθοδο;
- Θεωρώντας αμελητέα την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το μικροαμπερόμετρο (αμελητέα σε σχέση με την ένταση του ρεύματος που διαρρέει την πηγή), να βρεθεί η τάση μεταξύ ανόδου και καθόδου.
- Ποια η μέγιστη κινητική ενέργεια που μπορεί να έχει ένα ηλεκτρόνιο τη στιγμή που φτάνει στην άνοδο;
- Να βρεθεί η ελάχιστη μετακίνηση του δρομέα δ , από την προηγούμενη θέση του, ώστε το μικροαμπερόμετρο να πάψει να διαρρέεται από ρεύμα;

Απάντηση:

- i) Η ενέργεια ενός προσπίπτοντος φωτονίου, είναι ίση:

$$E = hf \xrightarrow{c=\lambda f} E = h \frac{c}{\lambda} = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{375 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 5,28 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Το 1eV είναι το έργο που παράγεται κατά την μετακίνηση ενός ηλεκτρονίου μεταξύ δύο σημείων τα οποία παρουσιάζουν διαφορά δυναμικού 1Volt. Αλλά τότε:

$$1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1\text{V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Και η παραπάνω ενέργεια του φωτονίου θα είναι σε eV:

$$E = 5,28 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \frac{5,28 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}}} = 3,3\text{eV}$$

- ii) Ένα εξερχόμενο ηλεκτρόνιο έχει μέγιστη κινητική ενέργεια, όταν βρίσκεται στην επιφάνεια του μετάλλου, οπότε από την φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein παίρνουμε:

$$K_{\max} = hf - \phi = 3,3\text{eV} - 2,1\text{eV} = 1,2\text{eV}$$

- iii) Θεωρώντας αμελητέα την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το μικροαμπερόμετρο, τότε **όλο** το ποτενσιόμετρο διαρρέεται από την ίδια ένταση ρεύματος:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{8\text{V}}{4\Omega} = 2\text{A}$$

Ενώ για τις τάσεις $V_{M\delta}$ και $V_{AB}=E$ ισχύει:

$$V_{M\delta} = I \cdot R_{M\delta} \quad \text{και} \quad V_{AB} = E = I \cdot R_{AB}, \text{ οπότε:}$$

$$\frac{V_{M\delta}}{V_{AB}} = \frac{I R_{M\delta}}{I R_{AB}} = \frac{R_{M\delta}}{R_{AB}} = \frac{(M\delta)}{(AB)} \rightarrow$$

$$V_{M\delta} = E \cdot \frac{(M\delta)}{(AB)} = 8\text{V} \cdot \frac{5\text{cm}}{20\text{cm}} = 2\text{V}$$

Η παραπάνω τάση εφαρμόζεται και μεταξύ ανόδου και καθόδου, συνεπώς $V=2\text{V}$.

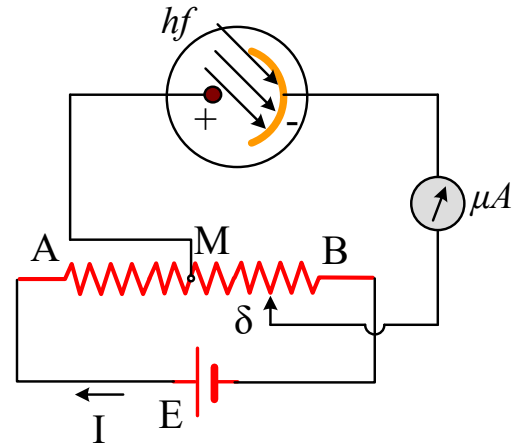
- iv) Το ηλεκτρόνιο κατά την επιτάχυνσή του από την κάθοδο μέχρι την άνοδο, δέχεται δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο, η οποία παράγει έργο:

$$W_{\kappa.\alpha} = qV_{KA} = -e \cdot (-V_{M\delta}) = eV_{M\delta} = 2\text{eV}$$

Οπότε ένα ηλεκτρόνιο που ξεκινά από την κάθοδο με μέγιστη κινητική ενέργεια 1,2eV, κερδίζοντας ενέργεια 2eV, θα φτάσει στην άνοδο με κινητική ενέργεια:

$$K_{\alpha\nu} = K_{\max} + W_{\kappa.\alpha}(I) \rightarrow$$

$$K_{\alpha\nu} = 1,2\text{eV} + 2\text{eV} = 3,2\text{eV}$$



▼) Για την τάση ανακοπής θα έχουμε από την (1) θέτοντας $K_{av}=0$:

$$K_{av} = K_{\max} + W_{\kappa,\alpha} \rightarrow 0 = K_{\max} - eV_{\kappa,\alpha} \rightarrow 0 = 1,2eV - eV_{\kappa,\alpha} \rightarrow$$

$$V_{\kappa,\alpha} = 1,2eV \rightarrow V_{a,\kappa} = V_{M\delta} = -1,2eV$$

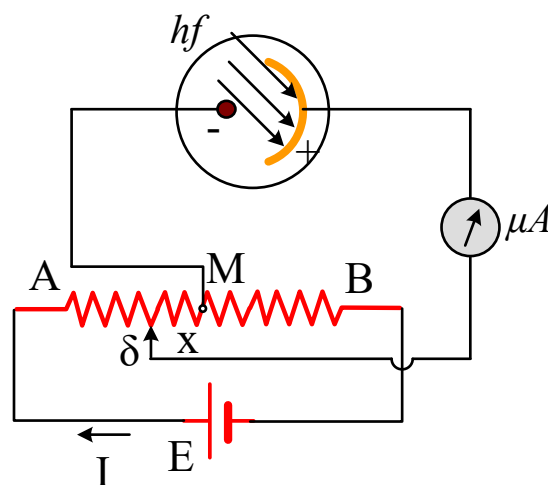
Η παραπάνω τιμή αρνητικής τάσης μας λέει ότι πλέον η κάθοδος συνδέεται με τον θετικό πόλο της πηγής και η άνοδος με τον αρνητικό (αν και θα έπρεπε εδώ να τους αλλάξουμε και ονόματα...) και αυτό μπορεί να συμβεί αν ο δρομέας δ, βρεθεί αριστερά του Μ, όπως στο σχήμα, σε απόσταση x από το μέσον Μ του ποτενσιόμετρου. Αλλά τότε δουλεύοντας όπως και στο ερώτημα iii) θα έχουμε:

$$\frac{V_{\delta'M}}{V_{AB}} = \frac{IR_{\delta'M}}{IR_{AB}} = \frac{R_{\delta'M}}{R_{AB}} = \frac{x}{(AB)} \rightarrow$$

$$x = (AB) \cdot \frac{V_{\delta'M}}{V_{AB}} = 20cm \cdot \frac{1,2V}{8V} = 3cm$$

Συνεπώς ο δρομέας θα πρέπει να μετακινηθεί προς τα αριστερά και απόσταση:

$$d = \delta'M + M\delta = 3cm + 5cm = 8cm.$$



7.3 Φαινόμενο Compton

7.3.1 Εισαγωγή-Ακτίνες X (Ακτίνες Röntgen)

Οι ακτίνες X είναι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με πολύ μικρά μήκη κύματος από 0,001 nm μέχρι 1nm. Ανακαλύφθηκαν το Νοέμβριο του 1895 από τον Wilhelm Röntgen, (Βίλχελμ Ρέντγκεν). Ο Röntgen, καθώς ασχολείτο με τη μελέτη των καθοδικών ακτίνων, παρατήρησε ότι μια φθορίζουσα επιφάνεια, η οποία βρισκόταν μακριά από τη συσκευή του στο σκοτεινό εργαστήριό του, φωτοβολούσε, όταν ο σωλήνας Crookes των καθοδικών ακτίνων λειτουργούσε. Μετά από πολλές παρατηρήσεις, ο Röntgen κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο σωλήνας εκπέμπει μια νέα, άγνωστη μέχρι τότε αόρατη διεισδυτική ακτινοβολία. Την ακτινοβολία αυτήν ονόμασε ακτίνες x, επειδή δε γνώριζε τη φύση και την προέλευσή τους. Μετέπειτα οι ακτίνες ονομάστηκαν προς τιμήν του ακτίνες Röntgen.

Οι ακτίνες X βρίσκουν ευρύτατες εφαρμογές στις ακτινογραφίες, τόσο στην ιατρική όσο και στη βιομηχανία. Η παραγωγή των ακτίνων X είναι φαινόμενο αντίστροφο του φωτοηλεκτρικού φαινομένου. Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο φωτόνια προσπίπτουν στη μεταλλική επιφάνεια και προκαλούν εξαγωγή ηλεκτρονίων. Στις ακτίνες X, ταχέως κινούμενα ηλεκτρόνια προσπίπτουν στη μεταλλική επιφάνεια και προκαλούν την εκπομπή των φωτονίων X.



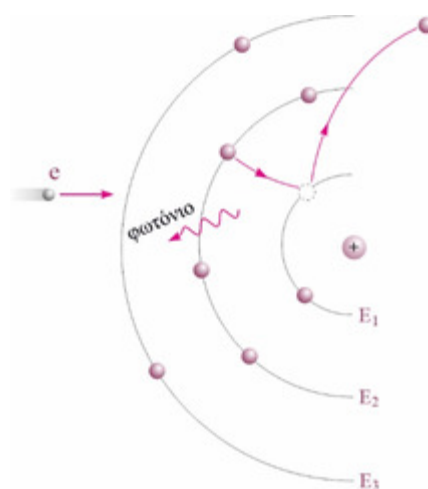
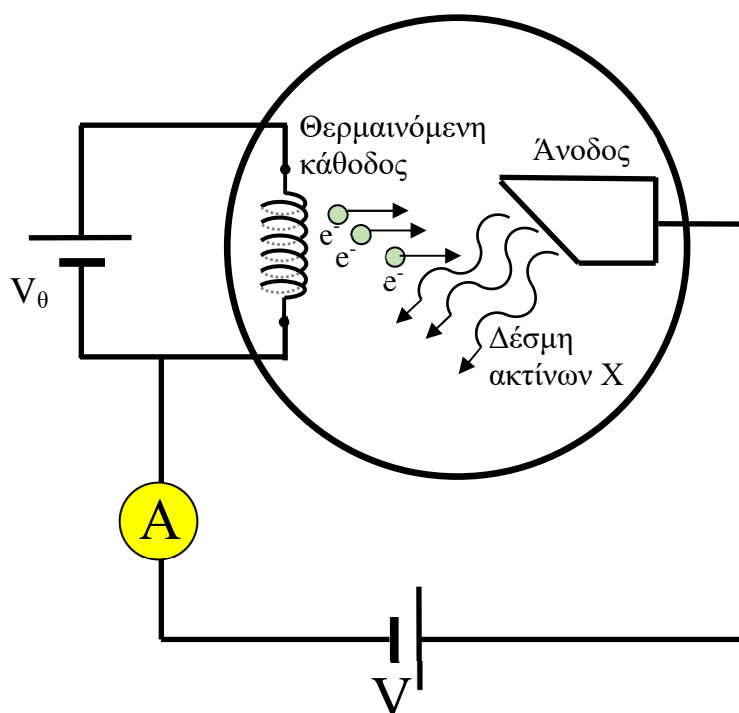
Η εικονιζόμενη ακτινογραφία ελήφθη στις 23 Ιανουαρίου 1896 και είναι μία από τις πρώτες. Απεικονίζει το χέρι της συζύγου του Wilhelm Röntgen.

Ο μηχανισμός παραγωγής των ακτίνων X είναι ακριβώς ο αντίστροφος του φωτοηλεκτρικού φαινομένου. Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο μια μεταλλική επιφάνεια «βομβαρδίζεται» με ηλεκτρομαγνητικό κύμα και εκπέμπει ηλεκτρόνια. Στις ακτίνες X η μεταλλική επιφάνεια «βομβαρδίζεται» με ταχέως κινούμενα ηλεκτρόνια και εκπέμπεται ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

Οι παραγόμενες ακτίνες X οφείλουν τη δημιουργία τους σε δύο εντελώς ανεξάρτητους μηχανισμούς.

Στον πρώτο μηχανισμό, τα ταχέως κινούμενα ηλεκτρόνια, επιβραδύνονται απότομα λόγω της σύγκρουσής τους με το στόχο της ανόδου και η απότομη αυτή επιβράδυνση προκαλεί την παραγωγή φωτονίων (γεγονός που προβλέπει και η θεωρία του Maxwell). Επειδή κατά τις κρούσεις των ηλεκτρονίων με τα άτομα του στόχου τα ηλεκτρόνια μπορεί να χάσουν οποιοδήποτε μέρος της ενέργειάς τους, συμπεραίνουμε ότι τα φωτόνια που εκπέμπονται θα έχουν οποιαδήποτε τιμή ενέργειας, που θα είναι μικρότερη ή ίση της αρχικής ενέργειας του ηλεκτρονίου. Επομένως το φάσμα της ακτινοβολίας αυτής θα είναι συνεχές. Η ακτινοβολία αυτή ονομάζεται ακτινοβολία πέδησης.

Στον δεύτερο μηχανισμό, τα ταχέως κινούμενα ηλεκτρόνια μεταφέρουν την ενέργειά τους στα άτομα και προκαλούν τη διέγερσή τους, δηλαδή ηλεκτρόνια από τις εσωτερικές στιβάδες του ατόμου μεταπηδούν σε εξωτερικές. Η κενή θέση του ηλεκτρονίου μπορεί να συμπληρωθεί από ένα ηλεκτρόνιο του ατόμου που βρίσκεται στις εξωτερικές στιβάδες, με ταυτόχρονη εκπομπή ενός φωτονίου. Η ενέργεια αυτής της ακτινοβολίας, είναι ακριβώς ίση, με τη διαφορά των δύο ενεργειακών σταθμών του ατόμου. Αυτό εξηγεί το γραμμικό φάσμα εκπομπής των ακτίνων X.



7.3.2 Φαινόμενο Compton

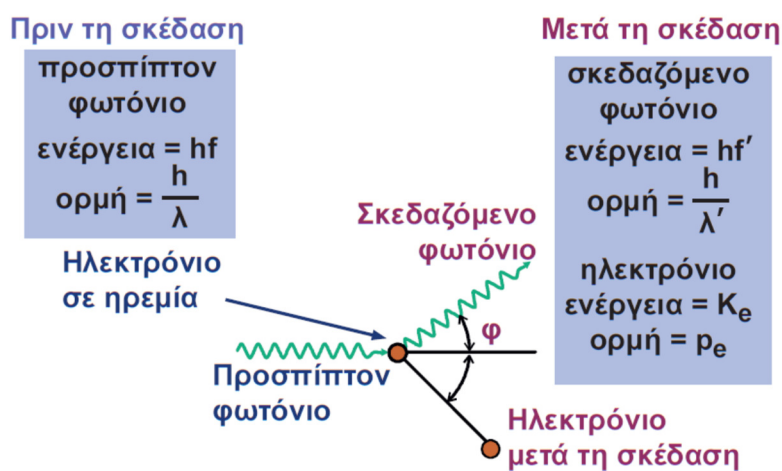
Στη Φυσική, το φαινόμενο Compton αναφέρεται στη σκέδαση, (αλλαγή κατεύθυνσης) ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από φορτισμένα σωματίδια. Ήταν ένα από τα φαινόμενα που αδυνατούσε να εξηγήσει η κλασική φυσική και μία από τις πρώτες επιτυχίες της κβαντικής θεωρίας. Με το φαινόμενο Compton επιβεβαιώθηκε πειραματικά η σωματιδιακή φύση του φωτός, δηλαδή η ύπαρξη των φωτονίων.

Ο Arthur Compton, το 1924, παρατήρησε ότι όταν ακτίνες X με μήκος κύματος λ προσπίπτουν πάνω σε λεπτή υλική επιφάνεια, ένα τμήμα της δέσμης εκτρέπεται από την ευθύγραμμη πορεία του (σκεδάζεται). Ο Compton διαπίστωσε ότι το μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας, λ' , ήταν μεγαλύτερο από αυτό της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, λ . Μάλιστα η διαφορά των δύο μηκών κύματος, $\lambda' - \lambda$, εξαρτιόταν μόνο από τη γωνία, ϕ , που σχημάτιζαν οι δύο δέσμες μεταξύ τους.



Ο Άρθουρ Χόλι Κόμπτον (Arthur Holly Compton, 10 Σεπτεμβρίου 1892 – 15 Μαρτίου 1962)

Ήταν Αμερικανός φυσικός στον οποίο το 1927 απονεμήθηκε το βραβείο Νόμπελ Φυσικής για την ανακάλυψη του φαινομένου που φέρει το όνομα του. Ο Κόμπτον γεννήθηκε στο Wooster της πολιτείας Οχάιο το 1892 από τον Ελίας και την Οτέλια Κόμπτον. Ήταν μια ακαδημαϊκή οικογένεια. Ο πατέρας του ήταν πρύτανης του Πανεπιστημίου Wooster το οποίο παρακολούθησε ο Άρθουρ και επίσης έγινε μέλος της Άλφα Ωμέγα Ταυ αδελφότητας.



Πειραματικά αποδείχθηκε ότι η σχέση που συνδέει το μήκος κύματος λ του φωτονίου πριν την κρούση με το μήκος κύματος λ' , μετά είναι:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos(\phi)), \quad 0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ$$

Η μάζα m αναφέρεται στο σωματίδιο πάνω στο οποίο σκεδάζεται το φωτόνιο (ηλεκτρόνιο στο πείραμα του Compton). Η σχέση μπορεί να προκύψει² χωρίς μεγάλη δυσκολία από την διατήρηση της ορμής και την διατήρηση της ενέργειας για την (ελαστική) σκέδαση. Το γεγονός ότι διαπιστώθηκε πειραματικά ότι ισχύει ήταν μια ισχυρή ένδειξη της σωματιδιακής φύσης του φωτός.

Η ποσότητα $\frac{h}{mc}$ έχει μονάδες μήκους κύματος και **ονομάζεται μήκος κύματος Compton**, λ_c , οπότε η σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos(\phi)) \quad \text{ή} \quad \Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos(\phi))$$

² Η απόδειξη υπάρχει στο σχολικό βιβλίο, αλλά είναι εκτός ύλης.

Παρατηρήσεις

1) Μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι η μεταβολή του μήκους κύματος θα εξαρτηθεί μόνο από την γωνία που θα σκεδαστεί η ακτινοβολία από την αρχική της διεύθυνση.

2) Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι παρόλο που το μήκος κύματος Compton έχει μονάδες μήκους, δεν αντιπροσωπεύει κάποιο πραγματικό φυσικό μέγεθος. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί ως μια τάξη μεγέθους του μήκους κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας έτσι ώστε να μπορεί να γίνει αντιληπτό το φαινόμενο. Αν διαιρέσουμε τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με το μήκος κύματος λ της προσπίπτουσας ακτινοβολίας προκύπτει:

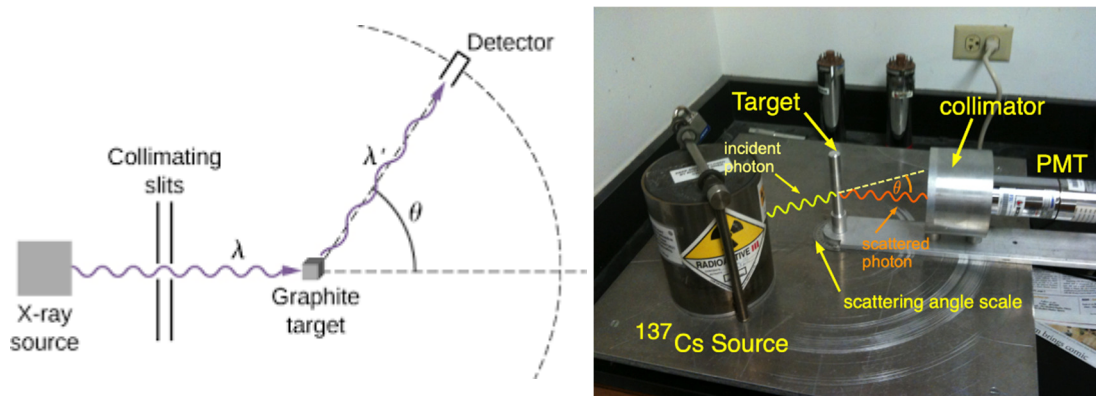
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_c}{\lambda} (1 - \cos(\varphi))$$

Δηλαδή, η **ποσοστιαία μεταβολή** του μήκους κύματος εξαρτάται από το πηλίκο $\frac{\lambda_c}{\lambda}$. Αν το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι αρκετά μεγαλύτερο από το αντίστοιχο μήκος κύματος Compton το φαινόμενο δεν μπορεί να είναι παρατηρήσιμο. Γι' αυτό για να παρατηρηθεί το φαινόμενο Compton η προσπίπτουσα ακτινοβολία πρέπει να έχει μεγάλη ενέργεια, (υψηλής συχνότητας). Για την περίπτωση που ο στόχος είναι ηλεκτρόνιο όπως στο πείραμα του Compton με αντικατάσταση προκύπτει ότι $\lambda_c = 0,243 \cdot 10^{-11} \text{ m}$. Η συγκεκριμένη τιμή είναι στην περιοχή των ακτίνων X, και έτσι η μεταβολή του μήκους κύματος είναι αισθητή. Για σκέδαση πάνω σε μεγαλύτερα σωματίδια το αντίστοιχο μήκος κύματος Compton θα ήταν μικρότερο, κάνοντας το πείραμα πιο δύσκολο ή αδύνατο.

3) Στο πείραμα Compton μια δέσμη συγκεκριμένης συχνότητας ακτίνων X ή γ βομβαρδίζει κάποιο στόχο και τα υψηλής ενέργειας φωτόνια αλληλεπιδρούν με τα ηλεκτρόνια του υλικού του στόχου, τα οποία μπορούν με πολύ καλή προσέγγιση να θεωρηθούν ακίνητα. Τα ηλεκτρόνια μπορούν να είναι είτε ελεύθερα είτε δέσμια, αφού ούτως ή άλλως οι ενέργειές τους (μερικά eV) σε σχέση με τις ενέργειες των ακτίνων X (εκατοντάδες keV) είναι αμελητέες.

4) Στην περίπτωση αλληλεπίδρασης φωτονίου με απολύτως ελεύθερα ηλεκτρόνια λαμβάνει χώρα μόνο το φαινόμενο Compton (για λόγους διατήρησης ορμής και ενέργειας). Όταν τα φωτόνια αλληλεπιδρούν με ηλεκτρόνια που βρίσκονται στην ύλη, μπορούν να προκαλέσουν είτε φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είτε φαινόμενο Compton, ανάλογα με την ενέργειά τους. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι πιθανότερο για μικρές ενέργειες φωτονίων, ενώ το φαινόμενο Compton αρχίζει να κυριαρχεί για μεγαλύτερες ενέργειες φωτονίων.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια διάταξη για την πραγματοποίηση του πειράματος.



7.3.3 Ερμηνεία φαινομένου με βάση την κβαντική θεώρηση

Αποτυχία εξήγησης του φαινομένου με την κλασική θεωρία.

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα συχνότητας f αλληλεπιδρά με τα άτομα του στόχου θέτοντας τα ηλεκτρόνια του στόχου σε ταλάντωση με συχνότητα ίση με την συχνότητα του κύματος. Η ταλάντωση των ηλεκτρονίων με τη σειρά τους παράγουν ένα δεύτερο ηλεκτρομαγνητικό κύμα με συχνότητα ίση με την συχνότητα ταλάντωσης των ηλεκτρονίων. Δηλαδή τα άτομα διεγείρονται και κατόπιν αυτά κατά την αποδιέγερσή τους επανεκπέμπουν σαν μικρές κεραίες κύματα ίδιας συχνότητας με την συχνότητα των προσπίπτοντων. Συνεπώς σύμφωνα με την κλασική θεωρία θα έπρεπε τα σκεδαζόμενα φωτόνια να έχουν ίδια συχνότητα και άρα ίδιο μήκος κύματος με τα προσπίπτοντα.

Ερμηνεία του φαινομένου με κβαντομηχανική

Το φαινόμενο ερμηνεύεται πλήρως όταν η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία αντιμετωπιστεί ως ρεύμα φωτονίων, δηλαδή σωματιδίων με μηδενική μάζα ηρεμίας, που όμως έχουν ενέργεια και ορμή. Τότε το πρόβλημα σκέδασης της ακτινοβολίας μετατρέπεται σε ένα πρόβλημα κρούσης ανάμεσα σε ένα φωτόνιο και ένα σωματίδιο. Από την διατήρηση της ενέργειας για την κρούση προκύπτει:

$$E_{\text{φωτ}} = E'_{\text{φωτ}} + K_e \Rightarrow E_{\text{φωτ}} > E'_{\text{φωτ}} \Rightarrow hf > hf' \Rightarrow h \frac{c}{\lambda} > h \frac{c}{\lambda'} \Rightarrow \boxed{\lambda' > \lambda}$$

Επιπλέον εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση δύο σωματιδίων συσχετίζεται η γωνία εκτροπής με την μεταβολή του μήκους κύματος και προκύπτει

Η εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής για την κρούση δύο σωματιδίων, ερμηνεύει τη σχέση της γωνίας εκτροπής φ με τη διαφορά των δύο μηκών κύματος και οδηγεί στη σχέση $\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos(\varphi))$.

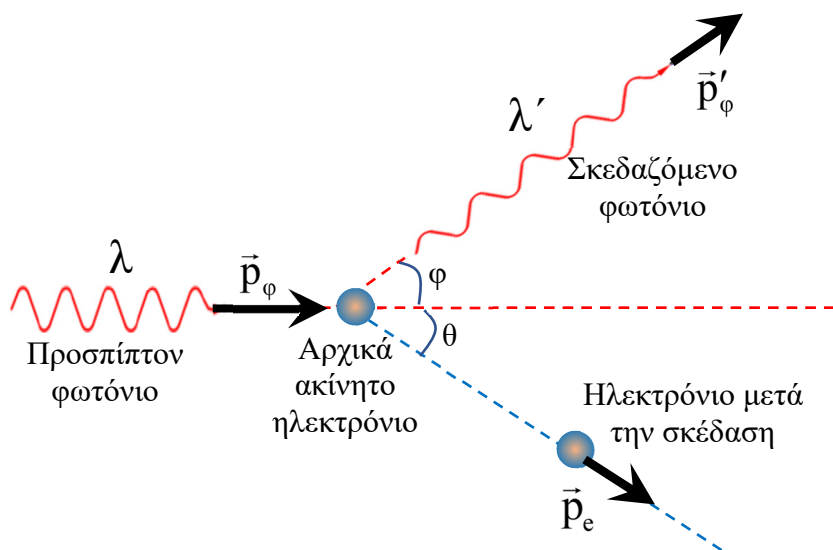
7.3.4 Μαθηματική περιγραφή και χρήσιμες σχέσεις

Αρχικά να θυμίσουμε κάποιες σχέσεις που μπορεί να φανούν χρήσιμες κατά την μελέτη του φαινομένου.
Ενέργεια φωτονίου: $E = h \cdot f$

Ορμή φωτονίου: $p = \frac{h}{\lambda}$

Σχέση ορμής και ενέργειας : $E = p \cdot c$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια σχηματική αναπαράσταση του φαινομένου.



Από την διατήρηση της ενέργειας προκύπτει:

$$E_{\text{φωτ}} = E'_{\text{φωτ}} + K_e \Rightarrow h \cdot f = h \cdot f' + \frac{1}{2}mv^2, \text{ για μη σχετικιστικές ταχύτητες}$$

Από την διατήρηση της ορμής προκύπτει:

$$\vec{p}_{\text{φωτ}} = \vec{p}'_{\text{φωτ}} + \vec{p}_e$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να εφαρμοστεί και σε άξονες κανονικά όπως σε περίπτωση διατήρησης ορμής σε σωματίδια.

Από τον συνδυασμό των παραπάνω προκύπτει:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos(\varphi)), \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$$

Τέλος χρήσιμες μπορεί να είναι και οι σχέσεις που προκύπτουν από την σχέση της μεταβολής του μήκους κύματος:

- ποσοστιαία μεταβολή μήκους κύματος:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_c}{\lambda} (1 - \cos(\varphi))$$

- Μία ακόμα σχέση που συσχετίζει τις ενέργειες του φωτονίου πριν και μετά την σκέδαση είναι:

Από την σχέση της ενέργειας του φωτονίου $E = h \cdot f$ μπορούμε να γράψουμε:

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h \cdot c}{E}}. \text{ Ομοίως } \boxed{\lambda' = \frac{h \cdot c}{E'}}.$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην σχέση του Compton προκύπτει:

$$\frac{h \cdot c}{E'} - \frac{h \cdot c}{E} = \frac{h}{mc} (1 - \cos(\varphi)) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{(1 - \cos(\varphi))}{mc^2}}$$

- Διερεύνηση για διάφορες τιμές της γωνίας σκέδασης



Από την διατήρηση της ενέργειας προκύπτει ότι όσο λιγότερη ενέργεια έχει το σκεδαζόμενο φωτόνιο τόσο μεγαλύτερη θα είναι η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά την σκέδαση. Γράφοντας την ενέργεια του φωτονίου στη μορφή $E' = h \cdot \frac{c}{\lambda'}$ μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι όσο μεγαλύτερο

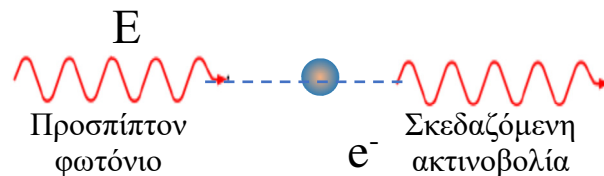
είναι το μήκος κύματος μετά την σκέδαση τόσο μικρότερη η ενέργειά του και συνεπώς τόσο μεγαλύτερη η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου. Όμως η μεταβολή του μήκους κύματος εξαρτάται αποκλειστικά από την γωνία σκέδασης:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos(\varphi)), \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$$

Παρατηρούμε ότι για γωνίες από 0° μέχρι 180° η τιμή της ποσότητας $(1 - \cos(\varphi))$ μεγαλώνει όσο μεγαλώνει η γωνία.

Συγκεκριμένα:

- $\varphi = 0$



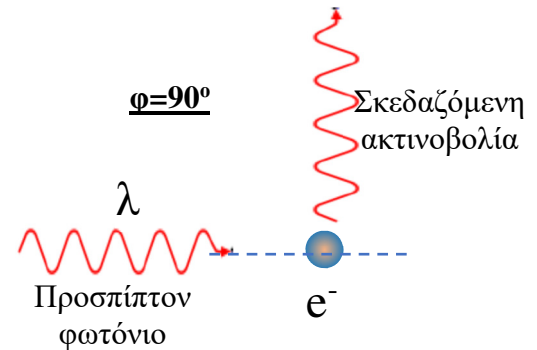
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos(\varphi)) \xrightarrow{\varphi=0} \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - 1) \Rightarrow \boxed{\lambda' = \lambda}$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι $E_{\text{φωτ}} = E'_{\text{φωτ}}$ και συνεπώς $K_e = 0$, δηλαδή το ηλεκτρόνιο παραμένει ακίνητο μετά την σκέδαση. Πρακτικά λοιπόν δεν υπήρξε καμία αλληλεπίδραση μεταξύ του φωτονίου και του ηλεκτρονίου.

- $\phi = 90^\circ$

Στην περίπτωση αυτή μηδενίζεται το συνημίτονο και προκύπτει

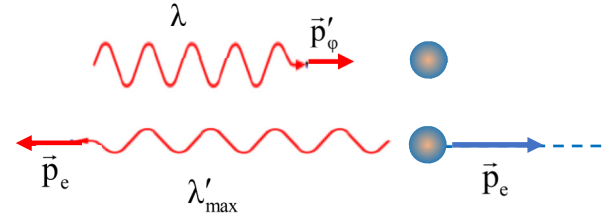
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{mc^2}$$



- $\phi = 180^\circ$

Στην περίπτωση αυτή η ποσότητα $(1 - \cos(\phi))$ μεγιστοποιείται και γίνεται ίση με 2. Έτσι προκύπτει το μέγιστο μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου:

$$\lambda'_{\text{max}} = \lambda + \frac{2h}{mc}$$



Επομένως το σκεδαζόμενο φωτόνιο θα έχει την ελάχιστη συχνότητα f'_{min} και την ελάχιστη ενέργεια E'_{min} , με αποτέλεσμα το σκεδαζόμενο ηλεκτρόνιο να έχει την μέγιστη δυνατή κινητική ενέργεια:

$$K_{e,\text{max}} = E - E'_{\text{min}} \quad \text{ή} \quad K_{e,\text{max}} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'_{\text{max}}}$$

Τέλος η διατήρηση της ορμής μπορεί να γραφτεί ως εξής:

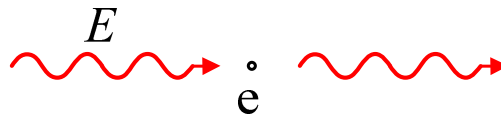
$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e \Rightarrow p = -|p'| + p_e \Rightarrow \frac{E}{c} = -\frac{E'}{c} + p_e \Rightarrow p_e = \frac{E + E'}{c}$$

7.3.5 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

A) Ένα φωτόνιο με ενέργεια $E=6.000\text{eV}$ προσπίπτει σε ακίνητο ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Μετά την αλληλεπίδραση φωτονίου – ηλεκτρονίου, το φωτόνιο συνεχίζει διαδιδόμενο στην ίδια διεύθυνση.

Να υπολογιστούν η ενέργεια και η ορμή φωτονίου και ηλεκτρονίου, μετά την αλληλεπίδραση. Δίνεται $c=3\cdot 10^8\text{m/s}$.



Απάντηση:

Για το μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου ισχύει η εξίσωση:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi) \quad (1)$$

Θέτοντας στην εξίσωση αυτή $\varphi=0$ οπότε $\cos\varphi=1$, βρίσκουμε ότι $\lambda' = \lambda$.

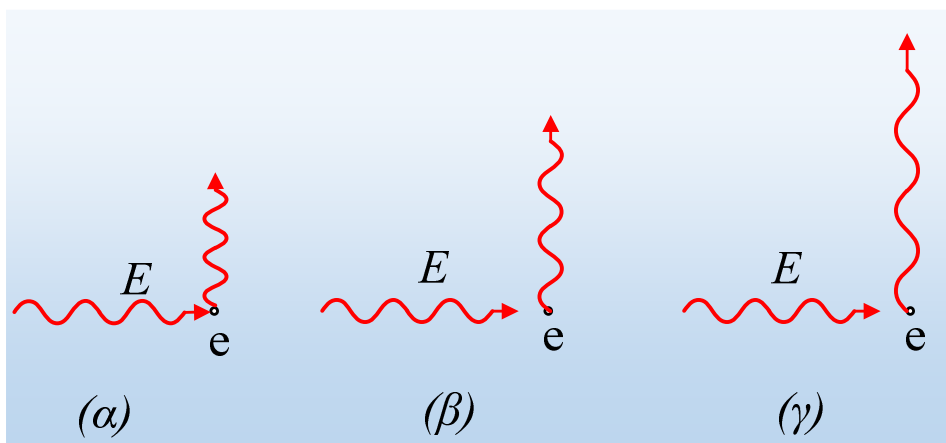
Δηλαδή από την στιγμή που δεν άλλαξε πορεία το φωτόνιο, δεν υπάρχει καμιά «αλληλεπίδραση» με το ηλεκτρόνιο, διατηρώντας ενέργεια και ορμή. Έτσι το φωτόνιο συνεχίζει να διαδίδεται με ενέργεια $E=6.000\text{eV}$, έχοντας ορμή:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{6.000 \times 1,6 \times 10^{-19}}{3 \times 10^8} \text{kgm/s} = 3,2 \times 10^{-24} \text{kgm/s}$$

Αλλά τότε από την διατήρηση της ενέργειας προκύπτει ότι το ηλεκτρόνιο δεν θα αποκτήσει ενέργεια και θα παραμείνει ακίνητο.

B) Φωτόνια με ενέργεια $E=6.000\text{eV}$ προσπίπτουν σε ακίνητα και ελεύθερα ηλεκτρόνια.

i) Για την περίπτωση σκέδασης κατά 90° , ποιο από τα παρακάτω σχήματα, παριστάνει το ηλεκτρομαγνητικό κύμα, για τα σκεδαζόμενα φωτόνια;



ii) Να υπολογιστεί η ορμή που αποκτά το ηλεκτρόνιο, πάνω στο οποίο σκεδάστηκε το παραπάνω φωτόνιο, στην αρχική διεύθυνση διάδοσης του φωτονίου.

Δίνεται $c=3\cdot 10^8\text{m/s}$.

Απάντηση:

i) Στην περίπτωση της σκέδασης κατά 90° , όπου $\sin 90^\circ = 1$, το μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου είναι:

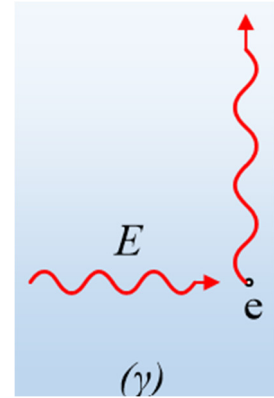
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \sin 90^\circ) \rightarrow \lambda' = \lambda + \frac{h}{mc} > \lambda$$

Βλέπουμε δηλαδή η σκεδαζόμενη δέσμη να έχει μεγαλύτερο μήκος κύματος, οπότε σωστό είναι το (γ) σχήμα.

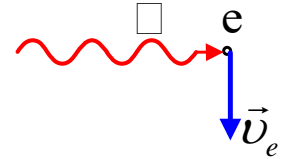
ii) Εφαρμόζουμε την διατήρηση της ορμής στην αρχική διεύθυνση διάδοσης του φωτονίου, παίρνοντας:

$$p_{\text{πριν},x} = p_{\text{μετ},x} \rightarrow p = p_{\phi x} + p_e \rightarrow$$

$$p_e = p = \frac{E}{c} = \frac{6.000 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} \text{ kgm/s} = 3,2 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s}$$



Γ) Ένας συμμαθητής σας, στην παραπάνω αλληλεπίδραση μελέτησε, όχι την πορεία του σκεδαζόμενου φωτονίου, αλλά την διεύθυνση κίνησης του ηλεκτρονίου και σχεδίασε το διπλανό σχήμα, όπου η ταχύτητα $\vec{v}_e$ που αποκτά το ηλεκτρόνιο είναι κάθετη στην διεύθυνση διάδοσης του φωτονίου. Να εξετάσετε την ορθότητα ή μη του αποτελέσματος της μελέτης του.

**Απάντηση:**

Αν εφαρμόσουμε την διατήρηση της ορμής για το σύστημα, σε άξονες, θα πάρουμε:

$$p_{\text{πριν},x} = p_{\text{μετ},x} \rightarrow p = p_{\phi x} + p_e \rightarrow$$

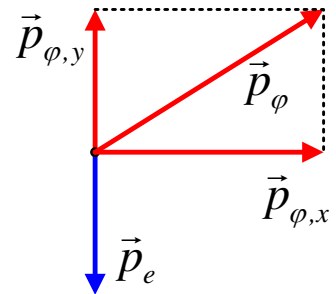
$$p_{\phi x} = p = 3,2 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s} \quad \text{και}$$

$$p_{\text{πριν},y} = p_{\text{μετ},y} \rightarrow 0 = p_{\phi y} + p_{e,y} \rightarrow p_{\phi y} = -p_{e,y}$$

Αλλά τότε η τελική ορμή του φωτονίου $\vec{p}_\phi$ έχει μεγαλύτερο μέτρο

(βλέπε σχήμα) από την αρχική του ορμή, ίση με την συνιστώσα $p_{\phi x}$. Αλλά

η ορμή συνδέεται με την ενέργεια με την εξίσωση $E=pc$, οπότε αύξηση της ορμής σημαίνει και αύξηση της ενέργειας, πράγμα αδύνατον. Το ηλεκτρόνιο δηλαδή μπορεί να κινηθεί, αλλά όχι σε κάθετη διεύθυνση, ως προς το κινούμενο φωτόνιο.



Παράδειγμα 2.

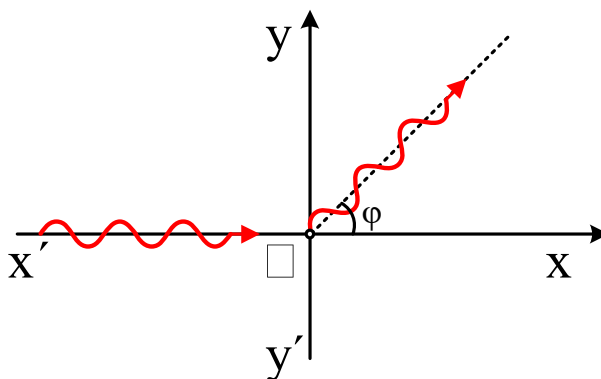
Ένα ηλεκτρόνιο βρίσκεται ακίνητο στην αρχή Ο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων. Ένα φωτόνιο με μήκος κύματος $\lambda=0,2\text{nm}$ διαδίδεται κατά μήκος του άξονα x' και μετά την αλληλεπίδρασή του με το ηλεκτρόνιο, διαπιστώνουμε ότι το φωτόνιο αποκτά μήκος κύματος λ' και διαδίδεται όπως στο σχήμα, σχηματίζοντας γωνία ϕ με τον x άξονα, όπου $\eta\mu\phi=0,8$ και $\sigma\upsilon\eta\phi=0,6$

Ζητούνται:

- Η ενέργεια και η ορμή του φωτονίου που προσπίπτει στο ηλεκτρόνιο.
- Η ενέργεια και η ορμή του σκεδαζόμενου φωτονίου.
- Η κινητική ενέργεια που αποκτά το ηλεκτρόνιο.
- Οι συνιστώσες της ορμής του ηλεκτρονίου στους δυο άξονες x και y .
- Η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση κίνησης του ηλεκτρονίου με τον άξονα x .

Δίνονται $c=3\cdot 10^8\text{m/s}$, $h=6,6\cdot 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$, $q_e=-1,6\cdot 10^{-19}\text{C}$, $m_e=9\cdot 10^{-31}\text{kg}$, ενώ οι ενέργειες να υπολογιστούν σε eV . Δίνεται επίσης η εξίσωση για τα μήκη κύματος προσπίπτοντος και σκεδαζόμενου φωτονίου:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \sigma\upsilon\eta(\phi))$$

**Απάντηση:**

- i)** Αρχικά το φωτόνιο έχει ενέργεια:

$$E = hf = h \frac{c}{\lambda} = 6,6 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{0,2 \cdot 10^{-9}} \text{J} = 9,9 \cdot 10^{-16} \text{J} = \frac{9,9 \cdot 10^{-16} \text{J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{J/eV}} = 6187 \text{eV}$$

Ενώ η ορμή του, με διεύθυνση πάνω στον άξονα x και φορά προς τα δεξιά, έχει μέτρο:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{0,2 \cdot 10^{-9}} \text{kgm/s} = 3,3 \cdot 10^{-24} \text{kgm/s}$$

- ii)** Το μήκος κύματος του φωτονίου που σκεδάζεται είναι ίσο:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \sigma\upsilon\eta\phi) \rightarrow \lambda' = 0,2 \cdot 10^{-9} \text{m} + \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8}(1 - 0,6) \text{m} \rightarrow$$

$$\lambda' = 2 \cdot 10^{-10} \text{m} + 0,009 \cdot 10^{-10} \text{m} = 2,009 \cdot 10^{-10} \text{m}$$

Οπότε με την ίδια λογική, η ορμή του φωτονίου που σκεδάζεται θα σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονα x και θα έχουμε:

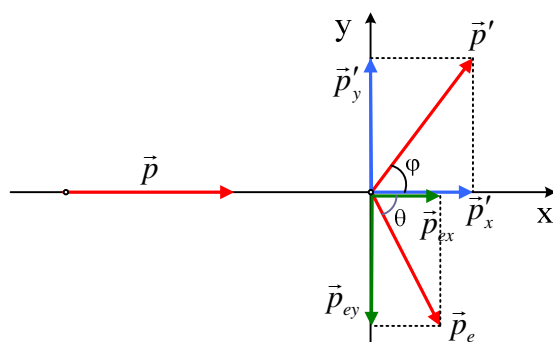
$$E' = hf' = h \frac{c}{\lambda'} = 6,6 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{2,009 \cdot 10^{-10}} \text{J} = 9,85 \cdot 10^{-16} \text{J} = \frac{9,85 \cdot 10^{-16} \text{J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{J/eV}} = 6160 \text{eV}$$

$$p' = \frac{h}{\lambda'} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{2,009 \cdot 10^{-10}} \text{kgm/s} = 3,28 \cdot 10^{-24} \text{kgm/s}$$

iii) Από την διατήρηση της ενέργειας για την αλληλεπίδραση φωτονίου-ηλεκτρονίου παίρνουμε:

$$E = E' + K_e \rightarrow K_e = E - E' = 6187\text{eV} - 6160\text{eV} = 27\text{eV}$$

iv) Στο παρακάτω σχήμα έχουν σημειωθεί η ορμή $\vec{p}$ του προσπίπτοντος φωτονίου, η ορμή $\vec{p}'$ του σκεδαζόμενου και η τελική ορμή του ηλεκτρονίου $\vec{p}_e$, η οποία σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x. Έχουμε ακόμη αναλύσει τις δύο τελευταίες ορμές σε συνιστώσες στους άξονες x και y.



Από την αρχή διατήρηση της ορμής (την εφαρμόζουμε σε άξονες) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} p_{\text{πριν},x} &= p_{\text{μετά},x} \rightarrow p = p'_x + p_{ex} \rightarrow p_{ex} = p - p' \cos \varphi \rightarrow \\ p_{ex} &= 3,3 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s} - 3,28 \cdot 10^{-24} \cdot 0,6 \text{ kgm/s} = 1,33 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s} \quad \text{και} \\ p_{\text{πριν},y} &= p_{\text{μετά},y} \rightarrow 0 = p'_y + p_{ey} \rightarrow p_{ey} = -p' \sin \varphi \rightarrow \\ p_{ey} &= -3,28 \cdot 10^{-24} \cdot 0,8 \text{ kgm/s} = -2,62 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s} \end{aligned}$$

Όπου το αρνητικό πρόσημο στην ορμή p_{ey} σημαίνει ότι έχει κατεύθυνση προς την αρνητική φορά του άξονα, όπως φαίνεται και στο σχήμα.

v) Για να προσδιορίσουμε την γωνία θ που σχηματίζει το κινούμενο ηλεκτρόνιο με την διεύθυνση x, υπολογίζουμε την εφθ:

$$\varepsilon \theta = \frac{|p_{ey}|}{|p_{ex}|} = \frac{2,62}{1,33} = 1,97$$

Παράδειγμα 3.

Μια δέσμη φωτονίων με ενέργεια 12keV σκεδάζεται από ελεύθερα ηλεκτρόνια ενός στόχου.

- i) Ποιο είναι το μήκος κύματος των φωτονίων της δέσμης, πριν την σκέδαση;
- ii) Ποιο είναι το μήκος κύματος των φωτονίων που σκεδάζονται κατά γωνία 90° , σε σχέση με την αρχική τους διεύθυνση;
- iii) Να υπολογισθεί η τελική κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου πάνω στο οποίο σκεδάστηκε ένα από τα παραπάνω φωτόνια.
- iv) Να βρεθεί η μέγιστη ενέργεια και η αντίστοιχη ορμή που μπορεί να αποκτήσει ένα ηλεκτρόνιο, μετά από την σκέδαση της παραπάνω δέσμης φωτονίων.

Δίνονται $c=3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $h=6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, $m_e=9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ και $1\text{eV}=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Απάντηση:

- i)** Η ενέργεια ενός φωτονίου της δέσμης, είναι ίση:

$$E = hf \xrightarrow{c=\lambda f} E = h \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = h \frac{c}{E} \rightarrow$$

$$\lambda = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{12 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 1,03 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,103 \text{ nm}$$

- ii)** Το μήκος κύματος του φωτονίου που σκεδάζεται κατά γωνία 90° είναι ίσο:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos 90^\circ) \rightarrow \lambda' = 0,103 \cdot 10^{-9} \text{ m} + \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} (1 - 0) \text{ m} \rightarrow$$

$$\lambda' = 0,103 \cdot 10^{-9} \text{ m} + 0,024 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,105 \text{ nm}$$

- iii)** Για την ενέργεια ενός φωτονίου, όπως το παραπάνω, θα έχουμε μετά την σκέδαση:

$$E' = hf' = h \frac{c}{\lambda'} = 6,6 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{0,105 \cdot 10^{-9}} \text{ J} = 188 \cdot 10^{-17} \text{ J} = \frac{188 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} \approx 11790 \text{ eV} = 11,79 \text{ keV}$$

Από την διατήρηση της ενέργειας για την αλληλεπίδραση φωτονίου-ηλεκτρονίου παίρνουμε:

$$E = E' + K_e \rightarrow K_e = E - E' = 12 \text{ keV} - 11,79 \text{ keV} = 0,21 \text{ keV}$$

- iv)** Το μήκος κύματος ενός φωτονίου που σκεδάζεται κατά γωνία φ , δίνεται από την εξίσωση:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \varphi)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η μεγαλύτερη αύξηση στο μήκος κύματος προκύπτει όταν $\varphi=180^\circ$, οπότε το φωτόνιο «ανακλάται» κατά την πρόσπτωσή του σε ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο. Στην περίπτωση αυτή το φωτόνιο αποκτά το μέγιστο μήκος κύματος:

$$\lambda_{\max} - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos 180^\circ) \rightarrow \lambda_{\max} = \lambda + \frac{h}{mc} (1 - (-1)) \rightarrow$$

$$\lambda_{\max} = \lambda + 2 \frac{h}{mc} = 0,103 \cdot 10^{-9} \text{ m} + 2 \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \rightarrow$$

$$\lambda_{\max} = 0,103 \cdot 10^{-9} \text{ m} + 0,048 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,108 \text{ nm}$$

Αλλά τότε το φωτόνιο αυτό έχει (την ελάχιστη) ενέργεια:

$$E_{\min} = hf_{\min} = h \frac{c}{\lambda_{\max}} = 6,6 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{0,108 \cdot 10^{-9}} \text{ J} \rightarrow$$

$$E_{\min} = 183 \cdot 10^{-17} \text{ J} = \frac{183 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} \approx 11460 \text{ eV} = 11,46 \text{ keV}$$

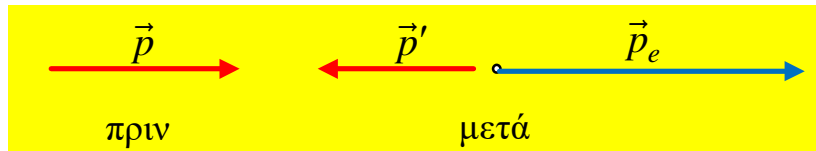
Ενώ έχει ορμή μέτρου:

$$p' = \frac{E_{\min}}{c} = \frac{183 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 6,1 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s}$$

Ξανά από την διατήρηση της ενέργειας για την αλληλεπίδραση φωτονίου-ηλεκτρονίου παίρνουμε:

$$E = E_{\min} + K_{e,\max} \rightarrow K_{e,\max} = E - E_{\min} = 12 \text{ keV} - 11,46 \text{ keV} = 0,54 \text{ keV}$$

Ενώ λαμβάνοντας υπόψη ότι το φωτόνιο μετά την σκέδαση κινείται αντίθετα από την αρχική του διεύθυνση διάδοσης, θα έχουμε για τις ορμές το παρακάτω σχήμα, από όπου με βάση την αρχή διατήρησης της ορμής, θα έχουμε (η προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική):



$$\vec{p} = \vec{p} + \vec{p}_e \rightarrow \frac{E}{c} = -|p'| + p_e \rightarrow$$

$$p_e = \frac{E}{c} + |p'| = \frac{12.000 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} \text{ kgm/s} + 6,1 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s} = 12,5 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s}$$

Με διεύθυνση την αρχική διεύθυνση διάδοσης του φωτονίου της δέσμης.

7.4 Η κυματική φύση της ύλης

7.4.1 Κυματοσωματιδιακός δυϊσμός του φωτός

Κατά την κλασική φυσική το φως είναι κύμα που διαπιστώνεται από πλήθος πειραμάτων. Επομένως, μια κυματική εικόνα του φωτός δεν επιδέχεται αμφιβολία. Όμως με τη θεωρία των φωτονίων φαίνεται να διαπιστώνεται και μια σωματιδιακή εικόνα για το φως, εικόνα που αρχικώς προτάθηκε από τον Νεύτωνα για την εξήγηση της γεωμετρικής οπτικής. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και το φαινόμενο Compton επιβεβαίωσαν την αντίληψη μιας σωματιδιακής φύσης για το φως.

Το φως έχει σωματιδιακό και κυματικό χαρακτήρα, άρα είναι κάτι άλλο από το κλασικό σωματίδιο και κάτι άλλο από το κλασικό κύμα. Αυτός ο κυματοσωματιδιακός δυϊσμός του φωτός περιγράφει και εξηγεί πολύ καλά όλες τις ιδιότητές του. Οι δύο χαρακτήρες του φωτός δεν αλληλοσυγκρούονται, αλλά αλληλοσυμπληρώνονται (αυτό λέγεται αρχή της συμπληρωματικότητας). Συνήθως σε χαμηλές συχνότητες (και μεγάλες ροές φωτονίων) είναι έντονος ο κυματικός χαρακτήρας του φωτός. Π.χ. στις τηλεπικοινωνίες ουδόλως λαμβάνεται ο σωματιδιακός χαρακτήρας του φωτός. Σε υψηλότερες συχνότητες (και μικρές ροές φωτονίων) τόσο πιο έντονη κάνει την παρουσία του ο σωματιδιακός χαρακτήρας του φωτός. Π.χ. οι ακτίνες γ έχουν αποκλειστικά σωματιδιακή συμπεριφορά.

7.4.2 Υπόθεση de Broglie

Μετά την ερμηνεία του φαινομένου Compton και την πειραματική απόδειξη ότι τα φωτόνια έχουν και σωματιδιακό χαρακτήρα, ο Γάλλος Louis de Broglie, το 1924, στηριζόμενος στο ότι η φύση έχει συμμετρία οδηγήθηκε στο αξίωμα:

Σε κάθε κινούμενο σωματίδιο με ορμή p , αντιστοιχεί ένα κύμα με μήκος κύματος λ , το οποίο είναι ίσο με

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Όλα τα σωματίδια έχουν ταυτόχρονα και κυματική συμπεριφορά, με κυματικά χαρακτηριστικά συχνότητα f και μήκος κύματος λ , που συνδέονται με τα αντίστοιχα σωματιδιακά ενέργεια E και ορμή p μέσω των σχέσεων

$$f = \frac{E}{h} \text{ και } \lambda = \frac{h}{p}$$

που είναι ταυτόσημες με εκείνες για τα φωτόνια.

Δηλαδή κάθε σωματίδιο ενέργειας E και ορμής p συμπεριφέρεται και σαν ένα κύμα μήκους κύματος

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (v \ll c) \text{ και συχνότητας } f = \frac{E}{h}.$$

Προκειμένου να ανιχνευτεί η κυματική συμπεριφορά ενός σωματιδίου, θα πρέπει να έχει μικρή μάζα. Για παράδειγμα ένα ηλεκτρόνιο εμφανίζει κυματική συμπεριφορά, ενώ για ένα αντικείμενο του μακρόκοσμου, λόγω της μεγάλης μάζας του, η κυματική του συμπεριφορά είναι μη ανιχνεύσιμη.

Η υπόθεση de Broglie επαληθεύτηκε το 1927, στην Αμερική από τους Davisson και Germer. Οι Davisson και Germer διαπίστωσαν ότι μία δέσμη ηλεκτρονίων που κινούνται με μεγάλη ταχύτητα περιθλάται με τρόπο ανάλογο με αυτόν που περιθλάται μια δέσμη ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Επιπλέον, πειράματα έδειξαν ότι κυματική συμπεριφορά παρουσιάζουν και δέσμες σωματιδίων α και δέσμες νετρονίων. Τα αποτελέσματα ήταν τέτοια που δεν άφηναν κανένα περιθώριο να αμφισβητηθεί ότι τα σωματίδια έχουν και κυματική φύση.

Αν και θεωρητικά μπορεί κανείς να «αποδώσει» μήκος κύματος σε οποιοδήποτε σώμα η κυματική φύση της ύλης μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε υποατομικά σωματίδια. Στο παράδειγμα 7.3 του σχολικού βιβλίου γίνεται υπολογισμός του μήκους κύματος για μια μπάλα μπάσκετ με μάζα $m_1=1 \text{ kg}$, κινούμενη με ταχύτητα $v_1=3 \text{ m/s}$, μια σφαίρα με μάζα $m_2=20 \text{ g}$, κινούμενη με ταχύτητα $v_2=300 \text{ m/s}$ και ένα ηλεκτρόνιο με μάζα $m_e=9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, κινούμενη με ταχύτητα $7 \cdot 10^6 \text{ m/s}$.

Οι αριθμητικοί υπολογισμοί δίνουν $\lambda_1 = 2,2 \cdot 10^{-34} \text{ m}$, $\lambda_2 = 1,1 \cdot 10^{-32} \text{ m}$ και $\lambda_e = 1,04 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Παρατηρούμε ότι δυο πρώτα μήκη κύματος είναι πολύ μικρά, πρακτικά μη ανιχνεύσιμα.



Λουί ντε Μπρόι (Louis De Broglie, 15 Αυγούστου 1892 – 19 Μαρτίου 1987)

Ήταν γόνος αριστοκρατικής γαλλικής οικογένειας. Ο Λουί ντε Μπρόι σπούδασε αρχικά ιστορία και αργότερα ασχολήθηκε με την θεωρητική φυσική. Η σημαντικότερη συνεισφορά του στη φυσική (η οποία του χάρισε και το βραβείο Νόμπελ το 1929) ήταν η πρόταση του ότι η διττή υπόσταση κύματος και σωματιδίου (κυματοσωματιδιακός δυϊσμός) δεν βρίσκει εφαρμογή μόνο στο φως αλλά και στην ύλη. Ανέπτυξε μια αλυσίδα συλλογισμών εκκινώντας από την ειδική θεωρία της σχετικότητας και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η ύλη πρέπει να διαθέτει την κυματική της μετενσάρκωση.

7.4.3 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

A. Γνωρίζουμε ότι η μάζα του πρωτονίου είναι $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ και η σταθερά του Planck είναι $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$. Να υπολογιστούν τα μήκη κύματος de Broglie που αντιστοιχούν:

a1. σε πρωτόνιο (1) που έχει ταχύτητα $v_1 = 13,26 \cdot 10^6 \text{ m/s}$,

a2. σε πρωτόνιο (2) του οποίου η ορμή p_2 και η κινητική ενέργεια K_2 συνδέονται με τη σχέση $\frac{p_2}{K_2} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$.

B. Εάν η ορμή του πρωτονίου (1) μειωθεί κατά 25%, να υπολογιστεί το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής του μήκους κύματος de Broglie του πρωτονίου (1).

Γ. Εάν η κινητική ενέργεια του πρωτονίου (2) αυξηθεί κατά 25%, να υπολογιστεί το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής του μήκους κύματος de Broglie του πρωτονίου (2). Δίνεται: $\frac{2\sqrt{5}}{5} = 0,89$.

Απάντηση:

α1. Το μήκος κύματος de Broglie ενός σώματος δίνεται από τη σχέση $\lambda = \frac{h}{p}$. Επειδή η ταχύτητα v_1 του πρωτονίου (1) είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $p = mv$ που δίνει την ορμή ενός σώματος. Επομένως:

$$\lambda_1 = \frac{h}{p_1} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{h}{m_p v_1} \Rightarrow \lambda_1 = 3 \cdot 10^{-14} \text{ m.}$$

α2. Από τις σχέσεις $p = mv$ και $K = \frac{1}{2}mv^2$, που δίνουν την ορμή και την κινητική ενέργεια ενός σώματος αντίστοιχα, έχουμε:

$$\frac{p_2}{K_2} = \frac{m_p v_2}{\frac{1}{2}m_p v_2^2} = \frac{2}{v_2} \Rightarrow v_2 = \frac{2K_2}{p_2} \Rightarrow v_2 = 10^6 \text{ m/s.}$$

$$\text{Επομένως: } \lambda_1 = \frac{h}{p_1} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{h}{m_p v_1} \Rightarrow \lambda_2 = 3,97 \cdot 10^{-13} \text{ m.}$$

Β. Όταν η ορμή του πρωτονίου (1) μειώνεται κατά 25%, γίνεται:

$$p'_1 = p_1 - 25\%p_1 = 0,75p_1$$

$$\lambda'_1 = \frac{h}{p'_1} \Rightarrow \lambda'_1 = \frac{h}{0,75p_1} = \frac{4}{3} \frac{h}{p_1} \Rightarrow \lambda'_1 = \frac{4}{3} \lambda_1$$

Το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής του μήκους κύματος de Broglie του πρωτονίου (1) είναι:

$$\pi = \frac{\lambda'_1 - \lambda_1}{\lambda_1} \cdot 100\% = \frac{\frac{4}{3}\lambda_1 - \lambda_1}{\lambda_1} \cdot 100\% \Rightarrow \pi = 33,33\%$$

Γ. Όταν η κινητική ενέργεια του πρωτονίου (2) αυξάνεται κατά 25%, γίνεται:

$$K'_2 = K_2 + 25\%K_2 = 1,25K_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_p v'^2_2 = 1,25 \frac{1}{2}m_p v^2_2 \Rightarrow v'_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} v_2$$

$$\lambda'_2 = \frac{h}{p'_2} \Rightarrow \lambda'_2 = \frac{h}{\frac{\sqrt{5}}{2}m_p v'_2} \Rightarrow \lambda'_2 = \frac{2\sqrt{5}}{2} \lambda_2 \Rightarrow \lambda'_2 = 0,89\lambda_2$$

Το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής του μήκους κύματος de Broglie του πρωτονίου (2) είναι:

$$\pi = \frac{\lambda'_2 - \lambda_2}{\lambda_2} \cdot 100\% = \frac{0,89\lambda_2 - \lambda_2}{\lambda_2} \cdot 100\% \Rightarrow \pi = -11\%.$$

7.5 Η αρχή της αβεβαιότητας ή αρχή της απροσδιοριστίας

Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg είναι ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της φυσικής του εικοστού αιώνα. Έχει τόσο μεγάλη επιρροή, ώστε να έχει μεταφερθεί στην γενική ποπ κουλτούρα. Πολλές φορές, λανθασμένα, γενικεύεται και σε φαινόμενα της καθημερινής ζωής, στο σύνολο της ή σπανιότερα σε τμήματά της, από την κριτική λογοτεχνίας μέχρι την μετάδοση αθλητικών γεγονότων.

Σύμφωνα με την αρχή της απροσδιοριστίας είναι αδύνατο να μετρηθεί ταυτόχρονα και με ακρίβεια, ούτε πρακτικά, ούτε και θεωρητικά η θέση και η ταχύτητα, ή ορμή, ενός σωματίου. Εν αντιθέσει με την αρχή της αιτιοκρατίας, σύμφωνα με την αρχή της απροσδιοριστίας υπάρχουν γεγονότα των οποίων η εκδήλωση δεν υπαγορεύεται από κάποια αιτία. Η αρχή της απροσδιοριστίας, αναφέρεται σε φαινόμενα που συμβαίνουν σε επίπεδο μικρόκοσμου. Αυτό έχει ως συνέπεια η ισχύς της να περιορίζεται κατά πολύ μεγάλο βαθμό στην κλασική φυσική, η οποία και περιγράφει τα φαινόμενα που γίνονται αντιληπτά από εμάς καθημερινά

Η απροσδιοριστία αυτή δεν αναφέρεται στην ανικανότητα του ανθρώπου να παρατηρήσει ορισμένα φαινόμενα στον μικρόκοσμο (ούτε αποτελεί φιλοσοφική αγνωσία) αλλά σε μία πραγματική ιδιότητα του φυσικού κόσμου, η οποία εμφανίζεται και πειραματικά. Ο λόγος που δεν βλέπουμε αυτή την αβεβαιότητα στην καθημερινότητα είναι ότι εμφανίζεται σε πολύ μικρή κλίμακα και γίνεται κυρίως εμφανής στον μικρόκοσμο. Η αρχή της αβεβαιότητας δεν είναι ένα πρακτικό όριο στις μετρήσεις μας. Είναι όριο στο είδος των ιδιοτήτων που έχει ένα αντικείμενο συνυφασμένη με τη θεμελιώδη δομή αυτού καθαυτού του σύμπαντος.

Η κβαντική αβεβαιότητα εξηγεί τις κινήσεις και τις αλληλεπιδράσεις του μικρόκοσμου (συνεχείς κινήσεις, μεγάλες ταχύτητες), το μέγεθος και τη σταθερότητα των ατόμων, την εμβέλεια των δυνάμεων, τις ραδιενεργές διασπάσεις και τα βιολογικά φαινόμενα (σχηματισμός του DNA), παρέχοντας μας γνώσεις που μπορεί να έχουν αντίκτυπο και στον τεχνολογικό μας πολιτισμό μέσω και των κβαντικών υπολογιστών (Hobson 1996).



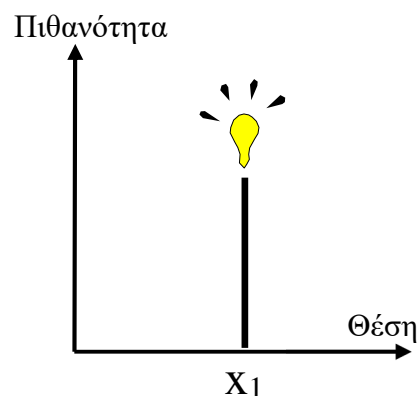
7.5.1 Μαθηματική έκφραση της αρχής της αβεβαιότητας

Στις προηγούμενες παραγράφους αναφέρθηκε ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα έχουν διπλή φύση, δηλαδή ότι «συμπεριφέρονται» ως κύματα και ως σωματίδια. Ομοίως δέσμες κλασικών σωματιδίων, όπως τα ηλεκτρόνια, έχουν και κυματική συμπεριφορά. Τα παραπάνω συνιστούν μια γενικότερη αρχή της Φυσικής την **Αρχή του Κυματοσωματιδιακού δυϊσμού της ύλης**. (Με την ευρύτερη έννοια της ύλης συμπεριλαμβάνοντας και την ενέργεια)

Πώς μπορούμε να προσεγγίσουμε τις δύο αυτές «πραγματικότητες»;

Ένα σωματίδιο, όπως το αντιλαμβανόμαστε στην κλασική φυσική είναι κάτι του οποίου η θέση στο χώρο είναι αυστηρά προσδιορισμένη. Τα σωματίδια, εξ ορισμού, υπάρχουν σε μία μοναδική θέση κάθε χρονική στιγμή. Αυτό μπορούμε να το αναπαραστήσουμε σε ένα γράφημα πιθανότητας εύρεσης του αντικειμένου σε δεδομένη θέση, που μοιάζει με ακίδα και είναι 100% στη δεδομένη θέση και μηδενική οπουδήποτε αλλού.

Στην κβαντομηχανική, η ακριβής θέση και η ακριβής ταχύτητα ενός αντικειμένου δεν έχουν νόημα. Για να το καταλάβουμε αυτό πρέπει να αναλογιστούμε τι σημαίνει κυματική ή σωματιδιακή συμπεριφορά.



Αντίθετα, ένα κύμα εκτείνεται στο χώρο, όπως οι κυματισμοί στην επιφάνεια μιας λίμνης.

Ένα σωματίδιο με κυματική συμπεριφορά πού βρίσκεται;

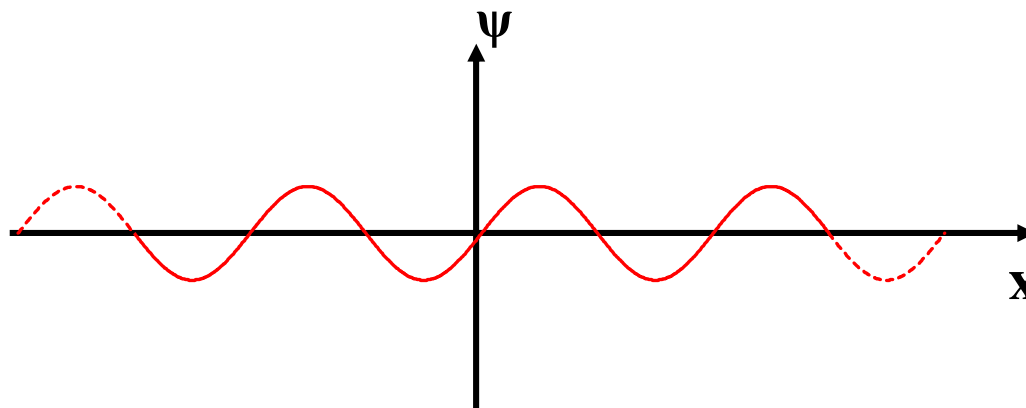
Όταν αποδώσει κανείς κυματικές ιδιότητες, όπως για παράδειγμα το μήκος κύματος λ , σε ένα σωματίδιο αρχίζουν και δημιουργούνται κάποια ερωτήματα. Η απάντηση της κβαντικής θεωρίας, είναι:

«δεν μπορούμε να γνωρίζουμε πού ακριβώς βρίσκεται.»

Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται κατά μήκος του άξονα x . Αν κάποια χρονική στιγμή υποθέσουμε ότι **γνωρίζουμε ακριβώς το μέτρο της ορμής του p** , τότε σύμφωνα με την υπόθεση του **de Broglie γνωρίζουμε ακριβώς το μήκος κύματος λ** που αντιστοιχεί στο σωματίδιο και το οποίο

δίνεται από τη σχέση $\lambda = \frac{h}{p}$. Η εξίσωση που περιγράφει το στιγμιότυπο ενός τέτοιου κύματος στο χώρο

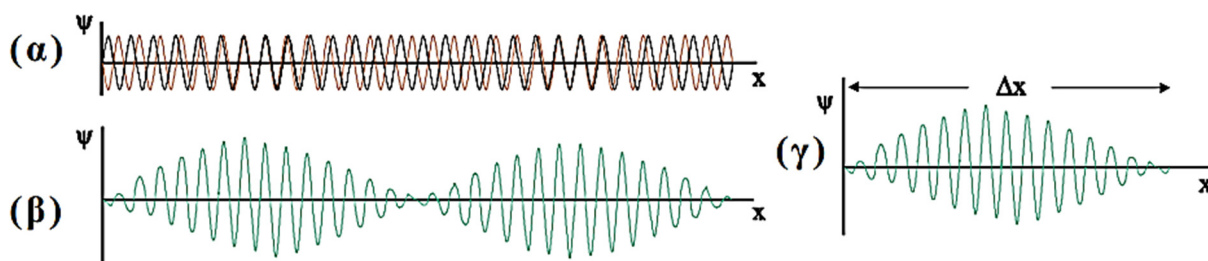
τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $y = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ και η γραφική της παράσταση είναι αυτή του σχήματος.



Παρατηρούμε ότι το στιγμιότυπο εκτείνεται στο χώρο από το $-\infty$ ως το $+\infty$. Έτσι το σωματίδιο αυτό που είναι συνδεδεμένο με αυτό το μήκος κύματος μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε και δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την ακριβή του θέση. Διαθέτει καλή πιθανότητα ύπαρξης σε πληθώρα διαφορετικών θέσεων.

Κυματοπακέτο

Η μέχρι τώρα μελέτη μας αφορούσε κύματα ή ταλαντώσεις με μία μόνο συχνότητα ω . Για να μη καταστρέψουμε εντελώς τη σωματιδιακή εικόνα χρειαζόμαστε κύματα περιορισμένα στο χώρο. Αυτό μπορεί να γίνει με τη χρήση του «κυματοδέματος», δηλαδή την παραγωγή ενός κύματος εντοπισμένου χωρικά. Μπορούμε να φτιάξουμε και να περιγράψουμε μαθηματικά οποιαδήποτε κυματομορφή με τη μέθοδο της υπέρθεσης συνδυάζοντας κατάλληλα διάφορα κύματα με επιλεγμένα μήκη κύματος, πλάτη και φάσεις. Το συνιστάμενο κύμα είναι ένα οδεύον κύμα που θα αναφέρεται σαν **κυματοπακέτο** ή κυματοομάδα (wave packet). Υπάρχει όμως κάποιος περιορισμός. Όσο πιο εντοπισμένο στο χώρο (πιο σωματιδιακό) θέλουμε να είναι το κυματοπακέτο τόσο περισσότερα και πιο διασκορπισμένα μήκη κύματος πρέπει να χρησιμοποιήσουμε. Πληρώνουμε δηλαδή τον εντοπισμό της θέσης του σωματιδίου-κύματος (Δx) με απροσδιοριστία στο μήκος κύματος που του αντιστοιχίζουμε και - κατ' επέκταση - στην ορμή του (Δp), $\left(p = \frac{h}{\lambda} \right)$.



Αν χρησιμοποιήσουμε **αρκετά μεγάλο αριθμό** διαφορετικών κυμάτων μπορούμε να «συνθέσουμε» ένα κυματοπακέτο σαν αυτό του διπλανού σχήματος με περιορισμένη αβεβαιότητα Δx ως προς την θέση στο χώρο. Με τον τρόπο αυτό μειώνουμε την αβεβαιότητα ως προς την θέση του αντικειμένου. Από την άλλη όμως έχοντας προσθέσει πολλά διαφορετικά μήκη κύματος έχουμε αυξήσει την αβεβαιότητα ως προς την ορμή του αντικειμένου (αφού με κάθε διαφορετική τιμή του μήκους κύματος, είναι συνδεδεμένη και μια διαφορετική τιμή της ορμής)

Η αδυναμία μας να προσδιορίσουμε επακριβώς ταυτόχρονα τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου δεν οφείλεται σε πειραματικές ατέλειες. Είναι σύμφυτη με την ίδια την κβαντική δομή της ύλης.

Είναι αναπόφευκτη συνέπεια του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού της ύλης.

Ο Heisenberg το 1927 κωδικοποίησε τα παραπάνω διατυπώνοντας την αρχή της αβεβαιότητας (ή απροσδιοριστίας) με τη σχέση:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} \quad \text{ή}$$

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar$$

Όπου $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h-bar) η ανηγμένη σταθερά του Planck.

Στην παραπάνω σχέση τα μεγέθη, $\Delta p_x, \Delta x$ δεν εκφράζουν μεταβολή αλλά το εύρος της αβεβαιότητας με την οποία γνωρίζουμε τα μεγέθη.

Η αρχή απροσδιοριστίας αφορά **ταυτόχρονη μέτρηση θέσης και ορμής στον ίδιο άξονα**. Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για τις άλλες διευθύνσεις:

$$\Delta p_y \cdot \Delta y \geq \frac{h}{2\pi} \quad \text{και} \quad \Delta p_z \cdot \Delta z \geq \frac{h}{2\pi}$$

Μία άλλη διατύπωση της αρχής της αβεβαιότητας του Heisenberg είναι η:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$$

Η αβεβαιότητα στη μέτρηση της ενέργειας μιας κατάστασης ενός συστήματος είναι αντίστροφα ανάλογη με τον χρόνο που το σύστημα παραμένει σ' αυτή την κατάσταση.

Δηλαδή όλες οι μετρήσεις ενέργειας περιέχουν μια αβεβαιότητα, εκτός αν διαθέτουμε για τη μέτρηση άπειρο χρόνο.

- Το Δt στην παραπάνω σχέση νοείται ως ο χρόνος εξέλιξης ενός κβαντικού συστήματος, δηλαδή το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο θα παρατηρηθεί μια μετρήσιμη αλλαγή στα χαρακτηριστικά του συστήματος.



Ο Βέρνερ Καρλ Χάιζενμπεργκ (Werner Karl Heisenberg, Βύρτσμπουργκ, 5 Δεκεμβρίου 1901 – Μόναχο, 1 Φεβρουαρίου 1976),

Γνωστός και ως «Ο Δολοφόνος του Μπορ», ήταν Γερμανός φυσικός, με σπουδαία συμβολή στη θεμελίωση της Κβαντομηχανικής, για την οποία τιμήθηκε με το Βραβείο Νόμπελ Φυσικής του 1932.

Ο Χάιζενμπεργκ σπούδασε από το 1920 Θεωρητική Φυσική στο Πανεπιστήμιο του Μονάχου. Μπήκε στο πνεύμα της Κβαντικής Φυσικής τόσο γρήγορα, ώστε μετά από μερικούς μήνες έδωσε λύσεις σε σημαντικά προβλήματα (π.χ. Φαινόμενο Ζέεμαν). Επειδή απαιτείτο μία ελάχιστη σπουδή έξι εξαμήνων, μόλις το 1923 μπόρεσε ο Χάιζενμπεργκ να ανακηρυχθεί διδάκτορας. Το 1924 έγινε βοηθός του Μαξ Μπορν στο Γκέτινγκεν. Το 1927 διατύπωσε ο ίδιος ο Χάιζενμπεργκ την «Αρχή της απροσδιοριστίας», μετά από στενή συνεργασία με τον Νίλς Μπορ. Η αρχή της απροσδιοριστίας έδινε μια τελείως νέα ερμηνεία για τον φυσικό κόσμο, όπως ότι κύμα και σωματίδιο είναι διαφορετικές θεωρήσεις του ίδιου πράγματος, καθώς και την ουσιαστική εξήγηση της σταθερότητας της ύλης. Στη θέση της αιτιότητας της Κλασικής Φυσικής, μπήκε η τυχαιότητα των γεγονότων.

Σε ένα διεγερμένο άτομο ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια δε βρίσκονται στη θεμελιώδη τους κατάσταση, αλλά σε κατάσταση μεγαλύτερης ενέργειας. Όταν ένα τέτοιο ηλεκτρόνιο μεταπηδήσει στη θεμελιώδη του κατάσταση, εκπέμπει ένα φωτόνιο ενέργειας hf ίσης με τη διαφορά ενέργειας των δύο καταστάσεων στις οποίες βρέθηκε.

Ένα διεγερμένο άτομο εκπέμπει ακτινοβολία όταν ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια που δεν βρίσκονται στη θεμελιώδη κατάσταση επιστρέψουν σ' αυτή. Σε κάθε τέτοιο «κβαντικό άλμα» εκπέμπεται ένα φωτόνιο. Η μελέτη των φασμάτων εκπομπής δείχνει ότι οι φασματικές γραμμές δεν είναι αυστηρά καθορισμένες αλλά η κάθε μια εμφανίζει ένα φυσικό εύρος. Το εύρος των φασματικών γραμμών μπορεί να εξηγηθεί με την αρχή της αβεβαιότητας.

Ένα διεγερμένο άτομο μπορεί να εκπέμψει ένα φωτόνιο οποιαδήποτε στιγμή στο χρονικό διάστημα από μηδέν μέχρι άπειρο. Ο μέσος χρόνος στον οποίο ένας μεγάλος αριθμός διεγερμένων ατόμων εκπέμπει ακτινοβολία είναι της τάξης του 10^{-8} s.

Από τη σχέση $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$ και επειδή $\Delta E = h \cdot \Delta f$ προκύπτει $h\Delta f \geq \frac{h}{2\pi \cdot \Delta t}$ και $\Delta f \geq \frac{1}{2\pi \cdot \Delta t}$ θέτοντας

όπου $\Delta t = 10^{-8}$ s έχουμε $\Delta f \geq 1,6 \cdot 10^7$ Hz όπου $1,6 \cdot 10^7$ Hz είναι το ελάχιστο εύρος της φασματικής γραμμής.

Παρατηρήσεις

1) Σε κάθε πείραμα όταν μετράμε ένα μέγεθος (A) η αβεβαιότητα στη μέτρηση (ΔA) είναι αποτέλεσμα της ίδιας της πειραματικής διαδικασίας. Μπορεί να οφείλεται σε μικρή ακρίβεια των οργάνων μέτρησης, σε ατελή διαδικασία και διάφορους άλλους λόγους. Έτσι η τιμή του μεγέθους A μπορεί να είναι οποιαδήποτε στο διάστημα από (A- ΔA) μέχρι (A+ ΔA). Η γνώση της τιμής της αβεβαιότητας (συνήθως ως ποσοστό της μέσης τιμής του μετρούμενου μεγέθους) είναι πολύ χρήσιμη για την εκτίμηση της αξιοπιστίας του αποτελέσματος.

Η αβεβαιότητα όμως στην οποία αναφέρθηκε ο Heisenberg είναι κάτι διαφορετικό: Οι αναπόφευκτες αβεβαιότητες Δx και Δp δεν προέρχονται από ατέλειες των μετρητικών συσκευών αλλά από αυτή καθ' εαυτή την κβαντική συμπεριφορά της ύλης. Ο Heisenberg το απέδειξε αυτό προτείνοντας μια σειρά από ευφυή νοητικά πειράματα, στα οποία ανέλυσε διαφορετικές πιθανές συσκευές μετρήσεων της θέσης και της ορμής ενός σωματίου.

Εδώ αναδεικνύεται και ο ρόλος της παρατήρησης στα φαινόμενα του μικρόκοσμου:

Για να προσδιορίσουμε τη θέση ενός ηλεκτρονίου, πρέπει να αλληλεπιδράσουμε με αυτό στέλνοντάς του ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία (φωτόνια). Αν το μήκος κύματος της ακτινοβολίας είναι μικρό, τότε η απροσδιοριστία στη μέτρηση θέσης θα είναι μικρή (η ακρίβεια στη μέτρηση της θέσης του ηλεκτρονίου θα είναι μεγάλη), όμως η μεταβολή της ορμής του λόγω της αλληλεπίδρασής με την ακτινοβολία θα είναι μεγάλη ($p = \frac{h}{\lambda}$), άρα θα έχουμε μεγάλη αβεβαιότητα στη μέτρηση ορμής. Αν ρίχναμε στο ηλεκτρόνιο

φως μεγαλύτερου μήκους κύματος, θα χάναμε σε ακρίβεια προσδιορισμού θέσης (μεγαλύτερη απροσδιοριστία στη μέτρηση θέσης), θα κερδίζαμε σε ακρίβεια μέτρησης ορμής (μικρότερη απροσδιοριστία στη μέτρηση ορμής), αφού η ορμή του ηλεκτρονίου θα είχε μεταβληθεί λιγότερο.

2) Η αρχή της απροσδιοριστίας δεν έχει νόημα να εφαρμοστεί σε φαινόμενα της καθημερινής ζωής στον μακρόκοσμο.

Έστω δυο σώματα, ένα ηλεκτρόνιο κινούμενο με ταχύτητα $v_1 = 3 \cdot 10^5$ m/s και ένα μπαλάκι του γκολφ μάζας 45g που κινείται με ταχύτητα 20 m/s. Θεωρούμε και για τα δυο αντικείμενα ότι η μέτρηση της ταχύτητας (και κατά συνέπεια της ορμής) έχει γίνει με ακρίβεια 0.1%. Εφαρμόζοντας την αρχή της απροσδιοριστίας για τα δύο αντικείμενα καταλήγουμε ότι η αβεβαιότητα στην θέση για το μπαλάκι είναι περίπου $\Delta x \approx 1,16 \cdot 10^{-27}$ m. Πράγμα που σημαίνει ότι πρακτικά γνωρίζουμε με ακρίβεια την θέση του.

Από την άλλη για το ηλεκτρόνιο η αβεβαιότητα στη θέση είναι κατ' ελάχιστο $\Delta x \approx 0,38 \cdot 10^{-4}$ m. Αν αναλογιστεί κανείς ότι αν το ηλεκτρόνιο θεωρηθεί σφαίρα η ακτίνα του είναι της τάξης του 10^{-19} m, ενώ ακόμα και μια μέση ατομική ακτίνα είναι της τάξης του 10^{-12} m, το συμπέρασμα που καταλήγουμε είναι το εξής: *δεν έχουμε την παραμικρή ιδέα που βρίσκεται το ηλεκτρόνιο!*

3) Η αρχή απροσδιοριστίας θέτει και το τέλος στην ύπαρξη τροχιάς ενός σωματιδίου: αφού η τροχιά προϋποθέτει ταυτόχρονη γνώση θέσης και ταχύτητας ενώ κάτι τέτοιο είναι αδιανόητο υπό το πρίσμα της εν λόγω αρχής, δεν νοείται να μιλάμε για τροχιές σωματιδίων. Τα ερωτήματα που επιτρέπεται να θέτουμε για ένα κβαντικό σύστημα, πρέπει να σχετίζονται μόνο με μεγέθη που είναι παρατηρήσιμα.

4) Ίσως κανείς νομίζει, ότι η αρχή της απροσδιοριστίας είναι ένα εμπόδιο στην επιστημονική γνώση. Τουναντίον η αρχή αυτή είναι η βάση της σύγχρονης κβαντομηχανικής και ερμηνεύει τη συμπεριφορά των συστημάτων σε μικροσκοπικό επίπεδο, καθώς και τη σταθερότητα των ατόμων.

Ο Άλμπερτ Αϊνστάιν πίστευε ότι αυτή η κβαντική θεωρία θα μπορούσε να μας δώσει μόνο μια μερική περιγραφή της φύσης, αλλά πίστευε επίσης ότι δεν υπάρχει "αβεβαιότητα" στη φύση και ότι η αβεβαιότητα υπάρχει μόνο στη γνώση μας γι' αυτήν.



Η «διαμάχη» Einstein – Bohr. Η αντιπαράθεσή τους ήταν καθαρά σε επίπεδο ιδεών και οι δυο τους ήταν πολύ καλοί φίλοι. Οι υπέρμαχοι της αιτιοκρατίας αμφισβητούν τις θέσεις της «αρχής της αβεβαιότητας» και με εκπρόσωπο τον Αϊνστάιν θεωρούν πως η αβεβαιότητα του Χάιζενμπεργκ ήταν σημάδι ανικανότητας του ανθρώπου να συλλάβει ολοκληρωτικά τον φυσικό κόσμο, και όχι απόδειξη ότι ο ίδιος ο κόσμος χαρακτηριζόταν από κάτι ανεξιχνίαστο και απροσπέλαστο. Η απόλυτη έκφραση της διαφωνίας των αιτιοκρατών και του Αϊνστάιν είναι η περίφημη έκφραση «Ο θεός δεν παίζει ζάρια».

7.5.2 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

Η αβεβαιότητα Δx της θέσης ενός ηλεκτρονίου που κινείται με ταχύτητα πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός είναι $\Delta x = 10^{-3} \text{ m}$. Δίνονται η μάζα του ηλεκτρονίου $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ και η σταθερά του Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$. Να υπολογιστούν:

- η ελάχιστη αβεβαιότητα Δp_x της ορμής,
- η ελάχιστη αβεβαιότητα Δv_x της ταχύτητας του ηλεκτρονίου,
- η ταχύτητα v_x του ηλεκτρονίου, αν γνωρίζουμε ότι η ελάχιστη αβεβαιότητα Δv_x της ταχύτητας είναι ίση με το 0,1% της ταχύτητας v_x .

Απάντηση:

α. Εφαρμόζοντας την αρχή της αβεβαιότητας, έχουμε: $\Delta p_x \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi \Delta x}$

Επομένως, η ελάχιστη αβεβαιότητα για την ορμή του ηλεκτρονίου είναι:

$$\Delta p_{x,\min} = \frac{h}{2\pi \Delta x} \Rightarrow \Delta p_{x,\min} = 1,055 \cdot 10^{-31} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

β. Επειδή γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $p = mv$. Επομένως:

$$p_x = m_e v_x \Rightarrow \Delta p_x = m_e \Delta v_x \Rightarrow \Delta p_{x,\min} = m_e \Delta v_{x,\min} \Rightarrow \Delta v_{x,\min} = \frac{\Delta p_{x,\min}}{m_e} \Rightarrow \Delta v_{x,\min} = 0,12 \text{ m/s}.$$

γ. $\Delta v_{x,\min} = 0,1\% v_x \Rightarrow v_x = 1000 \Delta v_{x,\min} \Rightarrow v_x = 120 \text{ m/s}.$

Παράδειγμα 2

Ένα διεγερμένο άτομο εκπέμπει ένα φωτόνιο, καθώς το ηλεκτρόνιο μεταβαίνει από κατάσταση ενέργειας E_a στην σταθερή κατάσταση στην οποία έχει ενέργεια E_r . το φωτόνιο έχει συχνότητα που

υπολογίζεται από τη σχέση $f = \frac{E_a - E_r}{h}$. Παρατηρείται όμως κάποιο εύρος Δf στην συχνότητα των

εκπεμπόμενων φωτονίων που οφείλεται στο χρόνο αποδιέγερσης του ατόμου. Αν ο μέσος χρόνος ζωής των διεγερμένων καταστάσεων (μέσος χρόνος αποδιέγερσης) είναι $\tau = 10 \cdot 10^{-8} \text{ s}$, να υπολογιστεί το ελάχιστο εύρος Δf των συχνοτήτων.

Απάντηση:

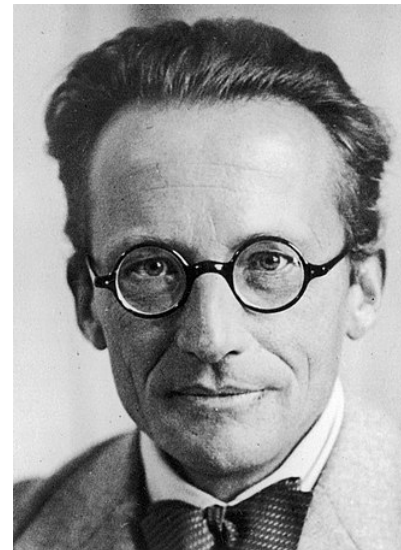
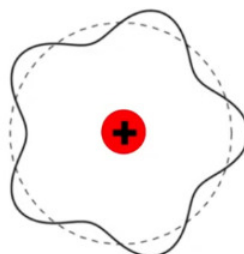
Από την αρχή της αβεβαιότητας έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta E \cdot \Delta \tau &= \frac{h}{2\pi} \rightarrow h \cdot \Delta f \cdot \Delta \tau = \frac{h}{2\pi} \rightarrow \Delta f = \frac{1}{2\pi \cdot \Delta \tau} \\ &\rightarrow \Delta f = 1,6 \cdot 10^7 \text{ Hz} \end{aligned}$$

7.6 Κυματοσυνάρτηση και εξίσωση Schrodinger, (Σρέντινγκερ)

Στην προηγούμενη παράγραφο εξηγήθηκε γιατί ένα υποατομικό σωματίδιο, δε μπορεί να περιγραφεί σαν υλικό σημείο, με καθορισμένη θέση στο χώρο. Υπό ορισμένες συνθήκες συμπεριφέρεται σαν κύμα.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο, αντί για την εικόνα της κλασικής φυσικής (σωματίδιο που περιφέρεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τον πυρήνα) η περιγραφή με όρους κβαντομηχανικής θα ήταν αυτή ενός κυκλικού στάσιμου κύματος όπως φαίνεται στην διπλανή εικόνα. Ένα τέτοιο κύμα αποτελείται πάντα από ακεραία πολλαπλάσια μηκών κυμάτων κάτι που εξηγεί την κβάντωση των ενεργειακών του καταστάσεων.



Ο Έρβιν Σρέντινγκερ (Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, 12 Αυγούστου 1887 – 4 Ιανουαρίου 1961)

Ήταν Αυστριακός φυσικός. Ασχολήθηκε με τη Στατιστική φυσική, τη Θερμοδυναμική, την Ηλεκτροδυναμική, την Κοσμολογία, τη Βιολογία, τη Φιλοσοφία, αλλά κυρίως με την Κβαντική φυσική, ανακαλύπτοντας την περίφημη κυματική εξίσωση που φέρει το όνομά του. Τιμήθηκε μαζί με τον Πολ Ντιράκ (Paul Dirac, 1902-1984) με το βραβείο Νόμπελ Φυσικής για τις εργασίες του πάνω στην ατομική θεωρία.

Για την περιγραφή του χρειαζόμαστε μία **κυματοσυνάρτηση** σε αναλογία με την εξίσωση κύματος που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή ενός μηχανικού ή ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Ο Erwin Schrödinger το 1925 ανέπτυξε μια κυματοσυνάρτηση τέτοιας μορφής. Τη συνάρτηση αυτή τη συμβολίζουμε με Ψ . Η κυματοσυνάρτηση είναι μία συνάρτηση της θέσης και του χρόνου $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$. Θα μπορούσε κάποιος να πει ότι η εξίσωση του Schrödinger για την κβαντομηχανική είναι όσο σημαντικός είναι ο δεύτερος νόμος του Newton για την κλασική φυσική.

Στα μηχανικά κύματα η εξίσωση κύματος μάς δίνει για κάθε χρονική στιγμή τη θέση κάθε σημείου του υλικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα. Στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα οι εξισώσεις του κύματος μας δίνουν για κάθε χρονική στιγμή την τιμή της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου στον οποίο διαδίδεται το κύμα. Η κυματοσυνάρτηση Ψ όμως που περιγράφει ένα σωματίδιο-κύμα δεν σχετίζεται με κάποιο μέσον διάδοσης ούτε με κάποιες ιδιότητες του χώρου. Είναι δύσκολο να της αποδώσουμε κάποια φυσική σημασία. Μπορούμε μόνο να περιγράψουμε πώς σχετίζεται με τα φυσικά παρατηρούμενα φαινόμενα.

Για κάποιο συγκεκριμένο σημείο, ορισμένη χρονική στιγμή η κυματοσυνάρτηση θα έχει μια συγκεκριμένη τιμή. Ο Max Born πρότεινε να ερμηνεύσουμε το τετράγωνο του μέτρου της κυματοσυνάρτησης σαν την πιθανότητα θέσης ανά μονάδα όγκου (πυκνότητα πιθανότητας). Δηλαδή, αν ορίσουμε έναν στοιχειώδη όγκο dV γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο (x, y, z) το γινόμενο $|\Psi|^2 \cdot dV$

δίνει την πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο μέσα στον όγκο dV στη δεδομένη χρονική στιγμή.

Αν χωρίσουμε το σύνολο του χώρου σε στοιχειώδεις όγκους dV και σε κάθε σημείο του χώρου βρούμε την τιμή της Ψ για κάποια χρονική στιγμή το άθροισμα των γινομένων πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα. Δηλαδή η πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο κάπου στο χώρο είναι ίση με τη μονάδα. Με απλά λόγια κάθε χρονική στιγμή το σωματίδιο σίγουρα βρίσκεται κάπου. Η παραπάνω σχέση προκύπτει από την

διάσταση που έδωσε ο Born στο και ονομάζεται **συνθήκη κανονικοποίησης**. Εάν η κυματοσυνάρτηση είναι σωστή πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη κανονικοποίησης.

Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι με την κυματοσυνάρτηση δεν μπορούμε υπολογίσουμε που βρίσκεται το σωματίδιο αλλά την *πιθανότητα που έχει να βρίσκεται στα διάφορα σημεία του χώρου*. Τα υλικά κύματα είναι κύματα πιθανότητας και η κυματοσυνάρτηση Ψ , που τα περιγράφει, συνδέεται με την πιθανότητα να βρεθεί το σωματίο σε κάποια περιοχή του χώρου.

Βιβλιογραφία

1. Κβαντομηχανική 1. Στέφανος Τραχανάς. Θεμελιώδεις αρχές – Απλά συστήματα – Δομή της ύλης. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 2011.
2. Halliday – Resnick , Πανεπιστημιακή φυσική, Τεύχος II, έκδοση Γ.Α. Πνευματικό ελληνική έκδοση μετάφραση από τους Γ. Πνευματικό και Γ. Πεπονίδη
3. Hugh D. Young, (1994) «University Physics(8rd Edition)», Addison-Wesley Co. ελληνική έκδοση
4. Thinking Physics Practical Lessons in Critical Thinking- Lewis C. Epstien, second edition
5. Φυσική Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, σχολικό βιβλίο Γ΄τάξης Γενικού Λυκείου, Β΄ τεύχος. Συγγραφείς: Αλέκος Ιωάννου, Γιάννης Ντάνος, Άγγελος Πήττας, Σταύρος Ράπτης
<http://ebooks.edu.gr/ebooks/v2/books-pdf.jsp?handle=8547/2357>
6. Φυσική Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, σχολικό βιβλίο Γ΄τάξης Γενικού Λυκείου, Γ΄ τεύχος. Συγγραφείς: Αλέκος Ιωάννου, Γιάννης Ντάνος, Άγγελος Πήττας, Σταύρος Ράπτης
http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2728/Fysiki-G-Lykeiou-ThSp_html-apli/index.html
7. Φυσική Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, σχολικό βιβλίο Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου, ομάδας Δρυ. Ανδρακάκος Κων/νος, Βελέντζας Αθανάσιος, Γάτσιος Ιωάννης, Διαμαντής Νικόλαος, Δρης Εμμανουήλ, Κρίκος Κων/νος, Πιερράκος Νικόλαος βελτιωμένη έκδοση 2008, 1^η έκδοση 2000
http://www.physics.ntua.gr/~dris/fysikh_lykeiou.html
8. Φυσική Γ΄ Ενιαίου Λυκείου, Ειδίκευση Β, τόμος 2., σχολικό βιβλίο Κύπρου. Συγγραφείς: Χρίστος Κρασιάς, Ανδρέας Παπαστυλιανού, Κυριακή Σαββίδου
9. Φυσική Γ΄ Λυκείου,(Σ2), τόμος 2., σχολικό βιβλίο Κύπρου. Συγγραφείς: Γιώργος Χατζηκωνσταντίνου Β.Δ, Τρύφων Στράτης Β.Δ, Λευκωσία 1998
10. Φυσική Γ΄ Ενιαίου Λυκείου, Ειδίκευση Α, τόμος 2., σχολικό βιβλίο Κύπρου. Συγγραφείς: Στέλιος Βασιλειάδης, Πάνικος Δωρίτης, Λευκωσία 2004
11. Φυσική Γ΄ Λυκείου, Κύματα - Στοιχεία Κβαντομηχανικής Γ. Μαθιουδάκης και Γ. Παναγιωτόπουλος, εκδόσεις Σαββάλας
12. Φυσική Κβαντομηχανική Γ΄ Λυκείου, Α. Κεχαγιάς, Σ. Τσώνης, εκδόσεις Ροπή.
13. Φυσική Γ' Λυκείου - Κύματα & Στοιχεία Κβαντομηχανικής, Παπαθεοδώρου, Εκδόσεις Πατάκη
14. Φυσική Γ΄ Λυκείου, Στοιχεία Κβαντομηχανικής, Σωτήρης Χρονόπουλος, εκδόσεις Χρονόπουλος.
15. Φυσική Γ΄ Λυκείου, Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική-Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα, Νίκος Κοσμόπουλος, εκδόσεις Κόσμος.

-
16. Ιστοσελίδα <https://mathesis.cup.gr/> Χρησιμοποιήθηκε μεγάλο υλικό θεωρίας.
17. Ιστοσελίδα www.ylikonet.gr. Χρησιμοποιήθηκε μεγάλο πλήθος ασκήσεων και υλικό θεωρίας
18. Ιστοσελίδα <https://physicsgg.me/>
19. Σημειώσεις καθηγητού, Π. Κουνάβη.
<http://www.des.upatras.gr/physics/kounavis/Lectures/Sem1/%CE%9A%CE%B5%CF%86%CE%AC%CE%BB%CE%B1%CE%B9%CE%BF5%CE%A3.pdf>
20. Ιστοσελίδα Υπουργείου Ψηφιακών Εκπαιδευτικών Βοηθημάτων, study4exams, <http://www.study4exams.gr/>. Χρησιμοποιήθηκε μεγάλο πλήθος ασκήσεων
21. Ιστοσελίδα <https://www.wikipedia.org/>
22. Σημειώσεις Κβαντομηχανικής, Π. Μουρούζης.
https://ekfe.ker.sch.gr/docs/83_introduction_to_quantum_theory.pdf
23. Στοιχεία κβαντομηχανικής, Σημειώσεις. Α. Παπάζογλου.
<https://ylikonet.gr/2022/12/20/%cf%83%cf%84%ce%bf%ce%b9%cf%87%ce%b5%ce%af%ce%b1-%ce%ba%ce%b2%ce%b1%ce%bd%cf%84%ce%bf%ce%bc%ce%b7%cf%87%ce%b1%ce%bd%ce%b9%ce%ba%ce%ae%cf%82-2/>
24. Σημειώσεις Κβαντομηχανικής, Μ. Μιχαήλ.
https://drive.google.com/file/d/1Rn2vOnAGN_VIajqQwqZ0POQRE1Rvlo1k/view
25. Ιστοσελίδα <http://www.physics4u.gr/articles/quantum100.html>
26. Ιστοσελίδα <https://www.hellenicaworld.com/>
27. Ιστοσελίδα http://esperia.iesl.forth.gr/~kafesaki/Modern-Physics/lectures/modern_physics2.html
28. Ιστοσελίδα https://www.ted.com/talks/chad_orzel_what_is_the_heisenberg_uncertainty_principle?language=el
Τι είναι η Αρχή της Αβεβαιότητας του Χάιζενμπεργκ; - Τσαντ Όρζελ.
29. Ιστοσελίδα <https://www.youtube.com/watch?v=ZaXm6wau-jc&t=8s>
Λειτουργία κεραίας