

κίνηση στερεού σώματος
Θέματα Γ και Δ

ΓΔ.1 Συμπαγής και ομογενής κύλινδρος με μάζα, $m=3\text{kg}$ και ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, $I_K=MR^2/2$ με $R=0,1\text{m}$ αφήνεται τη χρονική στιγμή $t_0=0$ σε σημείο κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$ και σε ύψος $h=30\text{m}$ από το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστούν:

α. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, η γωνιακή επιτάχυνση και το μέτρο της στατικής τριβής.

β. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο, ο χρόνος, t που χρειάστηκε και το μήκος που διένυσε το κέντρο μάζας.

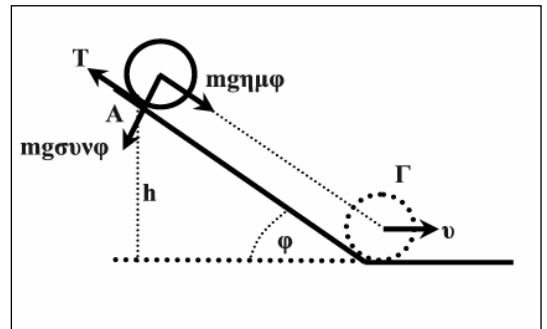
γ. Ο αριθμό των περιστροφών που κάνει στο χρονικό διάστημα, t .

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής.

ε. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής και της κινητικής λόγω μεταφοράς τη χρονική στιγμή, t , που φτάνει στη βάση του κεκλιμένου και ο ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας.

στ. Οι τιμές της γωνίας φ , για τις οποίες ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και ο συντελεστής μέγιστης στατικής τριβής κυλίνδρου και κεκλιμένου $\mu=1/3$.



Λύση

α. Έστω $\alpha_{\gamma\gamma}$ η γωνιακή επιτάχυνση και a η επιτάχυνση του κέντρου μάζας. Ισχύουν:

$$a = \alpha_{\gamma\gamma} \cdot R \quad (1)$$

$$\Sigma F = ma \rightarrow mg \sin \varphi - T = ma \quad (2) \quad \text{Από (1)(2)(3)} \rightarrow a = 2g \sin \varphi / 3 \rightarrow a = 10/3 \text{m/s}^2 \text{ και } \alpha_{\gamma\gamma} = 100/3 \text{rad/s}^2$$

$$\Sigma \tau = I_K \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow TR = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{a}{R} \rightarrow T = \frac{ma}{2} \quad (3) \quad \text{και } T = 5\text{N}$$

$$\text{β. Από την ΑΔΜΕ: } E_A = E_{\Gamma} \rightarrow U_A + K_A = U_{\Gamma} + K_{\Gamma} \rightarrow mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{v} = \omega R \quad \text{v} = \sqrt{4gh/3} \rightarrow v = 20\text{m/s.}$$

$$\text{Η ταχύτητα, v, του κέντρου μάζας: } v = at \rightarrow t = v/a \rightarrow t = 6\text{s} \text{ και η μετατόπιση: } d = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow d = 60\text{m.}$$

γ. Σε κάθε περιστροφή το κέντρο μάζας μετατοπίζεται κατά $2\pi R$ κατά μήκος του κεκλιμένου. Άρα για μετατόπιση d θα χρειαστεί N περιστροφές: $d = N \cdot 2\pi R \rightarrow N = \frac{d}{2\pi R} \rightarrow N = 300/\pi$ περιστροφές.

$$\text{δ. Ρυθμός μεταβολής στροφορμής: } \frac{dL}{dt} = \tau = T \cdot R = 5\text{N} \cdot 0,1\text{m} \rightarrow \frac{dL}{dt} = 0,5\text{kgm}^2/\text{s}^2.$$

$$\text{ε. } \frac{dK_{\pi}}{dt} = \Sigma \tau \cdot \omega = I \alpha_{\gamma\gamma} \cdot \alpha_{\gamma\gamma} \cdot t = I \alpha_{\gamma\gamma}^2 \cdot t = \frac{mR^2}{2} \cdot \alpha_{\gamma\gamma}^2 \cdot t \rightarrow \frac{dK_{\pi}}{dt} = 100\text{J/s,}$$

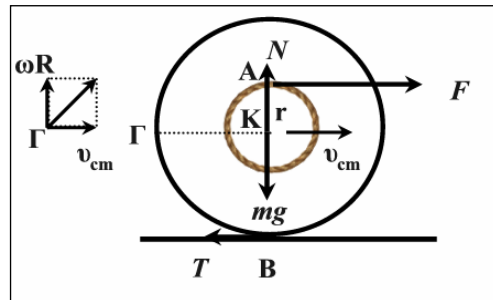
$$\frac{dK_{\mu}}{dt} = \Sigma F_x \cdot v = ma \cdot at = ma^2 t \rightarrow \frac{dK_{\mu}}{dt} = 200\text{J/s.}$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{\mu}}{dt} + \frac{dK_{\pi}}{dt} \rightarrow \frac{dK}{dt} = 300\text{J/s} \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = \Sigma \tau \cdot \omega + \Sigma F_x \cdot v = TR \cdot \omega + (mg \sin \varphi - T)v = mg \sin \varphi \cdot v = 300\text{J/s.}$$

$$\text{στ. Για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πρέπει, } T < \mu N \text{ με } N = mg \cos \varphi \text{ και } T = \frac{ma}{2} = \frac{mg \sin \varphi}{3}. \text{ Άρα}$$

$$\frac{mg \sin \varphi}{3} < \mu \cdot mg \cos \varphi \rightarrow \tan \varphi < 3\mu \rightarrow \tan \varphi < 1 \rightarrow \varphi < 45^\circ.$$

ΓΛ.2 Στερεό κυλινδρικό σώμα, μάζας $m=20\text{kg}$, ακτίνας βάσης $R=0,5\text{m}$ και ροπής αδράνειας $I=mR^2$ κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Αβαρές νήμα είναι τυλιγμένο σε απόσταση $r=0,2\text{m}$ από τον άξονα περιστροφής. Ακούμε δύναμη $F=20\text{N}$ στο άκρο Α του νήματος και καθώς αυτό ξετυλίγεται, το σώμα κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$, έχει $v_{0,\text{cm}}=0$ και $\omega_0=0$. Να υπολογιστούν:



α. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας.

β. Οι τιμές του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ επιπέδου και κυλίνδρου είναι δυνατή η κύλιση χωρίς ολίσθηση;

γ. Οι περιστροφές που πρέπει να κάνει το σώμα, για να αποκτήσει ταχύτητα $v_{\text{cm}}=7\text{m/s}$;

δ. Η ταχύτητα των σημείων, Α, Β και Γ όταν η $v_{\text{cm}}=7\text{m/s}$.

ε. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, ο ρυθμός με τον οποίο δίνει ενέργεια η δύναμη F στο στερεό τη χρονική στιγμή $t=10\text{s}$ και το έργο της δύναμης F στο χρονικό διάστημα $[0,10\text{s}]$.

στ. Το μήκος του νήματος που ξετυλίχτηκε και η μετατόπιση του άκρου Α τη στιγμή $t=10\text{s}$.

Λύση

α. $\Sigma F_x = ma_{\text{cm}} \rightarrow F - T = ma_{\text{cm}} \quad (1)$

$\Sigma \tau = I\alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow Fr + TR = mR^2 \frac{a_{\text{cm}}}{R} \rightarrow Fr + TR = mRa_{\text{cm}} \quad (2)$ Από (1)(2) $\rightarrow T=6\text{N}$ και $a_{\text{cm}}=0,7\text{m/s}^2$.

β. $\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - Mg = 0 \rightarrow N = 200\text{N}$

Για να κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει πρέπει: $T < \mu N \rightarrow \mu > \frac{T}{N} \rightarrow \mu > 6/200 \rightarrow \mu > 0,03$

γ. $v_{\text{cm}} = a_{\text{cm}} t \rightarrow t = 10\text{s}$ και $\alpha_{\gamma\gamma} = a_{\text{cm}}/R \rightarrow \alpha_{\gamma\gamma} = 7/5 \text{ rad/s}^2$

Άρα η γωνία που διαγράφει μια ακτίνα της τομής του κυλίνδρου είναι:

$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\gamma} t^2 \rightarrow \Delta\theta = 70\text{rad}$. Για μια περιστροφή χρειάζονται $2\pi \text{ rad}$ άρα, $N = \Delta\theta/2\pi \rightarrow N = 35/\pi$ στροφές.

δ. Όταν η $v_{\text{cm}}=7\text{m/s}$ τότε: $v_A = v_{\text{cm}} + \omega r = v_{\text{cm}} + \frac{v_{\text{cm}}}{R} \cdot x \rightarrow v_A = 9,8\text{m/s}$.

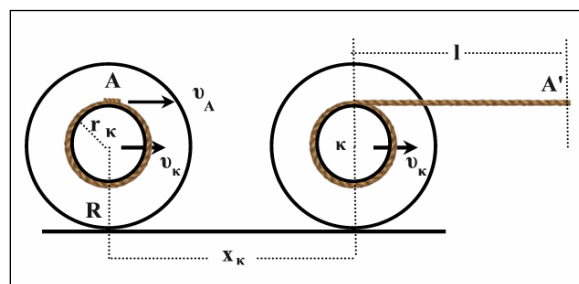
$v_B = v_{\text{cm}} - \omega R \rightarrow v_B = 0$

$v_{\Gamma} = \sqrt{v_{\text{cm}}^2 + (\omega R)^2} = \sqrt{2v_{\text{cm}}^2} = v_{\text{cm}}\sqrt{2} \rightarrow v_{\Gamma} = 7\sqrt{2}\text{m/s}$.

ε. $\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\gamma} = mR^2 \cdot \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow \frac{dL}{dt} = 7\text{kgm}^2/\text{s}^2$

$P_F = F \cdot v_A = 20\text{N} \cdot 9,8\text{m/s} \rightarrow P_F = 196\text{J/s} \quad (1)$

$W_F = F \cdot x_A = F \cdot (\frac{1}{2}\alpha_A t^2) \rightarrow W_F = 980\text{J}$



στ. Το μήκος του νήματος που ξετυλίχτηκε: $l = r\Delta\theta = 0,2 \cdot 70\text{m} \rightarrow l = 14\text{m}$

Η μετατόπιση του κέντρου μάζας: $x_K = \frac{1}{2}a_{\text{cm}} t^2 \rightarrow x_K = 35\text{m}$

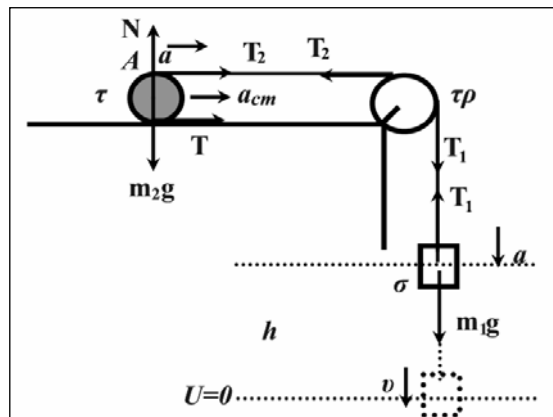
Η μετατόπιση του άκρου Α του νήματος: $x_A = l + x_K \rightarrow x_A = 49\text{m} \quad (2)$

¹ $P_F = P_{\Sigma F} = \frac{dK}{dt} = \Sigma F_x \cdot v_{\text{cm}} + \Sigma \tau \cdot \omega = ma_{\text{cm}} \cdot v_{\text{cm}} + mR^2 \cdot \alpha_{\gamma\gamma} \omega = 196\text{J/s}$ ή $P_F = F v_{\text{cm}} + Fx\omega = 196\text{J/s}$

$W_F = \Delta K = K = \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

² $x_A = \frac{1}{2}\alpha_A t^2 = 49\text{m}$

ΓΔ.3 Στη διάταξη του σχήματος έχουμε τα εξής δεδομένα. Η τροχαλία, (τρ), είναι αβαρής, δηλαδή έχει ροπή αδράνειας $I_{τρ}=0$, ακτίνα, r , και το νήμα δεν ολισθαίνει κατά την επαφή του με αυτήν. Ο τροχός, τ , έχει μάζα $m_2=4/3\text{kg}$, και μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Η ροπή αδρανείας του ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας (κμ) του είναι $I=m_2R^2/2$ όπου R η ακτίνα του. Το σώμα σ , μάζας $m_1=2\text{kg}$ αφήνεται να πέσει στο κενό, χωρίς τριβές, τη στιγμή που όλο το σύστημα είναι αρχικά ακίνητο. Να υπολογιστούν:



α. Η επιτάχυνση του σώματος, σ .

β. Η στατική τριβή μεταξύ τροχού και οριζοντίου επιπέδου.

γ. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού, τη χρονική στιγμή που το σώμα σ , έχει πέσει κατά $h=1\text{m}$.

δ. Το ποσοστό του έργου του βάρους του σώματος, σ , για την πτώση κατά h , που μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια του τροχού. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

α. Για το σώμα, σ : $\Sigma F_1 = m_1 \cdot a \rightarrow m_1 g - T_1 = m_1 a$ (1)

Για την τροχαλία: $\Sigma \tau = 0 \rightarrow T_1 r - T_2 r = I_{τρ} \alpha_{\gamma\gamma, \tau\tau} \quad I_{τρ}=0 \quad \clubsuit \quad T_1 = T_2$ (2)

Για τον τροχό: $\Sigma F_2 = m_2 \cdot a_{cm} \rightarrow T_2 + T = m_2 a_{cm}$ (3)

και $\Sigma \tau = I_{\gamma\gamma} \rightarrow T_2 R - TR = I_{\gamma\gamma} \alpha \rightarrow (T_2 - T)R = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{a_{cm}}{R} \rightarrow T_2 - T = \frac{m_2 a_{cm}}{2}$ (4)

Αλλά η επιτάχυνση, a , του σώματος είναι ίδια με την επιτάχυνση του ανώτατου σημείου, A , του τροχού και ίση με $a = a_{cm} + \alpha_{\gamma\gamma} \cdot R = 2a_{cm} \rightarrow a = 2a_{cm} \rightarrow a_{cm} = a/2$ (5).

Από (2)(3)(5) $\rightarrow T_1 + T = \frac{m_2 a}{2}$

Από (2)(4)(5) $\rightarrow T_1 - T = \frac{m_2 a}{4} \dots \dots \rightarrow T_1 = \frac{3m_2 a}{8}$ (6) Από (1)(6) $\rightarrow a = 8\text{m/s}^2$

β. Από τη σχέση: $T_1 - T = m_2 \frac{a}{4} \rightarrow \frac{3m_2 a}{8} - T = m_2 \frac{a}{4} \rightarrow T = 4/3\text{N}$.

γ. Γράφουμε ΑΔΜΕ για όλο το σύστημα, σώματος (σ) και τροχού (τ), (η τροχαλία είναι αβαρής) για την πτώση κατά h .

$E_{\text{αρχ}} = U_{\sigma} + U_{\tau} = m_1 gh + U_{\tau}$, η δυναμική ενέργεια U_{τ} του τροχού μένει σταθερή.

$E_{\text{τελ}} = K_{\sigma} + K_{\tau} + U_{\tau} = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + U_{\tau}$, όπου $v = 2v_{cm}$ και $\omega = \frac{v_{cm}}{R}$

Ισχύει: $E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \downarrow m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 (2v_{cm})^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{cm}^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{v_{cm}^2}{2} \rightarrow v_{cm} = 2\text{m/s}$

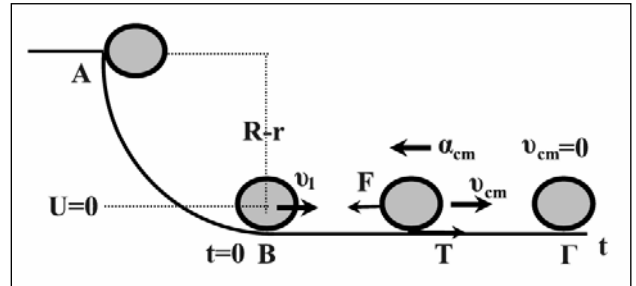
δ. Η κινητική ενέργεια του τροχού μετά την πτώση του σώματος κατά h είναι:

$K_{\tau} = \frac{1}{2} m_2 v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{cm}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{cm}^2 / 2 \rightarrow K_{\tau} = 4\text{J}$

Το έργο του βάρους του σώματος, σ , για πτώση κατά h είναι: $W = m_1 gh = 20\text{J}$.

Άρα το ποσοστό είναι, $\pi\% = \frac{K_{\tau}}{W} \cdot 100\% = \frac{4}{20} \cdot 100\% \rightarrow \pi = 20\%$

ΓΔ.4 Στη διάταξη που φαίνεται στο σχήμα, το τεταρτοκύκλιο έχει ακτίνα $R=0,3\text{m}$ και η σφαίρα μάζα $m=5\text{kg}$ και ακτίνα $r=0,02\text{m}$. Η σφαίρα αφήνεται από το χείλος του τεταρτοκυκλίου έτσι ώστε το κέντρο της να βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το σημείο Α. Σε όλη τη διαδρομή της τόσο στο κυκλικό όσο και στο ευθύγραμμο τμήμα, η σφαίρα κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.



α. Να υπολογιστεί η ταχύτητα, v_1 του κέντρου μάζας (κμ) της σφαίρας, όταν αυτό φτάνει στην ίδια κατακόρυφο με το σημείο Β του τεταρτοκυκλίου.

Στη συνέχεια η σφαίρα αρχίζει να κυλάει στο οριζόντιο επίπεδο όπου δέχεται οριζόντια δύναμη $F=7\text{N}$ η οποία ασκείται στο (κμ) της και έχει κατεύθυνση αντίθετη της κίνησής της. Να υπολογιστούν:

β. Το μέτρο της επιβράδυνσης του (κμ) της σφαίρας.

γ. Η μέγιστη μετατόπιση του (κμ) της σφαίρας στο οριζόντιο επίπεδο.

δ. Ο ρυθμός παραγωγής έργου της F τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του (κμ) είναι 1m/s .

ε. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας στο οριζόντιο επίπεδο.

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας της σφαίρας $I=2mr^2/5$.

Λύση

α. Γράφω την ΑΔΜΕ για τη σφαίρα από το Α στο Β με στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το κέντρο μάζας της σφαίρας τη στιγμή που φτάνει στο σημείο, Β.

$$E_A = K_A + U_A = 0 + mg(R-r)$$

$$E_B = K_B + U_B = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \text{ με } \omega = v_1/r \text{ και } I = 2mr^2/5$$

$$E_A = E_B \rightarrow mg(R-r) = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{v_1^2}{r^2} \rightarrow v_1 = 2\text{m/s}$$

$$\beta. \Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\psi} \rightarrow T \cdot r = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{\alpha_{cm}}{r} \rightarrow T = \frac{2}{5}m\alpha_{cm} \quad (1)$$

$$\Sigma F = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow F - T = m\alpha_{cm} \rightarrow F = T + m\alpha_{cm} \quad (2) \text{ Από } (1)(2) \rightarrow \alpha_{cm} = \frac{5F}{7m} \rightarrow \alpha_{cm} = 1\text{m/s}^2.$$

Επίσης είναι: $(1) \rightarrow T = 2\text{N}$ και $(2) \rightarrow F = 7\text{N}$

γ. Λόγω της επιβράδυνσης που της δίνει η δύναμη F , η σφαίρα σταματάει στο σημείο, Γ. Η απόσταση ΒΓ είναι s και ο χρόνος που χρειάζεται για να τη διανύσει, t .

$$v_{cm} = v_1 - \alpha_{cm}t \rightarrow 0 = v_1 - \alpha_{cm}t \rightarrow t = v/\alpha_{cm}$$

$$s = v_1t - \frac{1}{2}\alpha_{cm}t^2 \rightarrow s = \frac{v_1^2}{2\alpha_{cm}} \rightarrow s = 2\text{m}$$

δ. Η δύναμη F ασκείται στο κέντρο μάζας και συνεπώς:

$$\frac{dW_F}{dt} = \frac{-F\Delta x_{cm}}{\Delta t} = -F \cdot v_{cm} = -7\text{N} \cdot 1\text{m/s} \rightarrow \frac{dW_F}{dt} = -7\text{J/s}$$

$$\epsilon. \frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = -Tr = -2\text{N} \cdot 0,02\text{m} \rightarrow \frac{dL}{dt} = -0,04\text{kgm}^2/\text{s}^2.$$

ΓΔ.5 Λεπτή κυκλική στεφάνη μάζας m , ακτίνας $R=0,2m$, ροπής αδράνειας $I=mR^2$ μπαίνει σε κίνηση σε οριζόντιο δάπεδο με δύο διαφορετικούς τρόπους.

α. Βάζουμε τη στεφάνη σε κυκλική κίνηση στον αέρα με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=10\text{rad/s}$ και στη συνέχεια την αφήνουμε απαλά στο πάτωμα τη χρονική στιγμή $t=0$ με $v_0=0$. Αν χρειαστεί χρόνο $t_1=2s$ μέχρι να αρχίσει να κυλάει χωρίς όμως να ολισθαίνει, να βρείτε την τιμή του συντελεστή μέγιστης στατικής τριβής, μ , μεταξύ δαπέδου και στεφάνης.

β. Εκτοξεύουμε ένα κύλινδρο με $I=mR^2/2$, και ακτίνα, $R=0,1m$, με αρχική ταχύτητα κέντρου μάζας, $v_0=3m/s$, ενώ η αρχική γωνιακή της ταχύτητα είναι μηδέν. Αν ο συντελεστής μέγιστης στατικής τριβής είναι $\mu=0,1$, κατά πόσο μήκος, s , πρέπει να μετατοπιστεί το κέντρο μάζας και πόση γωνία, θ , να διαγράψει μια επιβατική ακτίνα της βάσης του, μέχρι ο κύλινδρος να αρχίσει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει; Δίνεται $g=10m/s^2$.

Λύση

α. Τη χρονική στιγμή $t=0$, $v_0=0$ και $\omega_0=10\text{rad/s}$. Για να αρχίσει κάποια στιγμή t_1 να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει πρέπει να γίνει $v_{cm}=\omega R$, (1)

Η μόνη οριζόντια δύναμη που δέχεται η στεφάνη είναι η στατική τριβή T , που πρέπει να έχει την κατεύθυνση της κίνησης ώστε να την επιταχύνει μεταφορικά και να την επιβραδύνει περιστροφικά.

$$\Sigma F=m a_{cm} \rightarrow T=+ m a_{cm} \rightarrow \mu N=m a_{cm} \rightarrow \mu mg=m a_{cm} \rightarrow a_{cm}=\mu g \quad (2)$$

$$\Sigma \tau=I \alpha_{\gamma v} \rightarrow T R=m R^2 \alpha_{\gamma v} \rightarrow \mu mg \cdot R=m R^2 \alpha_{\gamma v} \rightarrow \alpha_{\gamma v}=\mu g / R \quad (3)$$

$$\text{Επιβραδυνόμενη περιστροφή: } \omega=\omega_0-\alpha_{\gamma v} t_1 \quad (4)$$

$$\text{Επιταχυνόμενη μεταφορά: } v_{cm}=a_{cm} t_1 \quad (5)$$

$$\text{Από (1)(4)(5)} \rightarrow v_{cm}=\omega R \rightarrow a_{cm} t_1=(\omega_0-\alpha_{\gamma v} t_1) R \xrightarrow{(2)(3)} \mu g t_1=(\omega_0-\frac{\mu g}{R} t_1) R \rightarrow \mu=\frac{\omega_0 R}{2 g t_1} \rightarrow \mu=0,05$$

β. Στην περίπτωση αυτή τη χρονική στιγμή $t=0$, $v_0=3m/s$ και $\omega_0=0$. Για να αρχίσει κάποια στιγμή t_1 να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει πρέπει να γίνει και πάλι, $v_{cm}=\omega R$, (1). Η στατική τριβή, T , τώρα έχει κατεύθυνση αντίθετη της κίνησης ώστε να επιβραδύνει τον κύλινδρο μεταφορικά και να τον επιταχύνει περιστροφικά.

$$\Sigma F=m a_{cm} \rightarrow T=- m a_{cm} \rightarrow \mu N=m a_{cm} \rightarrow \mu mg=m a_{cm} \rightarrow a_{cm}=\mu g \quad (6)$$

$$\Sigma \tau=I \alpha_{\gamma v} \rightarrow T R=\frac{m R^2}{2} \alpha_{\gamma v} \rightarrow \mu mg \cdot R=\frac{m R^2}{2} \alpha_{\gamma v} \rightarrow \alpha_{\gamma v}=2 \mu g / R \quad (7)$$

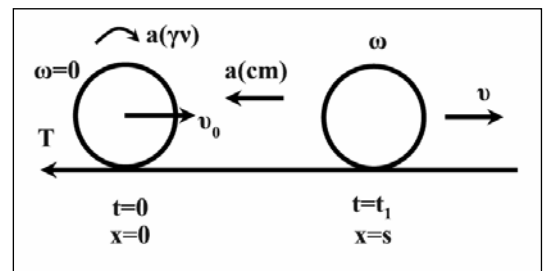
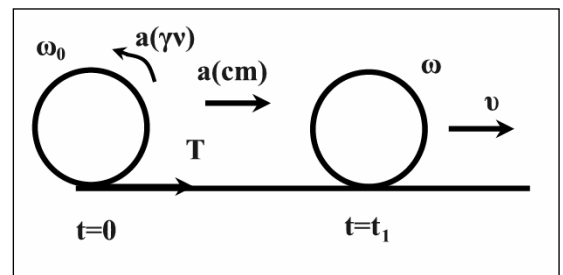
$$\text{Επιβραδυνόμενη μεταφορά: } v=v_0-a_{cm} t \quad (8) \text{ και } s=v_0 t-\frac{1}{2} a_{cm} t^2 \quad (9)$$

$$\text{Επιταχυνόμενη περιστροφή: } \omega=\alpha_{\gamma v} t \quad (10) \text{ και } \theta=\frac{1}{2} \alpha_{\gamma v} t^2 \quad (11)$$

$$v_{cm}=\omega R \rightarrow v_0-a_{cm} t_1=\alpha_{\gamma v} t_1 \cdot R \xrightarrow{(6)(7)} v_0-\mu g t_1=2 \mu g t_1 \rightarrow t_1=v_0 / 3 \mu g \quad (12)$$

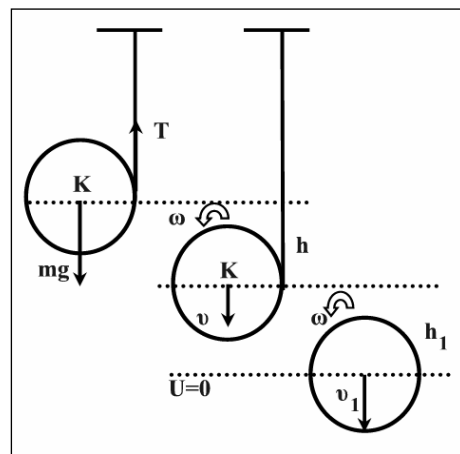
$$\text{Από (6),(9) και (12)} \rightarrow s=\frac{5 v_0^2}{18 \mu g} \rightarrow s=2,5 m. \text{ Από (7)(11)(12)} \rightarrow \theta=\frac{v_0^2}{9 \mu g R} \rightarrow \theta=10 \text{rad.}^{\text{r}}$$

^r Προφανώς δεν ισχύει $s=R \cdot \theta$ αφού δεν υπάρχει αμιγής κύλιση στο διάστημα. s .



ΓΔ.6 Στο γιο-γιο του σχήματος που έχει μάζα $m=6\text{kg}$ και ακτίνα $R=0,1\text{m}$ έχει τυλιχτεί πολλές φορές γύρω του αβαρές λεπτό νήμα. Με σταθερό το ένα άκρο του νήματος αφήνουμε το γιο-γιο να κατεβαίνει. Όταν αυτό έχει κατέβει κατά $h=5/3\text{m}$ αποκτά μεταφορική ταχύτητα $v=5\text{m/s}$. Να υπολογιστούν:

- Η μεταφορική επιτάχυνση του κέντρου μάζας του σώματος.
- Η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος και η τάση του νήματος.
- Ο λόγος της στροφικής κινητικής ενέργειας του σώματος προς τη μεταφορική κινητική ενέργεια του σώματος, χωρίς να θεωρήσετε γνωστό τον τύπο της ροπής αδράνειας του γιο-γιο.
- Τη σχέση που περιγράφει το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του στερεού σε σχέση με το χρόνο.
- Τη στιγμή που η μεταφορική ταχύτητα του στερεού είναι $v=5\text{m/s}$, κόβεται το νήμα. Πόση θα γίνει η μεταφορική ταχύτητα μετά από πρόσθετη πτώση κατά $h_1=3,75\text{m}$;
Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



Λύση

α. Το κέντρο μάζας πέφτει με σταθερή επιτάχυνση a_{cm} και μετά από πτώση h που διαρκεί χρόνο, t , αποκτάει ταχύτητα $v_{cm}=v=5\text{m/s}$.

$$h = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \text{ και } v_{cm} = a_{cm} t \text{ . Άρα } \rightarrow h = \frac{v_{cm}^2}{2 a_{cm}} \rightarrow a_{cm} = \frac{v_{cm}^2}{2h} \rightarrow a_{cm} = 7,5 \text{m/s}^2$$

β. Το μήκος του νήματος, $\Delta l = R \cdot \theta$ που ξετυλίγεται είναι ίσο με την πτώση κατά y του κέντρου μάζας κάθε χρονική στιγμή. Άρα:

$$y = R \cdot \theta \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t} = R \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \rightarrow v_{cm} = R \omega \rightarrow \frac{\Delta v_{cm}}{\Delta t} = R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \rightarrow a_{cm} = R a_{\gamma\gamma} \rightarrow a_{\gamma\gamma} = \frac{a_{cm}}{R} \rightarrow a_{\gamma\gamma} = 75 \text{rad/s}^2.$$

$$\Sigma F = m a_{cm} \rightarrow mg - T = m a_{cm} \rightarrow T = mg - m a_{cm} \rightarrow T = 15 \text{N}$$

$$\gamma. \Sigma \tau = I a_{\gamma\gamma} \rightarrow TR = I a_{\gamma\gamma} \rightarrow I = \frac{TR}{a_{\gamma\gamma}} \rightarrow I = \frac{1}{50} \text{kgm}^2$$

$$\frac{K_{\pi}}{K_{\mu}} = \frac{\frac{1}{2} I \omega^2}{\frac{1}{2} m v_{cm}^2} = \frac{I \omega^2}{m R^2 \omega^2} = \frac{I}{m R^2} \rightarrow \frac{K_{\pi}}{K_{\mu}} = \frac{1}{3}$$

$$\delta. \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta K_{\pi}}{\Delta t} + \frac{\Delta K_{\mu}}{\Delta t} = \Sigma \tau \cdot \omega + \Sigma F \cdot v_{cm} = I a_{\gamma\gamma} a_{\gamma\gamma} t + m a_{cm} a_{cm} t = (I a_{\gamma\gamma}^2 + m a_{cm}^2) t \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 450 t \text{ (σε J/s)}$$

ε. Μετά το κόψιμο του νήματος το στερεό δέχεται μόνο τη δύναμη του βάρους του. Συνεπώς κάνει κατακόρυφη επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση με επιτάχυνση, g , ενώ συνεχίζει να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, $\omega = v/R = 50 \text{rad/s}$, αφού δεν δέχεται πλέον καμιά ροπή. Γράφουμε την ΑΔΜΕ για την πτώση κατά h_1 για να βρούμε τη μεταφορική ταχύτητα v_1 του σώματος.

$$E_{\alpha\rho\chi} = mgh_1 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \rightarrow mgh_1 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 \rightarrow mgh_1 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 \rightarrow v_1 = \sqrt{v^2 + 2gh_1} \rightarrow v_1 = 10 \text{m/s}$$

ΓΔ.7 Στο λούκι δίσκου μάζας $m=0,4\text{kg}$, ακτίνας $R=0,4\text{m}$ είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα. Τη στιγμή $t_0=0$ αφήνουμε το δίσκο ελεύθερο ενώ ασκούμε στο ελεύθερο άκρο Α του νήματος κατακόρυφη δύναμη $F=2,4\text{N}$ με φορά προς τα πάνω. Το νήμα ξετυλίγεται και ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα. Να υπολογίσετε:

α. Τις επιταχύνσεις του σημείου Α και του κέντρου μάζας του δίσκου.

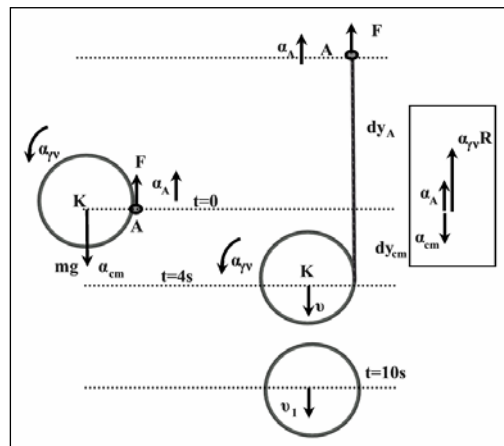
β. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του δίσκου.

γ. Το μήκος του νήματος που ξετυλίχτηκε μέχρι τη στιγμή $t_1=4\text{s}$.

δ. Το έργο της F και το έργο του βάρους στο χρονικό διάστημα $[0,4\text{s}]$ και την κινητική ενέργεια του δίσκου τη χρονική στιγμή, $t_1=4\text{s}$.

ε. Το ρυθμό με τον οποίο παρέχει ενέργεια η δύναμη F τη χρονική στιγμή, $t_1=4\text{s}$.

στ. Τη στιγμή t_1 το νήμα κόβεται. Πόση θα είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας τη χρονική στιγμή $t_2=10\text{s}$; Δίνονται $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.



Λύση

α. Επειδή $mg=4\text{N}$ και $F=2,4\text{N}$ άρα $mg>F$ το κέντρο μάζας Κ πέφτει με a_K ενώ το σημείο Α ανεβαίνει με a_A και ο δίσκος περιστρέφεται με $\alpha_{\gamma\gamma}$. Το μήκος του νήματος $\Delta l=Rd\theta$ που ξετυλίγεται θα ισούται με την μετατόπιση του κέντρου μάζας dy_{cm} προς τα κάτω αλλά και τη μετατόπιση του άκρου Α του νήματος προς τα πάνω, dy_A , (βλέπε σχήμα).

$$Rd\theta = dy_{cm} + dy_A \rightarrow \frac{Rd\theta}{dt} = \frac{dy_{cm}}{dt} + \frac{dy_A}{dt} \rightarrow \omega R = v_{cm} + v_A \rightarrow \frac{d(R\omega)}{dt} = \frac{dv_{cm}}{dt} + \frac{dv_A}{dt} \rightarrow \alpha_{\gamma\gamma} R = a_{cm} + a_A \quad (1)$$

$$\Sigma F = ma_{cm} \rightarrow mg - F = ma_{cm} \rightarrow a_{cm} = 4\text{m/s}^2 \quad (2)$$

$$\Sigma \tau = I\alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow FR = I\alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow \alpha_{\gamma\gamma} = 30\text{rad/s}^2 \quad (3) \quad \text{Από (1) (2) (3)} \rightarrow a_A = \alpha_{\gamma\gamma} R - a_{cm} \rightarrow a_A = 8\text{m/s}^2$$

$$\text{με } I = (1/2)mR^2 = 32 \cdot 10^{-3}\text{kgm}^2.$$

$$\text{β. } \frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = FR \rightarrow \frac{dL}{dt} = 0,96\text{kgm}^2/\text{s}^2$$

γ. Για $t_1=4\text{s}$ έχουμε $y_{cm} = \frac{1}{2}a_{cm}t_1^2 = 32\text{m}$ και $y_A = \frac{1}{2}a_A t_1^2 = 64\text{m}$. Άρα το μήκος Δl του νήματος που ξετυλίγεται είναι $\Delta l = y_{cm} + y_A \rightarrow \Delta l = 96\text{m}$. ⁽¹⁾

$$\text{δ. } W_F = Fy_A = 2,4\text{N} \cdot 64\text{m} \rightarrow W_F = 153,6\text{J}, \quad W_{mg} = mgy_{cm} \rightarrow W_{mg} = 128\text{J}$$

$$v_{cm} = a_{cm}t_1 = 16\text{m/s} \text{ και } \omega = \alpha_{\gamma\gamma}t_1 = 120\text{rad/s. Άρα } K = K_{\pi} + K_{\mu} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{cm}^2 \rightarrow K = 281,6\text{J} \quad (2)$$

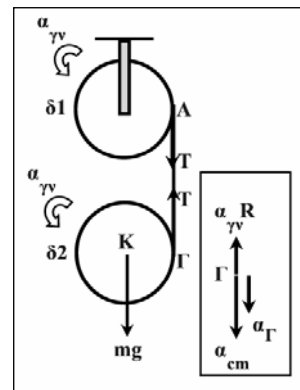
$$\text{ε. } P_F = Fv_A = Fa_A t_1 \rightarrow P_F = 76,8\text{J/s.}$$

στ. Μετά το κόψιμο του νήματος ο δίσκος δέχεται μόνο τη δύναμη του βάρους του και το κέντρο μάζας του πέφτει κατακόρυφα με επιτάχυνση g . Ταυτόχρονα ο δίσκος συνεχίζει να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, $\omega = \alpha_{\gamma\gamma}t_1 = 120\text{rad/s}$, αφού δεν υπάρχει πλέον η δύναμη F για να παράγει τη ροπή. Άρα: $v_1 = v_{cm} + g\Delta t = v_{cm} + g(t_2 - t_1) \rightarrow v_1 = 76\text{m/s}$.

¹ Με άλλο τρόπο, $\Delta l = R\theta = R \cdot \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\gamma}t^2 = 96\text{m}$

² Παρατηρήστε: $K = W_F + W_{mg} = 281,6\text{J}$

ΓΔ.8 Δύο κυλινδρικοί δίσκοι έχουν ίδια μάζα $m=2\text{kg}$ και ίδια ακτίνα $R=0,2\text{m}$ και ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα συμμετρίας τους και περιστροφής τους, $I=(1/2)mR^2$. Ο ένας δίσκος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό άξονα, όπως φαίνεται στο σχήμα, ενώ αβαρές λεπτό νήμα είναι τυλιγμένο γύρω και από τους δύο δίσκους. Αν αφήσουμε τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το δεύτερο δίσκο ελεύθερο αυτός πέφτει, ενώ ταυτόχρονα περιστρέφεται. Να υπολογιστούν:



α. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κάτω δίσκου, η τάση του νήματος, η γωνιακή επιτάχυνση του κάθε δίσκου.

β. Το μήκος του νήματος που ξετυλίχτηκε μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$.

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κάθε δίσκου αλλά και του συστήματος τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$.

δ. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος στο χρονικό διάστημα $[0-t_1]$.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

α. Για το δ_1 : $T \cdot R = I_1 \alpha_{\gamma v1}$ Για το δ_2 : $T \cdot R = I_2 \alpha_{\gamma v2}$ Άρα $\alpha_{\gamma v1} = \alpha_{\gamma v2} = \alpha_{\gamma v}$ (1).

Οι δύο δίσκοι περιστρέφονται υπό την επίδραση της ροπής της τάσης του νήματος και αφού έχουν τις ίδιες I έχουν και τις ίδιες γωνιακές επιταχύνσεις.

Ο δ_2 πέφτει με επιτάχυνση a_{cm} : $\Sigma F = m a_{cm} \rightarrow mg - T = m a_{cm}$ (2)

Και περιστρέφεται με $\alpha_{\gamma v}$: $T \cdot R = I \alpha_{\gamma v} \rightarrow TR = \frac{mR^2}{2} \alpha_{\gamma v} \rightarrow T = \frac{mR}{2} \alpha_{\gamma v}$ (3)

Τα σημεία Α και Γ είναι σημεία του ίδιου νήματος άρα έχουν τις ίδιες επιταχύνσεις, $a_A = a_\Gamma$ (4)

Ο δίσκος δ_1 δεν μεταφέρεται μόνο στρέφεται και έτσι, $a_A = \alpha_{\gamma v} \cdot R$ (5)

Ο δ_2 όμως πέφτει και περιστρέφεται συνεπώς: $a_\Gamma = a_{cm} - \alpha_{\gamma v} R$ (6)

Άρα, από (4)(5)(6) $\rightarrow a_{cm} = a_\Gamma + \alpha_{\gamma v} R \rightarrow a_{cm} = 2a_A$ (7) και $\alpha_{\gamma v} = \frac{a_{cm}}{2R}$ (8)

Από (3)(8) $\rightarrow T = \frac{m a_{cm}}{4}$ (9) και από (2)(9) $\rightarrow mg = \frac{5m a_{cm}}{4} \rightarrow a_{cm} = 8\text{m/s}^2$, Άρα $\alpha_{\gamma v} = 20\text{rad/s}^2$, $T = 4\text{N}$

β. Το νήμα ξετυλίγεται ταυτόχρονα και από τους δύο δίσκους και το μήκος που ξετυλίγεται είναι ίσο με την πτώση του κέντρου μάζας, Κ στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα:

$\Delta l = y_K \rightarrow \Delta l = \frac{1}{2} a_{cm} t_1^2 \rightarrow \Delta l = 16\text{m}$. (¹)

γ. Για το δίσκο δ_1 : $\frac{\Delta K_1}{\Delta t} = \Sigma \tau \omega = TR \omega = TR \alpha_{\gamma v} t_1 \rightarrow \frac{\Delta K_1}{\Delta t} = 32\text{J/s}$

Για το δίσκο δ_2 : $\frac{\Delta K_2}{\Delta t} = \frac{\Delta K_\mu}{\Delta t} + \frac{\Delta K_\pi}{\Delta t} = \Sigma F v_{cm} + \Sigma \tau \omega = (mg - T) v_{cm} + TR \omega = (mg - T) a_{cm} t_1 + TR \alpha_{\gamma v} t_1 \rightarrow$

$\frac{\Delta K_2}{\Delta t} = 288\text{J/s}$. Συνολικά: $\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta K_1}{\Delta t} + \frac{\Delta K_2}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 320\text{J/s}$ (²)

δ. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ισούται με το συνολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σύστημα των δύο δίσκων (ΘΜΚΕ).

$\Delta K = \Sigma W_{\xi} = W_{mg} = mgy_{cm} = mg \cdot \frac{1}{2} a_{cm} t_1^2 \rightarrow \Delta K = 320\text{J}$

¹ $\Delta l = 2R \cdot \theta = 2R \cdot \frac{1}{2} \alpha_{\gamma v} t_1^2 = 16\text{m}$

² $\Delta K / \Delta t = mg \cdot v_{cm} = 320\text{J/s}$

ΓΛ.9 Ο μικρός δίσκος της σύνθετης τροχαλίας έχει μάζα M_1 , ακτίνα $R_1=0,25\text{m}$ και ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_1=1/170\text{ kgm}^2$. Ο άλλος δίσκος αποτελείται από το ίδιο υλικό, ίδιας πυκνότητας, ρ , έχει το ίδιο πάχος, s , αλλά μεγαλύτερη ακτίνα R_2 και μάζα, M_2 . Τα δύο σώματα έχουν μάζες $m_1=0,4\text{kg}$, $m_2=0,2\text{kg}$ και ισορροπούν αν αφεθούν ελεύθερα, στο ίδιο ύψος $h=3,2\text{m}$ από το οριζόντιο έδαφος. Να υπολογιστούν:

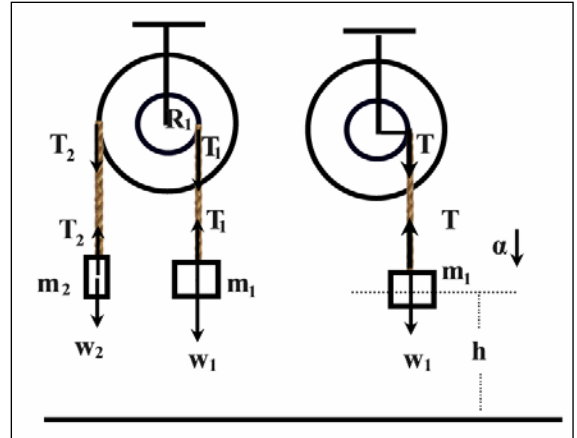
α. Η ακτίνα R_2 .

β. Η μάζα M_2 και η ροπή αδράνειας, I , του συστήματος των δύο δίσκων.

γ. Κόβουμε το νήμα που συγκρατεί το σώμα m_2 και η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς το σκοινί να ολισθαίνει στο λούκι της. Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος.

δ. Τη χρονική στιγμή που το σώμα m_2 φτάνει στο έδαφος να υπολογιστούν η ταχύτητα του σώματος m_1 και η κινητική ενέργεια της τροχαλίας.

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$, και για κάθε δίσκο $I_1=\frac{1}{2}M_1R_1^2$ $I_2=\frac{1}{2}M_2R_2^2$.



Λύση

α. Από τις συνθήκες ισορροπίας των σωμάτων m_1 , m_2 και της τροχαλίας:

$$m_1g - T_1 = 0 \rightarrow T_1 = m_1g \quad \text{και} \quad T_2 - m_2g = 0 \rightarrow T_2 = m_2g$$

$$\Sigma \tau = 0 \rightarrow T_1 R_1 - T_2 R_2 = 0 \rightarrow m_1 g R_1 - m_2 g R_2 = 0 \rightarrow \mathbf{R_2 = 0,5m}.$$

$$\mathbf{\beta.} \quad I_1 = \frac{M_1 R_1^2}{2} \rightarrow M_1 = 32/170 \text{ kg}$$

Η πυκνότητα ρ του κάθε δίσκου είναι το πηλίκο μάζας προς όγκο, M/V . Ο όγκος V του κάθε δίσκου (κύλινδρου) ισούται με το γινόμενο του πάχους s επί το εμβαδόν της βάσης του πR^2 .

$$\rho = \text{σταθ} \rightarrow \frac{M_1}{V_1} = \frac{M_2}{V_2} \rightarrow \frac{M_1}{s\pi R_1^2} = \frac{M_2}{s\pi R_2^2} \rightarrow M_2 = \frac{M_1 R_2^2}{R_1^2} \rightarrow \mathbf{M_2 = 128/170 \text{ kg}}$$

$$I_2 = \frac{M_2 R_2^2}{2} \rightarrow I_2 = 16/170 \text{ kgm}^2. \quad \text{Άρα } I = I_1 + I_2 \rightarrow \mathbf{I = 0,1 \text{ kgm}^2}.$$

$$\mathbf{\gamma.} \quad \Sigma F_1 = m_1 a \rightarrow m_1 g - T = m_1 a_{\gamma v} R_1 \rightarrow T = m_1 g - m_1 a_{\gamma v} R_1 \quad (1)$$

$$\Sigma \tau = I a_{\gamma v} \rightarrow T R_1 = I a_{\gamma v} \quad (2). \quad \text{Από (1)(2)} \rightarrow a_{\gamma v} = \frac{m_1 g R_1}{I + m_1 R_1^2} \rightarrow \mathbf{a_{\gamma v} = 8 \text{ rad/s}^2}$$

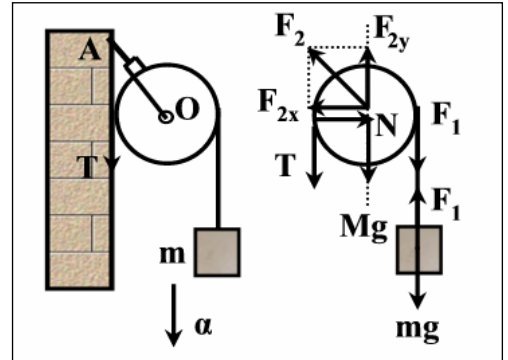
$$\mathbf{\delta.} \quad \text{Το } m_2 \text{ πέφτει ελεύθερα με } g \text{ και προσγειώνεται σε χρόνο } t: \quad h = \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow t = 0,8 \text{ s}$$

$$\text{Το } m_2 \text{ πέφτει με επιτάχυνση } a = a_{\gamma v} R_1 \rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2. \quad \text{Άρα θα έχει ταχύτητα: } v_2 = at \rightarrow \mathbf{v_2 = 1,6 \text{ m/s.}}$$

Η κινητική ενέργεια της τροχαλίας τη χρονική στιγμή $t=0,8\text{s}$ θα είναι:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I (a_{\gamma v} t)^2 \rightarrow \mathbf{K = 2,048 \text{ J}}$$

ΓΔ.10 Η τροχαλία του σχήματος έχει μάζα, $M=4\text{kg}$, ακτίνα $R=0,2\text{m}$ και κρέμεται από ακλόνητο σημείο, A με τη βοήθεια νήματος OA . Το νήμα που είναι τυλιγμένο στο αυλάκι της είναι αβαρές και μπορεί να ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει μέσα σ' αυτό. Στο ελεύθερο άκρο του νήματος δένουμε σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ και το αφήνουμε να πέσει κατακόρυφα, χωρίς αρχική ταχύτητα. Παρατηρούμε ότι σε χρόνο $\Delta t=4\text{s}$ το σώμα πέφτει κατά $y=16\text{m}$, ενώ η τροχαλία περιστρέφεται. Ταυτόχρονα τα χείλη από το αυλάκι της τροχαλίας που έχουν επαφή με τον κατακόρυφο τοίχο τριβονται με αυτόν και δημιουργούν τριβή ολίσθησης με συντελεστή $\mu=3/17$. Να υπολογιστούν:



α. Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.

β. Η δύναμη της τριβής T και τα μέτρα των τάσεων των νημάτων, F_1 , F_2 που κρατούν το σώμα m και την τροχαλία.

γ. Το έργο της τριβής στο χρονικό διάστημα $\Delta t=4\text{s}$.

δ. Οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας, του σώματος m και του συστήματος τη στιγμή που αυτό θα έχει πέσει κατά $y=16\text{m}$.

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας $I=MR^2/2$.

Λύση

α. Το σώμα πέφτει με επιτάχυνση, a : $y=\frac{1}{2}a\Delta t^2 \rightarrow a=2\text{m/s}^2$ και αποκτάει ταχύτητα $v=a\Delta t=8\text{m/s}$. Η τροχαλία στρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση, $\alpha_{\gamma\omega}=\alpha/R \rightarrow \alpha_{\gamma\omega}=10\text{rad/s}^2$.

β. Για το σώμα $\Sigma F=ma \rightarrow mg-F_1=ma \rightarrow F_1=16\text{N}$

Για την τροχαλία: $\Sigma \tau=I\alpha_{\gamma\omega} \rightarrow (F_1-T)R=\frac{MR^2}{2}\alpha_{\gamma\omega} \rightarrow T=12\text{N}$

Η τροχαλία δεν μεταφέρεται και το κέντρο μάζας της ισορροπεί υπό την επίδραση των δυνάμεων που φαίνονται στο σχήμα. Η N είναι η κάθετη αντίδραση του τοίχου, η F_1 η δύναμη του νήματος και F_2 η δύναμη που ασκεί το νήμα OA , η οποία αναλύεται σε F_{2x} και F_{2y} .

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F_{2x}-N=0 \rightarrow F_{2x}=68\text{N}$$

$$T=\mu N \rightarrow N=T/\mu=68\text{N}.$$

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_{2y}-(Mg+T+F_1)=0 \rightarrow F_{2y}=68\text{N}$$

$$F_2=\sqrt{F_{2x}^2+F_{2y}^2} \rightarrow F_2=68\sqrt{2}\text{N}$$

γ. Στο διάστημα $\Delta t=4\text{s}$ η τροχαλία στρέφεται κατά $\Delta\theta=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega}\Delta t^2 \rightarrow \Delta\theta=80\text{rad}$ και αποκτάει γωνιακή ταχύτητα $\omega=\alpha_{\gamma\omega}t=40\text{rad/s}$.

Το έργο της ροπής της τριβής θα είναι: $W_T=-TR\Delta\theta \rightarrow W_T=-192\text{J}$.

$$\delta. \frac{\Delta K_{\tau\phi}}{\Delta t}=\Sigma \tau\omega=I\alpha_{\gamma\omega}\omega=\frac{MR^2}{2}\alpha_{\gamma\omega}\omega \rightarrow \frac{\Delta K_{\tau\phi}}{\Delta t}=32\text{J/s}$$

$$\frac{\Delta K_{\sigma}}{\Delta t}=\Sigma Fv=ma v \rightarrow \frac{\Delta K_{\sigma}}{\Delta t}=32\text{J/s}$$

$$\text{Για το σύστημα: } \frac{\Delta K}{\Delta t}=\frac{\Delta K_{\tau\phi}}{\Delta t}+\frac{\Delta K_{\sigma}}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t}=64\text{J/s} \quad (1)$$

¹ $\Delta K/\Delta t=\Sigma F_{\epsilon\zeta}v=(mg-T)v=64\text{J/s}$

ΓΔ.11 Ομογενής ράβδος μάζας $m=3\text{kg}$ και μήκους $\lambda=2\text{m}$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της και είναι κάθετος σε αυτήν. Αρχικά είναι ακίνητη. Στο κάτω άκρο Α ασκούμε δύναμη μέτρου $F=10\text{N}$ της οποίας η διεύθυνση είναι συνεχώς κάθετη στη ράβδο. Η ράβδος με την επίδραση της F στρέφεται κατά γωνία $\theta=\pi/2\text{ rad}$ και αμέσως μετά η δύναμη καταργείται. Να υπολογιστούν:

α. Το συνολικό έργο της F .

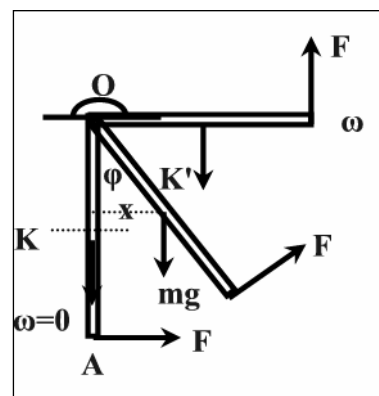
β. Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή που καταργείται η δύναμη.

γ. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου τη στιγμή που γίνεται οριζόντια, αλλά πριν καταργηθεί η F .

δ. Το ποσοστό του έργου της F που έγινε κινητική ενέργεια της ράβδου για τη στροφή $\theta=\pi/2\text{rad}$.

ε. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου όταν αυτή σχηματίζει γωνία $\varphi=30^\circ$ με την αρχική της θέση.

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$, $I_K=ml^2/12$.



Λύση

$$\alpha. I_O = I_K + m(l/2)^2 \rightarrow I_O = ml^2/3 \rightarrow I_O = 4\text{kgm}^2$$

$$W_F = \tau\theta = F \cdot l \cdot \frac{\pi}{2} = 10\pi \rightarrow W_F = 31,4\text{J}$$

β. Γράφουμε ΘΜΚΕ για τη γωνιακή μετατόπιση της ράβδου κατά $\pi/2\text{rad}$.

$$\Sigma W = K_r - K \rightarrow W_F + W_{mg} = K_r - K_a \quad (1)$$

$$W_F = 31,4\text{J}$$

$$W_{mg} = -mgl/2 \rightarrow W_{mg} = -30\text{J}$$

$$K_a = 0 \text{ και } K_r = \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

$$\text{Από (1)} \rightarrow \omega = \sqrt{0,7}\text{rad/s}$$

$$\gamma. \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma \tau \cdot \omega$$

$$\Sigma \tau = (Fl - mg\frac{l}{2}) \quad \omega = (20 - 30)\text{J/s} = -10\text{J/s} \quad \text{Άρα: } \frac{\Delta K}{\Delta t} = -\sqrt{70}\text{J/s}$$

δ. Η δύναμη F παράγει έργο $W_F=31,4\text{ J}$. Από αυτό το ποσό ένα μέρος γίνεται δυναμική ενέργεια βαρύτητας της ράβδου και το υπόλοιπο κινητική ενέργεια περιστροφής, K_π .

$$K_\pi = \frac{1}{2}I_O\omega^2 \rightarrow K_\pi = 1,4\text{J}$$

$$\pi\% = \frac{K_\pi}{W_F} 100\% \rightarrow \pi\% = 4,4\%$$

ε. Στη θέση $\varphi=30^\circ$ η συνισταμένη ροπή που δέχεται η ράβδος είναι:

$$\Sigma \tau_1 = F \cdot l - mgx = Fl - mg\frac{l}{2}\eta\mu 30^\circ \rightarrow \Sigma \tau = 5\text{Nm}$$

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau_1 \rightarrow \frac{dL}{dt} = 5\text{kgm}^2/\text{s}^2$$

ΓΔ.12 Η ομογενής ράβδος με μήκος $L=1\text{m}$ και μάζα $m=1\text{kg}$ είναι κατακόρυφη και μπορεί να στρέφεται γύρω από το άκρο της, Α. Αν την αφήσουμε ελεύθερη να περιστραφεί να βρείτε στη θέση εκείνη στην οποία η ράβδος σχηματίζει γωνία φ με τη κατακόρυφο:

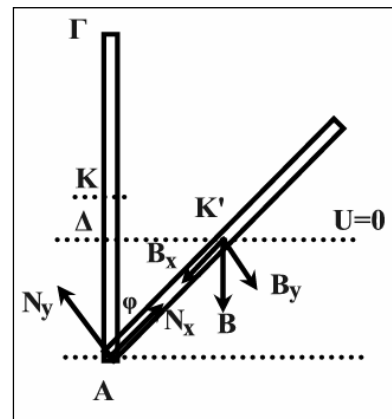
α. Τη γωνιακή επιτάχυνση.

β. Τη γωνιακή ταχύτητα.

γ. Το μέτρο της δύναμης N που ασκεί ο άξονας στη ράβδο στο σημείο, Α.

δ. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Δίνονται $I_K=mL^2/12$, $\eta\mu\varphi=0,6$, $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,8$, $g=10\text{m/s}^2$.



Λύση

α. Με τη βοήθεια του νόμου Steiner υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το Α και είναι κάθετος στη ράβδο:

$$I_A = I_K + m(L/2)^2 \rightarrow I_A = mL^2/3 = 1/3 \text{kgm}^2$$

Μετά γράφουμε το 2^ο νόμο για τη στροφική κίνηση στη θέση, που η ράβδος σχηματίζει γωνία φ .

$$\Sigma\tau_A = I_A \alpha_{\gamma\nu} \rightarrow B_y(AK') = I_A \alpha_{\gamma\nu} \rightarrow mg\eta\mu\varphi \frac{L}{2} = \frac{mL^2}{3} \alpha_{\gamma\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\nu} = 9 \text{rad/s}^2$$

β. Γράφουμε την ΑΔΜΕ για τη ράβδο με στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας βαρύτητας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το μέσο K' .

$$E_a = E_t \rightarrow U_a + K_a = U_t + K_t \rightarrow mg(K\Delta) + 0 = 0 + \frac{1}{2} I_A \omega^2 \quad (1)$$

$$\text{όπου } (K\Delta) = (KA) - (A\Delta) = \frac{L}{2} - \frac{L}{2} \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{L}{2} (1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) \quad (2)$$

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)}{L}} \rightarrow \omega = \sqrt{6} \text{rad/s}$$

γ. Ο άξονας ασκεί στη ράβδο στο σημείο Α δύναμη N την οποία αναλύουμε σε δύο ορθογώνιες συνιστώσες, μια N_x κατά μήκος της ράβδου και μια N_y κάθετη στη ράβδο.

Η N_x υπολογίζεται με τη βοήθεια της κεντρομόλου δύναμης, δηλαδή το 2^ο νόμο κατά μήκος της ακτίνας της τροχιάς.

$$\Sigma F = m\omega^2 \frac{L}{2} \rightarrow B_x - N_x = m\omega^2 \frac{L}{2} \rightarrow N_x = mg\sigma\upsilon\nu\varphi - m\omega^2 \frac{L}{2} \rightarrow N_x = 5\text{N}$$

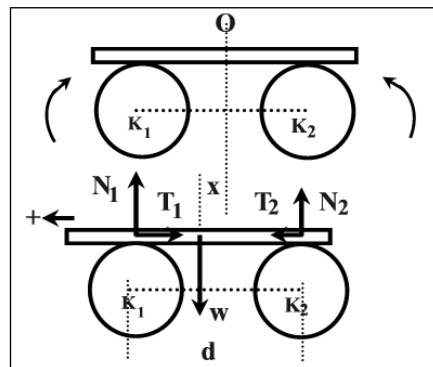
Η N_y υπολογίζεται από το 2^ο νόμο σε άξονα κάθετο στη ράβδο, στον οποίο έχει μεταφορική επιτάχυνση, $\alpha_K = \alpha_{\gamma\nu} \frac{L}{2} = 4,5 \text{m/s}^2$

$$\Sigma F_y = m\alpha_K \rightarrow B_y - N_y = m\alpha_K \rightarrow N_y = mg\eta\mu\varphi - m\alpha_K \rightarrow N_y = 1,5\text{N}$$

$$\text{Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης : } N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} \rightarrow N = 5,22\text{N}$$

$$\delta. \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma\tau\omega = I_A \alpha_{\gamma\nu} \omega \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 3\sqrt{6} \text{J/s}$$

ΓΔ.13 Οι δύο όμοιοι κύλινδροι που φαίνονται στο σχήμα μπορούν να περιστρέφονται γύρω από άξονες που διέρχονται από το κέντρο τους, βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και είναι παράλληλοι μεταξύ τους. Πάνω στους κυλίνδρους τοποθετούμε ισοπαχή και ομογενή σανίδα έτσι ώστε το κέντρο της να βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το μέσο της διακέντρου K_1K_2 των δύο κυλίνδρων. Βάζουμε τους τροχούς σε περιστροφή με τις φορές που φαίνονται στο σχήμα και μετατοπίζουμε οριζόντια και λίγο τη σανίδα από την αρχική της θέση.



α. Να δείξετε ότι κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς.

β. Να υπολογίσετε την περίοδο, T .

Δίνονται, $K_1K_2=d$, το βάρος της σανίδας, $w=mg$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στη σανίδα και τους κυλίνδρους, μ .

Λύση

α. Η σανίδα δέχεται το βάρος της w , τις δύο αντιδράσεις N_1, N_2 από τους κυλίνδρους και τις τριβές T_1, T_2 από αυτούς. Η φορά των T_1, T_2 καθορίζεται από τη φορά περιστροφής των κυλίνδρων και τη λογική ότι πρέπει να είναι ίδια με τη φορά που θέλει ο κάθε κύλινδρος να σπρώξει τη σανίδα. Οι δύο τριβές είναι: $T_1=\mu N_1$ και $T_2=\mu N_2$

Στον κατακόρυφο άξονα y η σανίδα ισορροπεί συνεπώς:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N_1+N_2-w=0 \rightarrow N_1+N_2=mg \rightarrow N_2=mg-N_1 \quad (1)$$

Προκαλούμε μια μικρή τυχαία οριζόντια απομάκρυνση της σανίδας από τη θέση ισορροπίας της κατά, x , προς τα αριστερά. Η ράβδος δεν περιστρέφεται και αυτό σημαίνει ότι:

$$\Sigma \tau_O=0 \rightarrow N_2\left(\frac{d}{2}+x\right)-N_1\left(\frac{d}{2}-x\right)=0 \rightarrow N_2\frac{d}{2}-N_1\frac{d}{2}+(N_2+N_1)x=0 \rightarrow (mg-N_1)\frac{d}{2}-N_1\frac{d}{2}+mgx=0 \rightarrow \dots \rightarrow$$

$$N_1=\frac{mg}{2}+\frac{mgx}{d} \quad (2)$$

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow N_2=\frac{mg}{2}-\frac{mgx}{d} \quad (3)$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκείται στη ράβδο στον οριζόντιο άξονα των x , είναι:

$$\Sigma F_x=T_2-T_1=\mu N_2-\mu N_1=\mu(N_2-N_1)=\mu\left(\frac{mg}{2}-\frac{mgx}{d}-\frac{mg}{2}-\frac{mgx}{d}\right)=\mu\left(-\frac{2mgx}{d}\right) \rightarrow \Sigma F_x=-\frac{2\mu mg}{d}x.$$

Άρα η συνισταμένη δύναμη είναι της μορφής $\Sigma F_x=-Dx$ με $D=\frac{2\mu mg}{d}$, οπότε παίζει το ρόλο της δύναμης επαναφοράς και αναγκάζει τη σανίδα να κάνει οριζόντια ταλάντωση με θέση ισορροπίας την αρχική θέση του μέσου της O . Η σταθερά επαναφοράς είναι η $D=\frac{2\mu mg}{d}$.

β. Η περίοδος της ταλάντωσης της σανίδας:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{2\mu mg}{d}}} \rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{d}{2\mu g}}$$

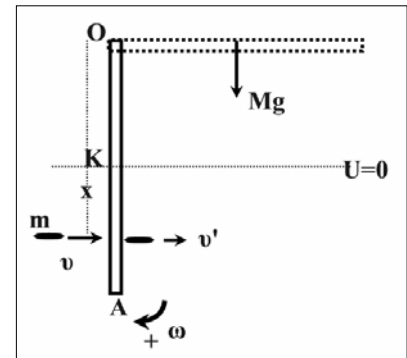
ΓΔ.14 Ομογενής ράβδος μήκους $d=10/3\text{m}$ και μάζας, M κρέμεται ελεύθερα από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το πάνω άκρο της O . Φέρνουμε τη ράβδο σε οριζόντια θέση και την αφήνουμε ελεύθερη να περιστραφεί χωρίς τριβές. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I_{(O)}=md^2/3$ και το $g=10\text{m/s}^2$ και το $M=1,8\text{kg}$.

α. Πόσο είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερη;

β. Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή που φτάνει στην κατακόρυφη θέση;

γ. Τη στιγμή που η ράβδος γίνεται κατακόρυφη, βλήμα μάζας $m=0,1\text{kg}$ κινούμενο οριζόντια και σε αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα $v=200\text{m/s}$ χτυπάει τη ράβδο και αφού τη διαπεράσει βγαίνει με οριζόντια ταχύτητα $v'=100\text{m/s}$. Σε πόση απόσταση από τον άξονα περιστροφής πρέπει να γίνει αυτή η κρούση ώστε μετά την κρούση η ράβδος να μείνει ακίνητη;

δ. Αν η κρούση διαρκεί $dt=0,02\text{s}$ πόσο είναι το μέτρο της μέσης ροπής που άσκησε το βλήμα στη ράβδο κατά τη διάρκεια της κρούσης;



Λύση

α. Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας είναι η γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\gamma}$. Από το 2^ο νόμο Newton: $\Sigma\tau=I_{(O)}a_{\gamma\gamma} \rightarrow Mg\frac{d}{2}=\frac{Md^2}{3}a_{\gamma\gamma} \rightarrow a_{\gamma\gamma}=4,5\text{rad/s}^2$

β. Για τη γωνιακή ταχύτητα ω , γράφουμε ΑΔΜΕ για τη ράβδο από την οριζόντια στην κατακόρυφη θέση με στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας βαρύτητας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το μέσον K της ράβδου στην κατακόρυφη θέση ($U=0$).

$$E_{\text{αρχ}}=E_{\text{τελ}} \rightarrow Mg\frac{d}{2}=\frac{I_{(O)}\omega^2}{2} \rightarrow \omega=\sqrt{\frac{3g}{d}} \rightarrow \omega=3\text{rad/s}$$

γ. Έστω x η απόσταση του σημείου κρούσης από τον άξονα περιστροφής της ράβδου (O). Το σύστημα βλήματος και ράβδου δεν δέχεται εξωτερικές ροπές τη στιγμή της κρούσης διότι η ροπή του βάρους τους ως προς τον άξονα (O) είναι μηδέν, ($\Sigma\tau_{\text{εξ}}=0$). Άρα η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή κατά την κρούση:

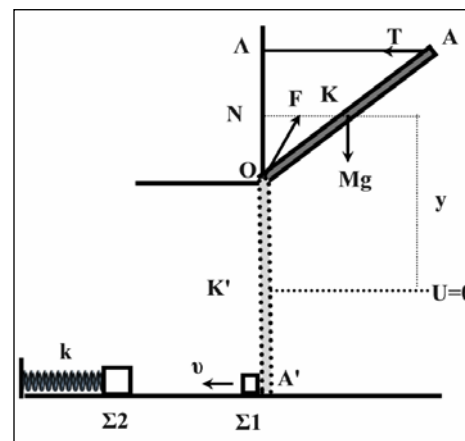
Θεωρώ θετική της φορά περιστροφής της ράβδου.

$$L_{\text{προ}}=L_{\text{μετα}} \rightarrow I_{(O)}\omega - m v x = 0 - m v' x \rightarrow x = \frac{M d^2 \omega}{3 m (v - v')} \rightarrow x = 2\text{m}$$

δ. Η ροπή που ασκεί το βλήμα στη ράβδο κατά την κρούση είναι αντίθετη με τη ροπή που δέχεται η ράβδος από το βλήμα σύμφωνα με το νόμο δράσης – αντίδρασης. Το μέτρο της ροπής αυτής θα ισούται με το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου κατά την κρούση.

$$\tau = \frac{|\Delta L_{\text{ραβ}}|}{\Delta t} = \frac{L_{\text{ραβ,μετα}} - L_{\text{ραβ,προ}}}{\Delta t} = \frac{0 - I_{(O)}\omega}{\Delta t} = -\frac{M d^2 \omega}{3 \Delta t} \rightarrow \tau = -10^3 \text{Nm}$$

ΓΛ.15 Η ράβδος, $OA=L$ του σχήματος έχει μάζα $M=3\text{kg}$, μήκος $L=2\text{m}$, βάρος $w=Mg$, είναι ομογενής και μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της O . Η ράβδος στηρίζεται με τη βοήθεια νήματος, $ΑΛ$, που είναι δεμένο στο άλλο άκρο της A έτσι ώστε $\angle AOA=\varphi=60^\circ$



α. Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης, T , που ασκείται από το νήμα στη ράβδο.

β. Κόβουμε το νήμα και η ράβδος αρχίζει να στρέφεται γύρω από τον άξονα. Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση τη στιγμή που η ράβδος ξεκινάει.

γ. Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν γίνεται κατακόρυφη.

δ. Τη χρονική στιγμή που γίνεται κατακόρυφη συγκρούεται με σώμα Σ_1 , μάζας $m_1=1\text{kg}$ που ήταν ακίνητο και μετά σταματάει ακαριαία. Να εξετάσετε αν η κρούση είναι ελαστική.

ε. Το σώμα, Σ_1 μετά την κρούση εκτοξεύεται οριζόντια, κινείται χωρίς τριβές και συγκρούεται πλαστικά με σώμα Σ_2 , μάζας $m_2=2\text{kg}$ που είναι προσαρμοσμένο σε ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$ το οποίο έχει το φυσικό του μήκος. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα με το ελατήριο κάνουν ΑΑΤ. Να βρεθεί το πλάτος τους, A . Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας, $I=ML^2/12$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

α. Η ράβδος ισορροπεί υπό την επίδραση του βάρους w , της τάσης T και της F από τον άξονα.

$$\Sigma \tau_O = 0 \rightarrow T(OA) - w(KN) = 0 \rightarrow TL \sin \varphi - Mg(OK) \eta \mu \varphi = 0 \rightarrow \dots \rightarrow T = Mg\sqrt{3}/8 \rightarrow T = 3,75\sqrt{3}\text{N}$$

β. $I_O = I_K + M(L/2)^2 = ML^2/3 \rightarrow I_O = 4\text{kgm}^2$ και $(KN) = (L/2)\eta \mu \varphi = \sqrt{3}/2$

$$\Sigma \tau_{(O)} = I_{(O)} \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow Mg(KN) = I_{(O)} \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow \alpha_{\gamma\gamma} = 3,75\sqrt{3}\text{rad/s}^2.$$

γ. Γράφουμε την ΑΔΜΕ από την αρχική θέση OA έως την κατακόρυφη θέση OA' με $U=0$ το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το K' .

$$U_{\text{αρχ}} + K_{\text{αρχ}} = U_{\text{τελ}} + K_{\text{τελ}} \rightarrow Mgy + 0 = 0 + \frac{1}{2}I_{(O)}\omega^2 \quad \text{με } y = (OK') + (ON) = L/2 + (L/2)\sin 60^\circ = 3L/4$$

$$\text{Άρα:} \quad Mg\frac{3L}{4} = \frac{1}{2}I_{(O)}\omega^2 \rightarrow \omega = 1,5\sqrt{10}\text{rad/s}$$

δ. Γράφουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής κατά την κρούση της ράβδου με το σώμα Σ_1 , αφού το σύστημα δεν δέχεται εξωτερικές ροπές. Μετά την κρούση το Σ_1 φεύγει με ταχύτητα, v .

$$L_{(O)\pi\text{ριν}} = L_{(O)\text{μετα}} \rightarrow I_{(O)}\omega = m_1 v L \rightarrow v = 3\sqrt{10}\text{m/s}.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι $K_{\pi\text{ριν}} = \frac{1}{2}I_{(O)}\omega^2 = 45\text{J}$

Μετά την κρούση είναι $K_{\text{μετα}} = \frac{1}{2}m_1 v^2 = 45\text{J}$. Άρα ισχύει $K_{\pi\text{ριν}} = K_{\text{μετα}}$ οπότε η κρούση είναι **ελαστική**.

ε. Τα σώματα Σ_1, Σ_2 συγκρούονται πλαστικά. Ισχύει η ΑΔΟ: $m_1 v = (m_1 + m_2)V \rightarrow V = \sqrt{10}\text{m/s}$.

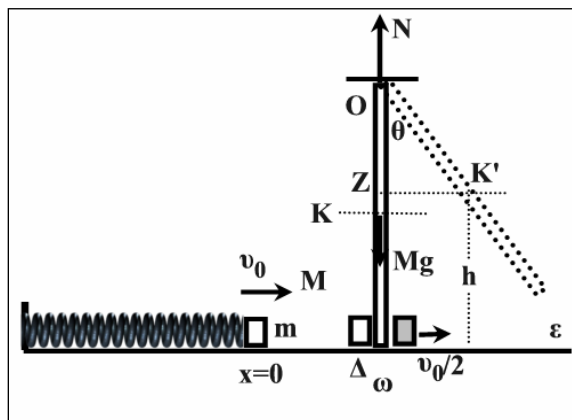
Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχει ταχύτητα, V , στη θέση ισορροπίας και αρχίζει οριζόντια απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $k=100\text{N/m}$. Γράφουμε τη ΑΔΕ για τον ταλαντωτή για να βρούμε το πλάτος, A .

$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow A = \sqrt{0,3}\text{m}$$

ΓΛ.16 Σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου και στερεωμένου ελατηρίου κάνει ΑΑΤ με μέγιστη κινητική ενέργεια $K_0=2\text{J}$ και πλάτος $A=0,2\text{m}$. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x=-0,2\text{m}$. Τη στιγμή t_1 που το σώμα m περνάει για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς την πλευρά που το ελατήριο επιμηκύνεται κόβεται το ελατήριο και το σώμα συνεχίζει μόνο του πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο.

α. Να γραφεί η εξίσωση απομάκρυνσης των ΑΑΤ του σώματος και να υπολογιστούν η χρονική στιγμή t_1 και η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που κόβεται το ελατήριο.

Το σώμα μετά συγκρούεται με το άκρο Δ , ράβδου μήκους $d=1\text{m}$, μάζας $M=2\text{kg}$ το ένα άκρο της οποίας



είναι στερεωμένο στο σημείο O , και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές. Μετά την κρούση το σώμα m συνεχίζει την κίνησή του στην ίδια κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου ίσου με το μισό αυτής που είχε πριν την κρούση. Η κρούση διαρκεί χρόνο $\Delta t=0,02\text{s}$. Να υπολογιστούν:

β. Η ροπή τ που άσκησε το σώμα στη ράβδο κατά την κρούση, αν η ροπή θεωρηθεί σταθερή.

γ. Η απώλεια μηχανικής ενέργειας του συστήματος, «σώμα – ράβδος» λόγω κρούσης.

δ. Το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο άξονας, O , στη ράβδο αμέσως μετά την κρούση.

ε. Το συνημίτονο της γωνίας θ που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφο τη στιγμή που σταματάει στιγμιαία. Δίνονται για τη ράβδο $I_K=Md^2/12$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

α. $E=K_0 \rightarrow \frac{1}{2}kA^2=K_0 \rightarrow k=100\text{N/m}$. $\omega=\sqrt{k/m} \rightarrow \omega=10\text{rad/s}$.

$x=A\eta\mu(\omega t+\phi_0) \xrightarrow{t=0, x=-A} \eta\mu\phi_0=-1 \rightarrow \phi_0=3\pi/2\text{rad}$. Άρα η εξίσωση απομάκρυνσης: $x=0,2\eta\mu(10t+3\pi/2)$ (SI)

Στη θέση $x=0$, $v=v_0=A\omega \rightarrow v_0=2\text{m/s}$. Η χρονική στιγμή είναι: $t=T/4=2\pi/4\omega=\pi/2\omega \rightarrow t=\pi/20\text{s}$.

β. Μετά την κρούση η ράβδος αποκτά γωνιακή ταχύτητα, ω και το σώμα ταχύτητα $v_0/2$. Γράφουμε αρχή διατήρησης της στροφορμής στην κρούση: $L_{\pi\rho}=L_{\mu\epsilon} \rightarrow mv_0d=I_{(O)}\omega+m(v_0/2)d$ (1)

όπου $I_{(O)}=I_K+M(d/2)^2=Md^2/3=2/3\text{kgm}^2$ (2). Από (1)(2) $\rightarrow \omega=1,5\text{rad/s}$

Η ροπή που δέχτηκε η ράβδος από το χτύπημα του σώματος m , ισούται με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου που θεωρείται σταθερή, σύμφωνα με τα δεδομένα.

$$\tau=\frac{\Delta L_p}{\Delta t}=\frac{L_{p,\mu\epsilon}-L_{p,\pi\rho}}{\Delta t}=\frac{I_{(O)}\omega-0}{\Delta t} \rightarrow \tau=50\text{Nm}.$$

γ. Η απώλεια ενέργειας λόγω κρούσης: $|\Delta E|=|E_{\mu\epsilon\alpha}-E_{\pi\rho\iota\nu}|=|\frac{1}{2}I_{(O)}\omega^2+\frac{1}{2}m(v_0/2)^2-\frac{1}{2}mv_0^2| \rightarrow |\Delta E|=0,75\text{J}$

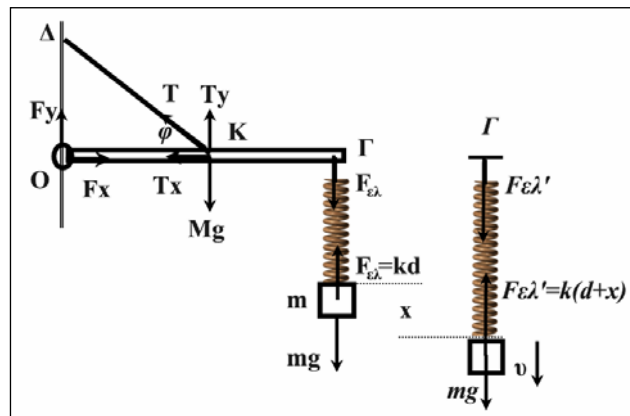
δ. Από την κεντρομόλο δύναμη: $\Sigma F_y=M\omega^2 \cdot \frac{d}{2} \rightarrow N-Mg=M\omega^2 \cdot \frac{d}{2} \rightarrow N=Mg+M\omega^2 \cdot \frac{d}{2} \rightarrow N=22,25\text{N}$

ε. Μετά την κρούση η ράβδος ξεκινάει με γωνιακή ταχύτητα $\omega=1,5\text{rad/s}$ να περιστρέφεται γύρω από το O . Το κέντρο μάζας της φτάνει μέχρι ύψος h πάνω το επίπεδο, ϵ και σταματάει στιγμιαία. Γράφουμε ΑΔΜΕ με $U=0$, στο επίπεδο, ϵ .

$$U_{\alpha\rho\chi}+K_{\alpha\rho\chi}=U_{\tau\epsilon\lambda}+K_{\tau\epsilon\lambda} \rightarrow Mg(d/2)+\frac{1}{2}I_{(O)}\omega^2=Mgh \rightarrow h=43/80=0,54\text{m}$$

$$(OZ)=(O\Delta)-(Z\Delta)=\delta-h=1-0,54 \rightarrow (OZ)=0,46\text{m}. \quad \sin\theta=\frac{(OZ)}{(OK')}=\frac{0,46}{0,5} \rightarrow \sin\theta=0,92$$

ΓΛ.17 Ομογενής ράβδος ΟΓ μήκους $\lambda=3\text{m}$ και μάζας $M=2\text{kg}$ ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια νήματος που είναι δεμένο στο κέντρο της Κ. Το νήμα σχηματίζει με τη ράβδο γωνία $\varphi=30^\circ$ ενώ το άκρο Ο συνδέεται στον τοίχο μέσω άρθρωσης. Στο άκρο Γ είναι δεμένο ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$ που στο άλλο του άκρο έχει δεθεί σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ και ισορροπεί. Δίνουμε στο σώμα m στη θέση ισορροπίας της αρχική ταχύτητα $v_0=2\text{m/s}$ με φορά προς τα κάτω οπότε το σύστημα της μάζας και του ελατηρίου αρχίζει να κάνει ΑΑΤ. Το όριο θραύσης του νήματος είναι $T_0=120\text{N}$. Να υπολογιστούν:



- Το μέτρο της τάσης του νήματος T , όταν το σύστημα μάζα – ελατήριο ισορροπεί.
- Η εξίσωση απομάκρυνσης των ταλαντώσεων της μάζας m , σε σχέση με το χρόνο, αν θεωρηθεί ως $t_0=0$ η χρονική στιγμή που ξεκίνησε η μάζα m με ταχύτητα $v_0=2\text{m/s}$ και θετική η φορά προς τα κάτω.
- Η χρονική στιγμή t που θα κοπεί το νήμα.
- Η ταχύτητα της μάζας m τη στιγμή που κόβεται το νήμα.
- Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής όλου του συστήματος τη στιγμή αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

α. Το σώμα m ισορροπεί: $\Sigma F_m=0 \rightarrow F_{ελ}-mg=0 \rightarrow F_{ελ}=mg=10\text{N}$.

Η ράβδος ισορροπεί: $\Sigma \tau_{(O)}=0 \rightarrow T_y \frac{\lambda}{2} - Mg \frac{\lambda}{2} - F_{ελ} \lambda = 0 \rightarrow T_y=40\text{N} \rightarrow T \eta \mu \varphi = 40\text{N} \rightarrow \mathbf{T=80\text{N}}$.

β. Το m κάνει ΑΑΤ με $\omega=\sqrt{k/m}=10\text{rad/s}$ και πλάτος, A : $v_0=A\omega \rightarrow A=0,2\text{m}$.

Για $t_0=0$, $x=0$ και $v=v_0>0$. Άρα $\varphi_0=0$ και η εξίσωση είναι: $\mathbf{x=0,2\eta\mu(10t)\text{ SI}}$.

γ. Το νήμα κόβεται τη στιγμή που η τάση θα πάρει την τιμή θραύσης, $T_0=120\text{N}$.

Όταν το σώμα m ισορροπεί το ελατήριο έχει επιμήκυνση, d : $kd-mg=0 \rightarrow d=0,1\text{m}$.

Όταν το σώμα ταλαντώνεται, το νήμα σπάει σε μια πρόσθετη επιμήκυνση, x , στην οποία η δύναμη του ελατηρίου έχει γίνει $F_{ελ}'=k(d+x)$ και η τάση του νήματος, $T=T_0=120\text{N}$.

$$\Sigma \tau_{(O)}=0 \rightarrow T_{0y} \frac{\lambda}{2} - Mg \frac{\lambda}{2} - F_{ελ}' \lambda = 0 \rightarrow F_{ελ}'=20\text{N}.$$

$$F_{ελ}'=k(d+x) \rightarrow 20=100(0,1+x) \rightarrow x=0,1\text{m}.$$

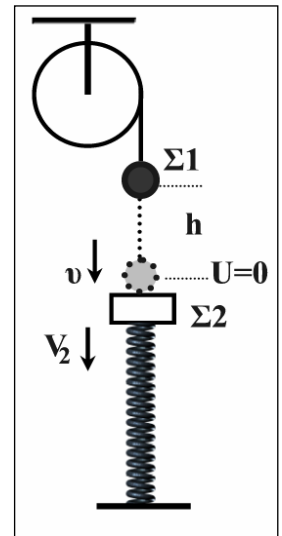
$$\text{Από } x=0,2\eta\mu(10t) \stackrel{x=0,1\text{m}}{\clubsuit} 0,1=0,2\eta\mu 10t \rightarrow \eta\mu(10t_1)=\eta\mu(\pi/6) \rightarrow \mathbf{t_1=\pi/60\text{s}}.$$

δ. Από την εξίσωση της ταχύτητας: $v=v_0\sigma\upsilon\nu(10t) \rightarrow 2\sigma\upsilon\nu(10\pi/60) \rightarrow \mathbf{v=\sqrt{3}\text{m/s}}$.

ε. Αφού κοπεί το νήμα η T μηδενίζεται. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ισούται με τη συνισταμένη των εξωτερικών ροπών, δηλαδή των ροπών των βαρών Mg και mg .

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau_{(O), \varepsilon_s} = Mg \frac{\lambda}{2} + mg \lambda \rightarrow \frac{dL}{dt} = \mathbf{60\text{Nm}}.$$

ΓΔ.18 Στη διάταξη του σχήματος έχουμε μια τροχαλία μάζας $M=6\text{kg}$, ακτίνας R , τυλιγμένη με νήμα στο άκρο του οποίου κρέμεται σώμα, Σ_1 , μάζας $m_1=2\text{kg}$. Από κάτω έχουμε ένα κατακόρυφο ελατήριο με σώμα, Σ_2 , μάζας $m_2=6\text{kg}$ που κάνει κατακόρυφες ταλαντώσεις με εξίσωση απομάκρυνσης $y=0,1\mu\omega t$, (S.I) όπου $\omega=10\sqrt{3}/3\text{rad/s}$. Αφήνουμε το σώμα Σ_1 να πέσει και όταν έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους $h=0,5\text{m}$ αυτό συγκρούεται ελαστικά και μετωπικά με το άλλο σώμα Σ_2 το οποίο εκείνη τη στιγμή βρίσκεται στη μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του και πάνω από αυτήν. Να υπολογιστούν:



α. Η ταχύτητα του σώματος Σ_1 μόλις πριν την κρούση.

β. Η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

γ. Το νέο πλάτος ταλάντωσης του σώματος Σ_2 .

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

Ως θετική φορά για την ταλάντωση να θεωρηθεί η κατακόρυφη προς τα πάνω.

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και για την τροχαλία $I=MR^2/2$.

Λύση

α. Γράφουμε ΑΔΜΕ για το σύστημα «τροχαλία–σώμα Σ_1 » για την πτώση του σώματος κατά h . Τότε το σώμα θα έχει ταχύτητα, v , και η τροχαλία γωνιακή ταχύτητα ω , όπου $\omega=v/R$. Η τροχαλία δεν μετατοπίζεται και η δυναμική της ενέργεια, $U_{\text{τροχ}}$, μένει σταθερή.

$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \rightarrow U_{\text{τροχ}} + m_1gh = U_{\text{τροχ}} + \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow v=2\text{m/s}.$$

β. Στην ελαστική κρούση διατηρούνται ορμή και κινητική ενέργεια του συστήματος. Πριν την κρούση το Σ_2 είναι ακίνητο αφού βρίσκεται στη μέγιστη θετική του απομάκρυνση. Μετά την κρούση το Σ_1 έχει ταχύτητα, V_1 και το Σ_2 , ταχύτητα μέτρου, V_2 .

$$m_1v = m_1V_1 + m_2V_2$$

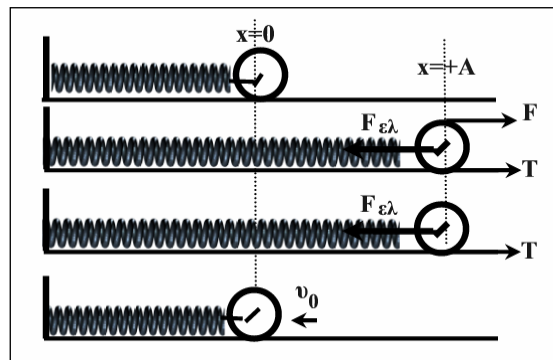
$$\frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 \dots \rightarrow V_2 = \frac{2m_1v}{m_1+m_2} \rightarrow V_2=1\text{m/s}$$

γ. Μετά την κρούση το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $y=0,1\text{m}$ (στο πλάτος της αρχικής του ΑΑΤ) και έχει ταχύτητα μέτρου $V_2=1\text{m/s}$ με φορά προς τα κάτω. Το σώμα κάνει ΑΑΤ με ίδια συχνότητα, ω , και νέο πλάτος A' . Η σταθερά επαναφοράς είναι $D=m_2\omega^2$. Γράφουμε την ΑΔΕ του ταλαντωτή μετά την κρούση:

$$K+U=E \rightarrow \frac{1}{2}m_2V_2^2 + \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}DA'^2 \rightarrow A'=0,2\text{m}$$

$$\delta. \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F_y \cdot V_2 = -Dy \cdot V_2 = -m_2\omega^2 \cdot y \cdot V_2 \rightarrow -(6\text{kg}) \cdot \left(\frac{10}{3}\text{rad}^2/\text{s}^2\right) \cdot (0,1\text{m}) \cdot (-1\text{m/s}) \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 2\text{J/s}$$

ΓΔ.19 Ο κύλινδρος που φαίνεται στο σχήμα έχει μάζα $m=2\text{kg}$, ακτίνα R και ροπή αδράνειας $I=mR^2/2$. Είναι συνδεδεμένος με κατάλληλη διάταξη με ελατήριο σταθεράς $k=300\text{N/m}$ που του επιτρέπει να κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο σημείο. Αρχικά το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Επιμηκύνουμε το ελατήριο κατά $A=+0,2\text{m}$, απομακρύνοντας τον κύλινδρο από τη θέση ισορροπίας του και τον κρατάμε ακίνητο στη θέση αυτή με τη βοήθεια μιας δύναμης F , όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ η δύναμη F καταργείται και ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει.



α. Να βρείτε το μέτρο της δύναμης F .

β. Να βρείτε την ταχύτητα του κμ του κυλίνδρου τη στιγμή που περνάει από τη θέση ισορροπίας.

γ. Να δείξετε ότι ο κύλινδρος θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και υπολογίστε την εξίσωση απομάκρυνσης.

δ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής στροφορμής της στιγμή που περνάει από τη θέση ισορροπίας.

ε. Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας στη θέση, $x_1=0,1\text{m}$ από τη θέση ισορροπίας και το μέτρο του ρυθμού μεταβολής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου στη θέση αυτή.

Λύση

α. Από συνθήκες ισορροπίας: $\Sigma F_x=0 \rightarrow F+T-F_{ελ}=0 \rightarrow F_{ελ}=F+T$ (1)

$$\Sigma \tau_k=0 \rightarrow FR-TR=0 \rightarrow F=T \quad \clubsuit F_{ελ}=2F \rightarrow kA=2F \rightarrow F=30\text{N}$$

β. Ισχύει η ΑΔΜΕ για το σύστημα κύλινδρος – ελατήριο:

$$E_{αρχ}=E_{τελ} \rightarrow \frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv_{0cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \quad \clubsuit \omega=v_0/R \quad v_{0cm}=A\sqrt{2k/3m} \rightarrow v_{0cm}=2\text{m/s}.$$

γ. Για μια τυχαία απομάκρυνση, x : $\Sigma \tau_k=I\alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow TR=\frac{mR^2}{2}\frac{a_{cm}}{R} \rightarrow T=\frac{ma_{cm}}{2}$ (2)

$$\Sigma F=ma_{cm} \quad \clubsuit F_{ελ}-T=2T \rightarrow F_{ελ}=3T \rightarrow -kx=3T \rightarrow T=-kx/3$$
 (3)

$$\text{Οπότε: } \Sigma F=F_{ελ}-T=3T-T=2T \rightarrow \Sigma F=2(-kx/3) \rightarrow \Sigma F=-2kx/3$$
 (4)

Άρα, κάνει ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς $D=2k/3=200\text{N/m}$ και $\omega=\sqrt{D/m}=10\text{rad/s}$. Για $t_0=0$, $x=+A$ άρα $\phi_0=\pi/2\text{rad}$, οπότε η εξίσωση απομάκρυνσης είναι: $x=0,2\eta\mu(10t+\pi/2)$ (SI)

$$\delta. \quad \frac{\Delta L}{\Delta t}=\Sigma \tau=T\cdot R=\frac{kx}{3}\cdot R \quad \clubsuit \frac{\Delta L}{\Delta t}=0$$

ε. Το (κμ) του κυλίνδρου κάνει ΑΑΤ, οπότε γράφω της ΑΔΕ του ταλαντωτή σε απομάκρυνση x_1 και ταχύτητα v_{cm} : $E=K+U \rightarrow \frac{1}{2}Dx_1^2=\frac{1}{2}mv_{cm}^2+\frac{1}{2}Dx_1^2 \rightarrow |v_{cm}|=\sqrt{3}\text{m/s}$ (1)

Ο κύλινδρος όμως κάνει μεταφορική και περιστροφική κίνηση:

$$|\frac{\Delta K}{\Delta t}|=|\Sigma Fv_{cm}|+|\Sigma \tau\omega|=(F_{ελ}-T)v_{cm}+TR\omega=(F_{ελ}-T)v_{cm}+Tv_{cm}=F_{ελ}v_{cm}=kx_1v_{cm} \rightarrow |\frac{\Delta K}{\Delta t}|=30\sqrt{3}\text{J/s}$$

¹ Ισοδύναμη σχέση με τη ΑΔΕ του ταλαντωτή, δηλ. του κέντρου μάζας, είναι η ΑΔΜΕ του συστήματος, κύλινδρος – ελατήριο, δηλαδή:

$$E_{αρχ}=E_{τελ} \rightarrow \frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}mv_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow |v_{cm}|=\sqrt{3}\text{m/s}$$

ΓΔ.20 Τροχαλία μάζας $M=2\text{kg}$ και ακτίνας R , είναι στερεωμένη, όπως φαίνεται στο σχήμα και μπορεί να στρέφεται γύρω από τον άξονά της. Από την τροχαλία διέρχεται νήμα στο ένα άκρο του οποίου δένεται νήμα στο ένα άκρο του οποίου δένεται σώμα μάζας $m=4\text{kg}$, ενώ το άλλο άκρο δένεται στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=80\text{N/m}$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Ανοψώνουμε το σώμα ως το σημείο Α, έτσι ώστε το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος, ενώ το νήμα είναι τεντωμένο. Αφήνουμε το σώμα ελεύθερο.

α. Πόση είναι η επιτάχυνση του σώματος όταν η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $x_1=0,2\text{m}$;

β. Πόση είναι η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου;

γ. Πόση πρέπει να είναι η κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος μέχρι το σώμα να αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα.

δ. Πόση είναι η μέγιστη ταχύτητα.

ε. Πόσο είναι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος «τροχαλία – σώμα», όταν η ταχύτητα του σώματος είναι $v=2\text{m/s}$;

στ. Εξετάστε αν το σώμα μάζας m κάνει ΑΑΤ.

Δίνεται $I=MR^2/2$, $g=10\text{m/s}^2$. Το νήμα δεν ολισθαίνει μέσα στο λούκι της τροχαλίας.

Λύση

α. Για τυχαία επιμήκυνση $x=x_1$, ισχύουν:

Για το σώμα: $\Sigma F=ma \rightarrow mg-F_1=ma$ (1)

Για το ελατήριο $F_2=F_{ελ}=kx_1$ (2)

Για τροχαλία: $\Sigma \tau=I\alpha_{\gamma\omega} \rightarrow F_1R-F_2R=\frac{MR^2}{2}\cdot\alpha$ (3) $\clubsuit F_1-kx_1=\frac{M\alpha}{2}$

$$(1)(3) \rightarrow mg-kx_1=(m+M/2)\alpha \rightarrow \alpha=\frac{mg-kx_1}{(m+M/2)} \quad (4) \rightarrow \alpha=4,8\text{m/s}^2$$

β. ΑΔΜΕ για το σύστημα «ελατήριο – τροχαλία – σώμα» από τη θέση Α, όπου το σώμα είναι ακίνητο και το ελατήριο στο φυσικό μήκος ως τη θέση Δ, όπου το σώμα σταματάει, το ελατήριο έχει μέγιστη επιμήκυνση x_m . Θεωρώ ότι $U_{βαρ}=0$ στο σημείο, Δ.

$$E_A=E_\Delta \rightarrow U_{\text{τροχ}}+mgx_m=U_{\text{τροχ}}+\frac{1}{2}kx_m^2 \rightarrow x_m=2mg/k \rightarrow x_m=1\text{m}$$

γ. Η δύναμη που δέχεται το σώμα είναι $\Sigma F=mg-kx=ma$. Για να αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα v_0 πρέπει να μηδενιστεί η επιτάχυνση, α και αυτό συμβαίνει όταν:

$$\Sigma F=0 \rightarrow mg-kx_0=0 \rightarrow x_0=mg/k=0,5\text{m}.$$

δ. ΑΔΜΕ για το ίδιο σύστημα από το Α έως το Γ όπου $v=v_0$ (μέγιστη), και $U_{βαρ}=0$ στο σημείο, Δ.

$$E_A=E_\Gamma \rightarrow U_{\text{τροχ}}+mgx_m=U_{\text{τροχ}}+mg(x_m-x_0)+\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \quad \clubsuit \quad v_0=2\text{m/s}.$$

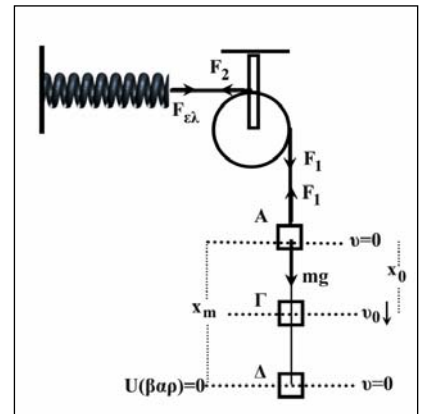
ε. Όταν όμως $v=v_0=2\text{m/s}$, τότε $\Sigma F=0 \rightarrow mg-kx_0=0$ (βλέπε ερώτηση γ). Άρα:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t}=\frac{\Delta K_m}{\Delta t}+\frac{\Delta K_{\text{τροχ}}}{\Delta t}=\Sigma F \cdot v+\Sigma \tau \cdot \omega=(mg-F_1)v+(F_1-F_2)R\omega=(mg-F_2)v=(mg-kx_0)v \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t}=0$$

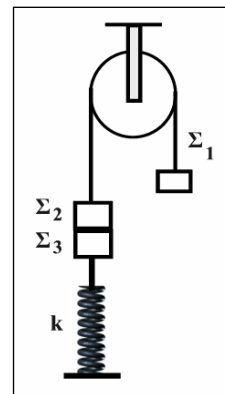
στ. Στη θέση ισορροπίας Δ, η απομάκρυνση είναι $y=0$ και η επιμήκυνση του ελατηρίου, $x_0=0,5\text{m}$. Σε τυχαία θέση η απομάκρυνση είναι y και η επιμήκυνση $x=y+x_0$, οπότε από την (4) η α είναι:

$$(4) \rightarrow \alpha=\frac{mg-kx}{(m+M/2)}=\frac{mg-k(x_0+y)}{(m+M/2)} \rightarrow \alpha=-16y.$$

Άρα $\Sigma F=ma \rightarrow \Sigma F=4(-16y) \rightarrow \Sigma F=-64y$. Άρα κάνει ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς **D=64N/m**.



ΓΛ.21 Τροχαλία μάζας $M=6\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,25\text{m}$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Γύρω από την τροχαλία υπάρχει αβαρές νήμα. Στα άκρα του νήματος υπάρχουν σε κατακόρυφη θέση τα σώματα Σ_1, Σ_2 με μάζες $m_1=4\text{kg}$ και $m_2=1\text{kg}$ αντίστοιχα. Το σώμα Σ_2 είναι κολλημένο με σώμα Σ_3 μάζας $m_3=1\text{kg}$, το οποίο συγκρατείται από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί όπως στο σχήμα. Κάποια χρονική στιγμή την οποία θεωρούμε ως χρονική στιγμή $t=0$ τα σώματα Σ_2 και Σ_3 αποκολλώνται και το Σ_3 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κατά τη διεύθυνση της κατακόρυφης. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$. Να υπολογιστούν:



- α.** Η εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος Σ_3 σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα επάνω.
β. Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας μετά την αποκόλληση των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 .
γ. Η στροφορμή του συστήματος τροχαλία – σώματα τη χρονική στιγμή $t=0,1\text{s}$.
δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή $t=0,1\text{s}$.

Λύση

α. Τα σώματα και η τροχαλία αρχικά ισορροπούν με το ελατήριο σε επιμήκυνση κατά x από το φυσικό του μήκος. Η δύναμη επαφής των Σ_2, Σ_3 είναι F . Από τις συνθήκες ισορροπίας έχουμε:

$$T_2 = T_1$$

$$T_1 - m_1 g = 0 \rightarrow T_1 = 40\text{N}.$$

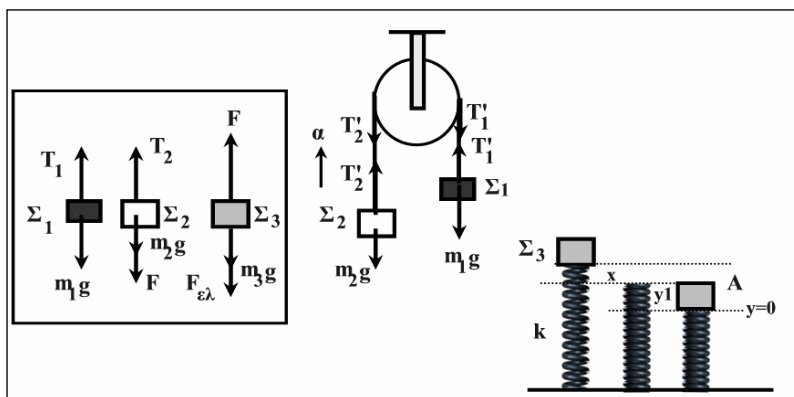
$$T_2 - F - m_2 g = 0 \rightarrow F = 30\text{N}$$

$$F - F_{\text{ελ}} - m_3 g = 0 \rightarrow F_{\text{ελ}} = 20\text{N}$$

$$F_{\text{ελ}} - kx \rightarrow x = 0,2\text{m}$$

Τη στιγμή $t_0=0$ που τα σώματα αποχωρίζονται το Σ_3 έχει απομάκρυνση $y_1 + x = A$ από τη θέση ισορροπίας, $y=0$. Από τη συνθήκη ισορροπίας: $\Sigma F_3 = 0 \rightarrow m_3 g - ky_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0,1\text{m}$.

Το Σ_3 αρχίζει τις ΑΑΤ με πλάτος $A = x + y_1 = 0,3\text{m}$, $\phi_0 = \pi/2\text{rad}$ και $\omega = \sqrt{k/m_3} = 10\text{rad/s}$. Άρα η εξίσωση είναι: **$y = 0,3\eta\mu(10t + \pi/2)$ (SI)**



β. Η τροχαλία τώρα στρέφεται με επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\gamma}$ ενώ τα Σ_1 και Σ_2 κινούνται με επιτάχυνση a . Οι τάσεις των νημάτων είναι T_1' και T_2' .

$$m_1 g - T_1' = m_1 a \quad (1)$$

$$\text{Από (1)(2)(3)} \rightarrow \alpha_{\gamma\gamma} = 15\text{m/s}^2 \text{ και } \alpha_{\gamma\gamma} = a/R \rightarrow \alpha_{\gamma\gamma} = 15\text{rad/s}$$

$$T_2' - m_2 g = m_2 a \quad (2)$$

$$T_1' R - T_2' R = I \alpha_{\gamma\gamma} = \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{a}{R} \rightarrow T_1' - T_2' = \frac{Ma}{2} \quad (3)$$

γ. Τη χρονική στιγμή $t=0,1\text{s}$ έχουμε: $\omega = \alpha_{\gamma\gamma} t = 1,5\text{rad/s}$ και $v = \omega R = 0,375\text{m/s}$.

Η στροφορμή του συστήματος τροχαλίας και σωμάτων Σ_1, Σ_2 είναι:

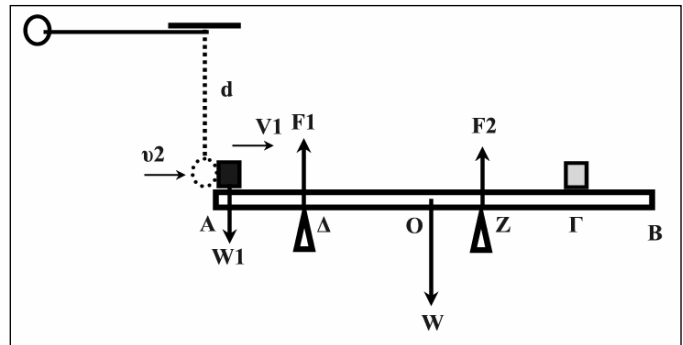
$$L = I_{\text{τρ}} \omega + m_1 v R + m_2 v R \rightarrow L = 0,75\text{kgm}^2/\text{s}$$

$$\delta. \quad \frac{\Delta K_{\text{τρ}}}{\Delta t} = \Sigma \tau \cdot \omega = I_{\text{τρ}} \alpha_{\gamma\gamma} \omega \rightarrow \frac{\Delta K_{\text{τρ}}}{\Delta t} = 4,21\text{J/s}$$

ΓΔ.22 Στη διάταξη του σχήματος η ομογενής και ισοπαχής σανίδα AB, μήκους $\lambda=2\text{m}$ και βάρους $w=50\text{N}$ ισορροπεί πάνω στα δύο στηρίγματα Δ και Ζ τα οποία απέχουν από το μέσον της Ο αποστάσεις $ΟΔ=0,6\text{m}$ και $ΟΖ=0,2\text{m}$. Η σανίδα φέρει στο άκρο της Α σώμα, Σ_1 , βάρους $w_1=20\text{N}$.

α. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που ασκούν τα στηρίγματα στη σανίδα.

β. Σφαίρα, Σ_2 , μάζας $m_2=3\text{kg}$ είναι δεμένη με νήμα μήκους $d=0,2\text{m}$ κρέμεται από ακλόνητο σημείο και ισορροπεί στην κατακόρυφη θέση. Εκτρέπουμε το νήμα από τη θέση ισορροπίας του κατά 90° και αφήνουμε τη σφαίρα ελεύθερη. Αυτή όταν φτάνει στο κατώτερο σημείο της τροχιάς της συγκρούεται μετωπικά ελαστικά με το σώμα Σ_1 . Πόση είναι η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση;



γ. Μετά την κρούση το σώμα Σ_1 ολισθαίνει πάνω στη σανίδα και σταματάει σε σημείο Γ αυτής, στο οποίο η σανίδα είναι έτοιμη να ανατραπεί περιστρεφόμενη γύρω από το στήριγμα Ζ. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Γ από το άκρο Β.

δ. Να υπολογιστεί ο συντελεστής τριβής, μ , μεταξύ σώματος Σ_1 και σανίδας. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

α. Η ράβδος ισορροπεί με την επίδραση των δυνάμεων w , w_1 , F_1 , F_2 .

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_1+F_2-w-w_1=0 \rightarrow F_1+F_2=70\text{N} \quad (1)$$

$$\Sigma \tau_\Delta=0 \rightarrow w(O\Delta)-F_2(\Delta Z)-w_1(A\Delta)=0 \rightarrow F_2=27,5\text{N} \quad (2)$$

$$\text{Από (1) (2)} \rightarrow F_1=42,5\text{N}$$

$$\text{β. ΑΔΜΕ για τη σφαίρα: } m_2gd=\frac{1}{2}m_2v_2^2 \rightarrow v_2=\sqrt{2gd} \rightarrow v_2=2\text{m/s}$$

Η κρούση των Σ_2 , Σ_1 είναι μετωπική ελαστική. Ισχύουν οι αρχές διατήρησης ορμής και κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων:

$$m_2v_2=m_2V_2+m_1V_1 \quad (3) \quad m_2(v_2-V_2)=m_1V_1 \quad v_2+V_2=V_1 \rightarrow V_2=V_1-v_2 \quad (5)$$

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_2V_2^2+\frac{1}{2}m_1V_1^2 \quad (4) \quad m_2(v_2-V_2)(v_2+V_2)=m_2V_1^2$$

$$\text{Από (3)(5)} \rightarrow V_1=\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2 \rightarrow V_1=2,4\text{m/s}$$

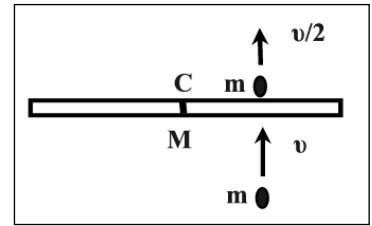
γ. Το σώμα Σ_1 διανύει την απόσταση ΑΓ και σταματάει στο και σε απόσταση ΓΒ=x από το άλλο άκρο, Β. Όταν φτάνει στο Γ η σανίδα είναι έτοιμη να εγκαταλείψει την επαφή της με το στήριγμα Δ και να αρχίσει να περιστρέφεται γύρω από το Ζ. Συνεπώς $F_1=0$.

$$\Sigma \tau_Z=0 \rightarrow w_1(Z\Gamma)-w(OZ)=0 \rightarrow w_1(OB-B\Gamma)-w(OZ) \rightarrow (B\Gamma)=x=0,3\text{m}.$$

δ. Κατά την ολίσθηση από το Α ως το Γ ισχύει το ΘΜΚΕ:

$$\Delta K=W_T \rightarrow 0-\frac{1}{2}m_1V_1^2=-\mu m_1g(A\Gamma) \rightarrow \mu=\frac{v_2^2}{2g(A\Gamma)} \rightarrow \mu=0,17$$

ΓΔ.23 Πρισματική ομογενής ράβδος μήκους $\lambda=1\text{m}$ και μάζας $M=1\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Βλήμα μάζας $m=0,1\text{kg}$ κινείται παράλληλα με το επίπεδο με ταχύτητα $v=100\text{m/s}$ και σε διεύθυνση κάθετη στο μήκος της ράβδου. Το βλήμα συγκρούεται κάθετα στη ράβδο σε απόσταση $x=1/4\text{m}$ από το κέντρο της και βγαίνει σε χρόνο $dt=1/1200\text{s}$ με ταχύτητα $v'=v/2$ στην ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα εισόδου. Μετά την κρούση η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας της αλλά και να μεταφέρεται χωρίς τριβές. Να βρεθούν.



α. Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά την κρούση.

β. Η κινητική ενέργεια της ράβδου μετά την κρούση.

γ. Το μέτρο της ροπής που δέχτηκε η ράβδος ως προς το κέντρο μάζας της λόγω κρούσης στο χρονικό διάστημα dt .

δ. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα λόγω κρούσης. **ε.** Η μετατόπιση του κέντρου μάζας C σε χρόνο $\Delta t=10\text{s}$.

στ. Ο αριθμός των περιστροφών της ράβδου στον ίδιο χρόνο 10s . Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτήν $I=ML^2/12$.

Λύση

α. Το βλήμα εισέρχεται με ταχύτητα, v και βγαίνει με v' ενώ η ράβδος αποκτά αμέσως μετά την κρούση μεταφορική ταχύτητα, V και γωνιακή ταχύτητα, ω . Στο απομονωμένο σύστημα «ράβδου – βλήματος» ισχύουν ταυτόχρονα η αρχή διατήρησης στροφορμής και η αρχή διατήρησης της ορμής.

ΑΔ στροφορμής: $L_{\text{αρχ}}=L_{\text{τελ}} \rightarrow m v x = m v' x + I \omega \rightarrow \omega = 15 \text{ rad/s}$.

β. ΑΔ ορμής: $p_{\text{αρχ}}=p_{\text{τελ}} \rightarrow m v = m v' + M V \rightarrow V = 5 \text{ m/s}$.

$K_{\text{ραβδου}} = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M V^2 \rightarrow K_{\text{ραβδου}} = 21,875 \text{ J}$

γ. Η ροπή που δέχεται η ράβδος από το χτύπημα του βλήματος ισούται με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου.

$$\tau_{\text{ραβ}} = \frac{dL_{\text{ραβ}}}{dt} = \frac{I\omega - 0}{dt} \rightarrow \tau_{\text{ραβ}} = 1500 \text{ Nm}$$

δ. $K_{\text{προ}} = \frac{1}{2} m v^2 = 500 \text{ J}$

$K_{\text{μετα}} = K_{\text{ραβδου}} + K_{\text{βλήματος}} = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v'^2 = 21,875 \text{ J} + 125 \text{ J} \rightarrow K_{\text{μετα}} = 146,875 \text{ J}$

Η θερμότητα λόγω κρούσης είναι η απόλυτη τιμή της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος πριν και μετά την κρούση:

$$|\Delta K| = |K_{\text{μετα}} - K_{\text{προ}}| = 353,125 \text{ J}$$

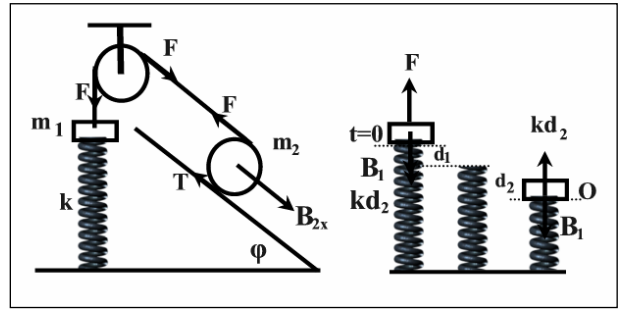
$$\frac{\Delta K}{K_{\text{προ}}} 100\% = \frac{353,125}{500} 100\% \rightarrow \frac{\Delta K}{K_{\text{προ}}} 100\% = 70,625\%$$

ε. Το κέντρο μάζας μετά την κρούση έχει ταχύτητα, V . Άρα: $\Delta x = V \Delta t = 5 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ s} \rightarrow \Delta x = 50 \text{ m}$

στ. Μετά την κρούση η ράβδος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα, ω και σε χρόνο $\Delta t=10\text{s}$ διαγράφει γωνία: $\Delta \theta = \omega \cdot \Delta t = 15 \text{ rad/s} \cdot 10 \text{ s} \rightarrow \Delta \theta = 150 \text{ rad}$

Άρα το πλήθος των περιστροφών είναι: $N = \frac{\Delta \theta}{2\pi} = \frac{150}{2\pi} \rightarrow N = 75/\pi$ στροφές

ΓΔ.24 Σώμα μάζας $m_1=1\text{kg}$ ισορροπεί δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$ το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο οριζόντιο έδαφος. Ομογενής κύλινδρος μάζας $m_2=8\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,2\text{m}$ βρίσκεται τοποθετημένος πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$ και συνδέεται με αβαρές νήμα στο πάνω άκρο του Α, μέσω αβαρούς τροχαλίας, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί.



α. Να υπολογιστεί η τάση F του νήματος και η επιμήκυνση του ελατηρίου.

Τη χρονική $t=0$ κόβεται το νήμα οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, ενώ το σώμα m_1 κάνει ΑΑΤ. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

γ. Αν για την ΑΑΤ θεωρήσουμε ως θετική τη φορά προς τα κάτω να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο.

δ. Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t που το σώμα m_1 περνάει για δεύτερη φορά από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου.

ε. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του κυλίνδρου την ίδια χρονική στιγμή.

Δίνονται για το κύλινδρο η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του $I=m_2R^2/2$ και το $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

α. Ο κύλινδρος ισορροπεί : $\Sigma\tau_2=0 \rightarrow FR-TR=0=F=T$

$$\Sigma F_{2x}=0 \rightarrow m_2 g \sin \varphi - F - T = 0 \rightarrow F = 20\text{N}$$

Το m_1 ισορροπεί με το ελατήριο να έχει αρχική επιμήκυνση d_1 . Η δύναμη του ελατηρίου είναι, $F_{ελ}=kd_1$
 $\Sigma F_1=0 \rightarrow F - m_1 g - F_{ελ}=0 \rightarrow F - m_1 g - kd_1 \rightarrow d_1 = 0,1\text{m}$.

β. Ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς ολίσθηση: $\Sigma F_x = ma_{cm} \rightarrow m_2 g \sin \varphi - T = m_2 a_{cm}$ (1)

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow TR = I \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow TR = \frac{m_2 R^2}{2} \cdot \frac{a_{cm}}{R} \rightarrow T = \frac{m_2 a_{cm}}{2}$$
 (2). Από (1)(2) $\rightarrow T = 40/3\text{N}$ και $a_{cm} = 10/3\text{m/s}^2$.

γ. Τη στιγμή $t_0=0$ το ελατήριο έχει επιμήκυνση $d_1=0,1\text{m}$ από το φυσικό του μήκος. Στη θέση ισορροπίας (Ο), η συσπείρωση του ελατηρίου είναι d_2 : $m_2 g - kd_2=0 \rightarrow d_2=0,1\text{m}$.

Άρα το πλάτος είναι $A=d_1+d_2 \rightarrow A=0,2\text{m}$.

$x=A \sin(\omega t + \varphi_0)$ με $\omega = \sqrt{k/m_1} = 10\text{rad/s}$ και για $t_0=0$, $x=-A$. Άρα $-A=A \sin \varphi_0 \rightarrow \sin \varphi_0 = -1 = \varphi_0 = 3\pi/2\text{rad}$.

Άρα: $x=0,2 \sin(10t+3\pi/2)$ (SI).

δ. Η θέση του φυσικού μήκους είναι η $x=-d_2=-0,1\text{m}$.

$-0,1=0,2 \sin(10t+3\pi/2) \rightarrow \sin(10t+3\pi/2) = \sin(-\pi/6) \rightarrow t_1=\pi/30\text{s}$ και $t_2=5\pi/30\text{s}$. Άρα $t=3\pi/20\text{s}$ για 2^η φορά.

Άρα η μετατόπιση του κέντρου μάζας θα είναι $x_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \rightarrow x_{cm} = 0,46\text{m}$

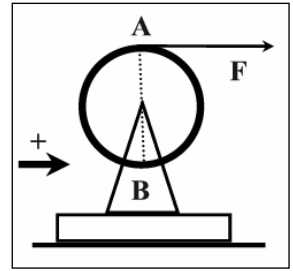
ε. Η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου θα είναι: $\omega = \alpha_{\gamma\gamma} t_2 = a_{cm} R t_2$.

Άρα η στροφορμή: $L = I \omega = \frac{m_2 R^2}{2} \cdot a_{cm} R t \rightarrow L = 0,016\pi \text{ kgm}^2/\text{s}$.

ΓΔ.25 Ο τροχός μάζας $m=1\text{kg}$ και ακτίνας $R=1\text{m}$ μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του O και είναι κάθετος σ' αυτόν και στηρίζεται σε δύο υποδοχές που είναι προσαρμοσμένες πάνω σε βάση η οποία και μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η μάζα όλου του συστήματος τροχού και βάσης είναι $M=4\text{kg}$. Γύρω από τον τροχό είναι τυλιγμένο αβαρές σχοινί το οποίο σύρεται από τη μία άκρη του με σταθερή δύναμη F , ενώ τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το σύστημα είναι ακίνητο. Το σημείο A του νήματος που βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο του τροχού αποκτά οριζόντια επιτάχυνση $a_A=5\text{m/s}^2$. Να υπολογιστούν:

α. Το μέτρο της δύναμης F και η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.
β. Η οριζόντια επιτάχυνση του χαμηλότερου σημείου B .
γ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$.
δ. Το πλήθος των περιστροφών του τροχού μέχρι τη στιγμή t_1 .
ε. Το συνολικό έργο της δύναμης F στο χρονικό διάστημα $[0,2\text{s}]$ και ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος τη χρονική στιγμή t_1 .

Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι, $I=mR^2$.



Λύση

α. Όλο το σύστημα μεταφέρεται με επιτάχυνση a : $\Sigma F=F=Ma$ (1)

Ο τροχός περιστρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\gamma}$ με τη βοήθεια της F .

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow FR = mR^2 \cdot \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow F = mR \alpha_{\gamma\gamma} \quad (2)$$

Το σημείο A έχει δύο γραμμικές επιταχύνσεις, η μία λόγω περιστροφής $\alpha_{\gamma\gamma}R$ και η άλλη λόγω μεταφορικής κίνησης a . Άρα $a_A = \alpha_{\gamma\gamma}R + a$ (3)

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow Ma = mR \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow R \alpha_{\gamma\gamma} = Ma/m \quad (4)$$

$$\text{Από (3)(4)} \rightarrow a_A = \frac{Ma}{m} + a \rightarrow a = \frac{m a_A}{M+m} \rightarrow a = 1\text{m/s}^2$$

$$(1) \rightarrow F = 4\text{N} \text{ και } (3) \rightarrow \alpha_{\gamma\gamma} = 4\text{rad/s}^2$$

β. Στο σημείο B οι δύο επιταχύνσεις a και $\alpha_{\gamma\gamma}R$ έχουν αντίθετες κατευθύνσεις:

$$a_B = a - \alpha_{\gamma\gamma}R \rightarrow a_B = -3\text{m/s}^2. \quad (1)$$

γ. Τη χρονική στιγμή t_1 : $v = at_1 = v = 2\text{m/s}$ και $\omega = \alpha_{\gamma\gamma}t \rightarrow \omega = 8\text{rad/s}$

$$K = K_{\text{μετ}} + K_{\text{περ}} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow K = 40\text{J}$$

δ. Η γωνιακή μετατόπιση: $\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\gamma}t_1^2 \rightarrow \Delta\theta = 8\text{rad}$.

$$N = \Delta\theta/2\pi \rightarrow N = 4/\pi \text{ στροφές}$$

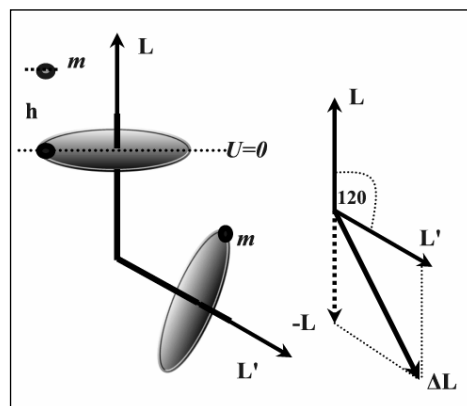
ε. Από το ΘΜΚΕ: $\Sigma W = \Delta K \rightarrow W_F = K = 40\text{J}$ (2)

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma Fv + \Sigma \tau \omega = Fv + FR\omega \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 40\text{J/s}$$

¹ Η φορά της a_B είναι προς τα αριστερά, γι' αυτό είναι αρνητική

² $W = Fx_A = F \cdot \frac{1}{2}\alpha_A t^2 = 40\text{J}$

ΓΛ.26 Ο δίσκος έχει μάζα $M=2\text{kg}$, ακτίνα $R=1\text{m}$ και περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=20\text{rad/s}$. Κομμάτι από πλαστελίνη μάζας $m=1\text{kg}$ πέφτει από ύψος $h=2\text{m}$ και προσκολλάται σε απόσταση $x=R=1\text{m}$ από τον άξονα περιστροφής. Να υπολογιστούν:



α. Η νέα ταχύτητα ω_2 του δίσκου.

β. Η θερμική ενέργεια που εκλύεται κατά την πλαστική κρούση της πλαστελίνης με το δίσκο. Τριβές στον άξονα ή τον αέρα δεν υπάρχουν.

Στη συνέχεια ασκούμε εξωτερική δύναμη F και στρέφουμε τον άξονα περιστροφής του δίσκου κατά 120° , όπως φαίνεται και στο σχήμα, χωρίς να μεταβληθεί το μέτρο της νέας ταχύτητας του δίσκου. Να υπολογιστούν:

γ. Το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του δίσκου κατά τη στροφή.

δ. Το μέτρο της μέσης συνολικής ροπής που δέχτηκε το σύστημα, αν η στροφή διαρκεί $\Delta t=2\text{s}$.

Δίνονται για το δίσκο, $I=MR^2/2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

α. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του που περνάει από το κέντρο του, είναι $I_1=MR^2/2=1\text{kgm}^2$. Όταν προστεθεί και η σημειακή μάζα $m=1\text{kg}$ στην περιφέρεια τότε η ροπή αδράνειας του συστήματος γίνεται: $I_2=I_1+mx^2 \rightarrow I_2=2\text{kgm}^2$.

Κατά την κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής, διότι $\Sigma \tau_{\text{εξ}}=0$.

$$L_{\text{προ}}=L_{\text{μετα}} \rightarrow I_1\omega_1=I_2\omega_2 \rightarrow \omega_2=\frac{I_1\omega_1}{I_2} \rightarrow \omega_2=10\text{rad/s}.$$

β. Κατά την κρούση ένα μέρος της μηχανικής ενέργειας του συστήματος του δίσκου και της πλαστελίνης μετατρέπεται σε θερμότητα. Θεωρούμε ως στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας του επίπεδο του δίσκου. Πριν την κρούση η μηχανική ενέργεια είναι το άθροισμα της δυναμικής της πλαστελίνης και της κινητικής του δίσκου:

$$E_{\text{πριν}}=U_m+K_{\delta}=mgh+\frac{1}{2}I_1\omega_1^2=20\text{J}+200\text{J}=220\text{J}$$

Μετά τη συσσωμάτωση το σύστημα έχει μόνο κινητική ενέργεια: $E_{\text{μετα}}=K'_{\delta}=\frac{1}{2}I_2\omega_2^2=100\text{J}$

Η θερμική ενέργεια είναι ίση με την απόλυτη τιμή της μεταβολής της μηχανικής ενέργειας του συστήματος: $Q=|\Delta E|=220\text{J}-100\text{J} \rightarrow Q=120\text{J}$.

γ. Μετά την κρούση το σύστημα έχει με τον άξονα κατακόρυφο στροφορμή, $L=I_2\omega_2=20\text{kgm}^2/\text{s}$.

Η ροπή που του ασκείται στρέφει τον άξονα κατά 120° , άρα και το διάνυσμα της στροφορμής που βρίσκεται πάντοτε κατά μήκος του άξονα. Το μέτρο όμως δεν αλλάζει σύμφωνα με τα δεδομένα, άρα $|L|=|L'|$. Όμως η μεταβολή της διεύθυνσης κατά 120° συνεπάγεται μεταβολή της στροφορμής, άρα και μέτρο μεταβολής της στροφορμής. $\Delta L=L'-L=L'+(-L)$.

$$\text{Από τον κανόνα παραλληλογράμμου: } |\Delta L|=\sqrt{|-L|^2+|L'|^2+2|-L||L'|\cos 60^\circ}=L\sqrt{3} \rightarrow |\Delta L|=20\sqrt{3}\text{kgm}^2/\text{s}.$$

δ. Η μέση συνολική εξωτερική ροπή που δέχτηκε το σύστημα κατά τη στροφή των 120° ισούται με το μέσο ρυθμό μεταβολής τη στροφορμής του, στο χρονικό διάστημα $\Delta t=2\text{s}$.

$$|\Sigma \tau_{\text{εξ}}|=\frac{|\Delta L|}{\Delta t}=\frac{20\sqrt{3}\text{kgm}^2/\text{s}}{2\text{s}} \rightarrow |\Sigma \tau_{\text{εξ}}|=10\sqrt{3}\text{Nm}.$$

ΓΔ.27 Άντρας στέκεται πάνω σε δίσκο ο οποίος μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του συστήματος. Το σύστημα άντρα και δίσκου (σύστημα 1) έχει ροπή αδράνειας $I_1=10\text{kgm}^2$. Ο άντρας κρατάει στα χέρια τον άξονα ενός τροχού ποδηλάτου έτσι ώστε ο άξονας να σχηματίζει γωνία $\varphi=60^\circ$ με την κατακόρυφο που περνάει από το χέρι του. Το σύστημα του τροχού (σύστημα 2) έχει ροπή αδράνειας ως προς τον άξονά του, $I_2=5\text{kgm}^2$. Αρχικά άντρας και δίσκος είναι ακίνητοι ενώ ο τροχός στρέφεται με $\omega_2=20\text{rad/s}$. Κάποια στιγμή ο άντρας στρέφει τον άξονα του τροχού κατά 60° , έτσι ώστε να ταυτιστεί με τον κατακόρυφο άξονα του συστήματος. Κατά τη διαδικασία αυτή το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού μένει σταθερό. Να υπολογιστούν:

α. Το μέτρο της στροφορμής του τροχού και η κινητική ενέργεια του συνολικού συστήματος, άντρα, τροχού και δίσκου.

β. Η τελική γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος 1.

γ. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συνολικού συστήματος, άντρα, τροχού και δίσκου.

δ. Το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του τροχού.

Λύση

α. $L_2=I_2\omega_2 \rightarrow L_2=100\text{kgm}^2/\text{s}$
 $K=\frac{1}{2}(I_1+I_2)\omega^2 \rightarrow K=3000\text{J}$

β. Η στροφορμή όλου του συστήματος άντρα, δίσκου και τροχού διατηρείται σταθερή αφού δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές με κατεύθυνση στον κατακόρυφο άξονα.

$$\vec{L}_{\text{αρχ}} = \vec{L}_{\text{τελ}} \quad (1)$$

Αρχικά η στροφορμή του συστήματος είναι μόνο η στροφορμή του δίσκου,

$$\vec{L}_{\text{αρχ}} = \vec{L}_{2\alpha} \quad (2) \quad \text{Το μέτρο αυτής είναι } L_{2\alpha} = L_2 = 100\text{kgm}^2/\text{s}^2$$

Ο άντρας στρίβει τον άξονα του τροχού και τώρα η συνολική στροφορμή γίνεται $\vec{L}_{\text{τελ}}$. Αυτή η τελική τιμή θα ισούται με το άθροισμα της νέας στροφορμής του τροχού $\vec{L}_{2\tau}$, με μέτρο $L_{2\tau}=L_2$, και της στροφορμής, $\vec{L}_{1\tau}$ που πρέπει να αποκτήσει τώρα το σύστημα 1 (άντρας – δίσκος), δηλαδή:

$$\vec{L}_{\text{τελ}} = \vec{L}_{2\tau} + \vec{L}_{1\tau} \quad (3)$$

$$\text{Από (1)(2)(3)} \rightarrow \vec{L}_{2\alpha} = \vec{L}_{2\tau} + \vec{L}_{1\tau}, \quad (\text{η σύνθεση φαίνεται και στο σχήμα})$$

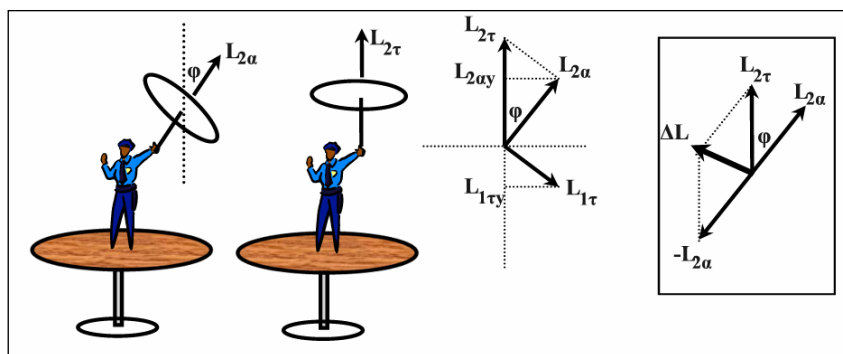
Αναλύω τα $\vec{L}_{2\alpha}$ και $\vec{L}_{1\tau}$ στον κατακόρυφο άξονα και γράφω την διατήρηση της στροφορμής μόνο στον άξονα y:

$$L_{\text{αρχ},y} = L_{\text{τελ},y} \rightarrow L_{2\alpha y} = L_{2\tau} + L_{1\tau y} \rightarrow L_2 \sin \varphi = L_2 - L_{1\tau y} \rightarrow L_{1\tau y} = \frac{L_2}{2} \rightarrow I_1 \omega_1 = 50 \rightarrow \omega_1 = 5\text{rad/s}$$

$$\gamma. \Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 \rightarrow \Delta K = 125\text{J}$$

$$\delta. \vec{\Delta L} = \vec{L}_{2\tau} - \vec{L}_{2\alpha} = \vec{L}_{2\tau} + (-\vec{L}_{2\alpha}) \quad \text{με μέτρα } L_{2\alpha} = L_{2\tau} = L_2 = 100\text{kgm}^2/\text{s}$$

$$|\Delta L| = \sqrt{L_2^2 + L_2^2 + 2L_2L_2\sin 120^\circ} \rightarrow |\Delta L| = 100\text{kgm}^2/\text{s}$$



ΓΔ.28 Μια κατακόρυφη ράβδος μήκους $(OA)=\lambda=0,3\text{m}$, έχει μάζα $M=3\text{kg}$ είναι αρχικά ακίνητη και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το άκρο της O . Ροπή αδράνειας της ράβδου $I_O=M\lambda^2/3$. Σημειακό βλήμα μάζας $m=1\text{kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v_0=3\sqrt{5}\text{m/s}$ και σφηνώνεται ακαριαία στο ελεύθερο άκρο της ράβδου. Να υπολογιστούν:

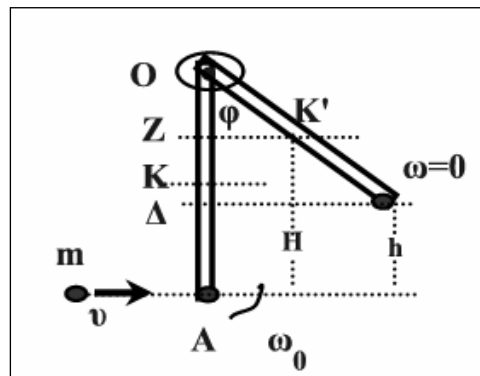
α. Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος – βλήμα αμέσως μετά την κρούση.

β. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που μεταφέρθηκε στη ράβδο λόγω κρούσης

γ. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα κατά την κρούση.

δ. Τη μέγιστη γωνία εκτροπής της ράβδου από την κατακόρυφη θέση.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



Λύση

α. Από τη διατήρηση της στροφορμής του συστήματος κατά την κρούση:

$$L_{\text{προ}}=L_{\text{μετ}} \rightarrow mv_0 \cdot \lambda = I_{O\lambda(O)} \cdot \omega_0 \rightarrow \omega_0 = 5\sqrt{5}\text{rad/s}$$

$$\text{Όπου: } I_{O\lambda(O)} = I_p + m\lambda^2 = I_{\text{cm}} + M\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + m\lambda^2 = \frac{M\lambda^2}{12} + M\frac{\lambda^2}{4} + m\lambda^2 = 0,18\text{kgm}^2$$

β. Η κινητική ενέργεια του βλήματος πριν την κρούση: $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = 22,5\text{J}$,

Η κινητική ενέργεια της ράβδου μετά την κρούση: $K_p = \frac{1}{2}I_p\omega_0^2 = 5,625\text{J}$

Το ποσοστό της ενέργειας του m που πήγε στη ράβδο: $\frac{K_p}{K_0}100\% = \frac{5,625}{22,5}100\% = 25\%$

γ. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα, αντιστοιχεί στην απόλυτη τιμή του ποσοστού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση:

$$\frac{|\Delta K|}{K_{\text{προ}}}100\% = \frac{|\frac{1}{2}I_{O\lambda}\omega_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2|}{\frac{1}{2}mv_0^2} = 50\%$$

δ. Γράφω την ΑΔΜΕ για το συσσωμάτωμα μετά την κρούση από την αρχική κατακόρυφη θέση μέχρι τη θέση όπου υποθέτω ότι η ράβδος σταματάει στιγμιαία ($\omega=0$). Η γωνία μεταξύ των δύο θέσεων είναι η ζητούμενη φ .

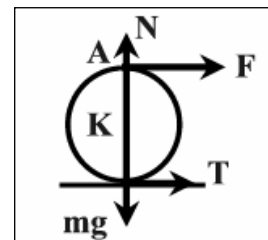
$$E_a = K_a + U_a = \frac{1}{2}I_{O\lambda}\omega_0^2 + Mg\frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

$$E_t = K_t + U_t = 0 + mgh + Mgh \quad (2)$$

$$H = (OA) - (OZ) = \lambda - \frac{\lambda}{2}\sin\varphi \quad \text{και} \quad h = (OA) - (O\Delta) = \lambda - \lambda\sin\varphi \quad (3)$$

$$E_a = E_t \rightarrow \frac{1}{2}I_{O\lambda}\omega_0^2 + Mg\frac{\lambda}{2} = mg(\lambda - \lambda\sin\varphi) + Mg(\lambda - \frac{\lambda}{2}\sin\varphi) \rightarrow \dots \rightarrow \sin\varphi = -0,5 \rightarrow \varphi = 120^\circ$$

ΓΔ.29 Κύλινδρος μάζας $m=40\text{kg}$ ακτίνας $R=0,5\text{m}$ είναι αρχικά ακίνητος πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει τριβή με συντελεστή μέγιστης στατικής τριβής $\mu_0=0,2$. Ο συντελεστής μ_0 θεωρείται ίσος με το συντελεστή τριβής ολίσθησης. Ασκούμε στον κύλινδρο σταθερή δύναμη μέτρου $F=120\text{N}$, όπως στο σχήμα και ο κύλινδρος αρχίζει να κινείται. Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και $I_{\text{cm}}=mR^2/2$.



α. Να εξετάσετε το είδος της κίνησης του κυλίνδρου.

β. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας και τη γωνιακή επιτάχυνση.

γ. Να βρείτε το έργο της F , αν το κέντρο μάζας μετατοπιστεί κατά $\Delta x_{\text{cm}}=1\text{m}$.

δ. Αν η δύναμη είναι $F=300\text{N}$, πόση θα γίνει τότε η επιτάχυνση του κέντρου μάζας και η γωνιακή επιτάχυνση;

Λύση

α. Ας υποθέσουμε ότι κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και ας αναζητήσουμε για ποιες τιμές του συντελεστή οριακής τριβής είναι δυνατόν να συμβαίνει αυτό με την προϋπόθεση ότι η δύναμη $F=120\text{N}$. Σύμφωνα με την υπόθεση ισχύει $a_{\text{cm}}=a_{\gamma\gamma}R$ (1)

$$\Sigma F=ma_{\text{cm}} \rightarrow F+T=ma_{\text{cm}} \quad (2) \quad \Sigma F_y=0 \rightarrow N-mg=0 \rightarrow N=mg \quad (3)$$

$$\Sigma \tau=I\alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow FR-TR=\frac{mR^2}{2} \cdot \frac{a_{\text{cm}}}{R} \rightarrow F-T=\frac{ma_{\text{cm}}}{2} \quad (4)$$

$$(2)+(3) \rightarrow 2F=\frac{3ma_{\text{cm}}}{2} \rightarrow F=\frac{3ma_{\text{cm}}}{4} \quad (5)$$

$$\text{Από (2) (4)} \rightarrow F+T=\frac{4F}{3} \rightarrow T=\frac{F}{3} \quad (6)$$

$$\text{Για να μην ολισθαίνει πρέπει: } T < T_{\text{max}} \rightarrow T < \mu_0 N \rightarrow \mu_0 > \frac{T}{N} \rightarrow \mu_0 > \frac{\frac{F}{3}}{mg} \rightarrow \mu_0 > \frac{F}{3mg} \rightarrow \mu_0 > 0,1$$

Δίνεται όμως $\mu_0=0,2 > 0,1$ άρα πράγματι συντρέχουν οι προϋποθέσεις ώστε να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

$$\text{β. Από (5)} \rightarrow a_{\text{cm}}=\frac{4F}{3m} \rightarrow a_{\text{cm}}=4\text{m/s}^2 \quad \text{και } a_{\gamma\gamma}=a_{\text{cm}}/R \rightarrow a_{\gamma\gamma}=8\text{rad/s}$$

γ. Η δύναμη F ασκείται στο σημείο A που κινείται με επιτάχυνση $a_A=2a_{\text{cm}}$. Συνεπώς

$$\Delta x_A=\frac{1}{2}a_A t^2 \quad \text{και} \quad \Delta x_{\text{cm}}=\frac{1}{2}a_{\text{cm}} t^2 \quad \text{άρα} \quad \Delta x_A=2\Delta x_{\text{cm}}=2\text{m}$$

$$W_F=F \cdot \Delta x_A=120 \cdot 2 \Rightarrow \mathbf{W_F=240J}$$

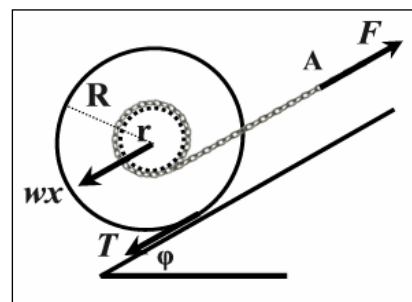
δ. Αν η δύναμη είναι $F=300\text{N}$ τότε η τιμή του συντελεστή οριακής τριβής για να κυλίεται χωρίς ολίσθηση πρέπει να είναι: $\mu_0 > \frac{F}{3mg} \rightarrow \mu_0 > 0,25$

Όμως το δεδομένο είναι, $\mu_0=0,2 < 0,25$ συνεπώς ο κύλινδρος και κυλίεται και ολισθαίνει. Άρα η τριβή δεν είναι στατική, αλλά είναι τριβή ολίσθησης με τιμή: $T_{\text{ολ}}=\mu N=\mu_0 N=\mu_0 mg=80\text{N}$

$$\Sigma F=ma_{\text{cm}} \rightarrow F+T_{\text{ολ}}=ma_{\text{cm}} \rightarrow a_{\text{cm}}=\frac{F+T_{\text{ολ}}}{m}=\frac{380}{40} \rightarrow a_{\text{cm}}=9,5\text{m/s}^2$$

$$\Sigma \tau=I\alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow FR-T_{\text{ολ}}R=\frac{mR^2}{2} \cdot a_{\gamma\gamma} \rightarrow a_{\gamma\gamma}=\frac{2(F-T_{\text{ολ}})}{mR} \rightarrow a_{\gamma\gamma}=22\text{rad/s}^2$$

ΓΔ.30 Ο κύλινδρος του σχήματος ακτίνας $R=0,2\text{ m}$ και μάζα 5 kg , έχει εγκοπή βάθους $r=R/2$ στην οποία έχει τυλιχθεί ένα αβαρές νήμα, στο άκρο Α του οποίου ασκούμε δύναμη F , παράλληλη στο επίπεδο. Υπάρχουν τριβές και δίνονται οι συντελεστές τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου $\mu=\mu_s=0,8$.



Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του, ο οποίος συνδέει τα κέντρα των δύο βάσεων $I=\frac{1}{2}mR^2$, $\eta\mu\phi=0,6$ και $\sigma\eta\mu\phi=0,8$, ενώ $g=10\text{ m/s}^2$.

I. Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης F , ώστε ο κύλινδρος να ισορροπεί.

II. Αν η ασκούμενη δύναμη έχει μέτρο $F=45\text{ N}$,

α. Να αποδείξετε ότι ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει προς τα κάτω και να υπολογίσετε την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου, καθώς και η γωνιακή του επιτάχυνση.

β. Να υπολογίσετε τα έργα της F και της τριβής για μετατόπιση του άξονα του κυλίνδρου κατά 2 m πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

III. Αν η ασκούμενη δύναμη έχει μέτρο $F=92\text{ N}$,

γ. Να εξετάσετε αν ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει και να υπολογίσετε ξανά την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου, καθώς και η γωνιακή του επιτάχυνση.

δ. Να υπολογίσετε το έργο της F , το έργο της τριβής και τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου για μετατόπιση του άξονα κατά 3 m .

Λύση

I. Για να ισορροπεί πρέπει να μην μεταφέρεται αλλά και να μην περιστρέφεται. Άρα η στατική τριβή πρέπει να έχει κατεύθυνση προς τα κάτω ώστε η ροπή της να αντισταθεί στη ροπή της F .

$$\Sigma\tau=0 \rightarrow Fr - TR = 0 \rightarrow T = Fr/R \rightarrow T = F/2$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F - mg\eta\mu\phi - T = 0 \rightarrow F = 2mg\eta\mu\phi \rightarrow \mathbf{F=60\text{ N}}$$

II. α. Αν η $F=45\text{ N} < 60\text{ N}$ είναι σαφές ότι το κέντρο μάζας θα κινείται προς τα κάτω με επιτάχυνση a και ο κύλινδρος θα περιστρέφεται με $a_{\gamma\upsilon}$. Υποθέτω ότι κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει και η υπολογίζω την τριβή T . Αν βγει μικρότερη της T_{op} έχει καλώς και κάνει ΚΧΟ. Αν βγει μεγαλύτερη της T_{op} τότε σημαίνει ότι ολισθαίνει και τα πράγματα αλλάζουν άρδην.

$$\Sigma\tau = I a_{\gamma\upsilon} \rightarrow Fr - TR = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{a}{R} \rightarrow \frac{F}{2} - T = \frac{ma}{2} \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = ma \rightarrow mg\eta\mu\phi - T - F = ma \quad (2)$$

$$\text{Από (1)+(2)} \rightarrow mg\eta\mu\phi - \frac{F}{2} = \frac{3ma}{2} \rightarrow \mathbf{a=1\text{ m/s}^2} \text{ και } a_{\gamma\upsilon}=a/R \rightarrow \mathbf{a_{\gamma\upsilon}=5\text{ rad/s}^2}$$

$$\text{Από (1)} \rightarrow T = 22,5\text{ N} - 2,5\text{ N} \rightarrow \mathbf{T=20\text{ N}}$$

$$T_{op} = \mu N = \mu \sigma mg\sigma\eta\mu\phi = 0,8 \cdot 50 \cdot 0,8\text{ N} \rightarrow \mathbf{T_{op}=32\text{ N}} \quad \text{Άρα } T < T_{op} \rightarrow \mathbf{\acute{\alpha}\rho\alpha \text{ \textbf{κ}\textbf{Χ}\textbf{Ο}}}$$

β. Η F εμποδίζει την κάθοδο του cm άρα το μεταφορικό της έργο είναι αρνητικό αλλά βοηθάει στην αύξηση της γωνιακής ταχύτητας άρα το περιστροφικό της έργο είναι θετικό:

$$W_F = -F\Delta x_{cm} + Fr\Delta\theta = -F\Delta x_{cm} + F\frac{R}{2}\Delta\theta = -F\Delta x_{cm} + \frac{F\Delta x_{cm}}{2} = -\frac{F\Delta x_{cm}}{2} \rightarrow \mathbf{W_F = -45\text{ J}}$$

$$\mathbf{W_T=0}, \text{ αφού η τριβή είναι στατική και κάνει ΚΧΟ}$$

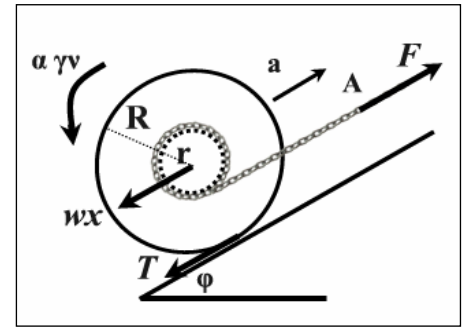
III. γ. Αν η $F=92\text{ N} > 60\text{ N}$ τότε το CM ανεβαίνει. Έστω και πάλι ότι κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει:

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow TR - F \frac{R}{2} = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{a}{R} \rightarrow T - \frac{F}{2} = \frac{ma}{2} \quad (3)$$

$$\Sigma F_x = ma \rightarrow F - mg \mu \phi - T = ma \quad (4) \quad \frac{F}{2} - mg \mu \phi = \frac{3ma}{2}$$

$$\rightarrow a = 32/15 \text{ m/s}^2$$

Από (3) $\rightarrow T = 154/3 \text{ N}$ Άρα $T > T_{op}$ συνεπώς ολισθαίνει άρα δεν ισχύουν τα προηγούμενα, δηλαδή το a δεν είναι $32/15 \text{ m/s}^2$. Η τριβή είναι ολίσθησης δηλαδή έχει τιμή $T_{op} = \mu mg \mu \phi = 32 \text{ N}$. Συνεπώς: $F - mg \mu \phi - T_{op} = ma \rightarrow a = 6 \text{ m/s}^2$.



$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow T_{op} R - F \frac{R}{2} = \frac{mR^2}{2} \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow \alpha_{\gamma\gamma} = -28 \text{ m/s}^2$. Άρα ο κύλινδρος παίρνει ανάποδες στροφές δηλαδή στρέφεται αριστερόστροφα ενώ το CM ανεβαίνει.

δ. Για μετατόπιση κατά $\Delta x_{cm} = 3 \text{ m}$ έχουμε: $\Delta x_{cm} = \frac{at^2}{2} \rightarrow t = 1 \text{ s}$. Άρα $\Delta \theta = \frac{\alpha_{\gamma\gamma} t^2}{2} \rightarrow \Delta \theta = 14 \text{ rad}$

Η F κάνει θετικό έργο τόσο για τη μεταφορά προς τα πάνω όσο και για την ανάποδη περιστροφή αφού συμβάλει στην γωνιακή επιτάχυνση.

$$W_F = F \cdot \Delta x_{cm} + F \frac{R}{2} \Delta \theta \rightarrow 276 \text{ J} + 128,8 \text{ J} \rightarrow \mathbf{W_F = 404,8 \text{ J}}$$

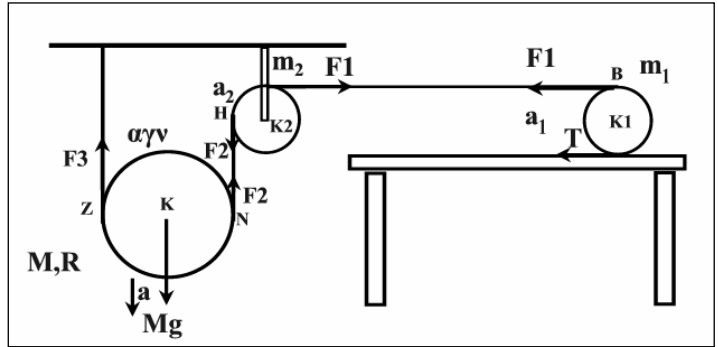
Η τριβή κάνει αρνητικό έργο τόσο για τη μεταφορά αφού είναι αντίθετη στη μετατόπιση, όσο και για την περιστροφή αφού παράγει ροπή αντίθετη της $\alpha_{\gamma\gamma}$.

$$W_T = -T_{op} \Delta x_{cm} - T_{op} R \cdot \Delta \theta = -32 \text{ N} \cdot 3 \text{ m} - 32 \text{ N} \cdot (14 \cdot 0,2 \text{ m}) \rightarrow \mathbf{W_T = -185,6 \text{ J}}$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται από το ΘΜΚΕ:

$$\Delta K = W_F + W_T - mg \mu \theta \cdot \Delta x_{cm} = 404,8 \text{ J} - 185,6 \text{ J} - 90 \text{ J} \rightarrow \mathbf{\Delta K = 129,2 \text{ J}}$$

ΓΔ.31 Στο σύστημα που φαίνεται στο σχήμα η μικρή τροχαλία K_2 είναι μάζας $m_2=1\text{kg}$, ακτίνας r και το αβαρές σχοινί συνδέει τον κύλινδρο, K_1 , μάζας $m_1=8\text{kg}$, ακτίνας r με το δίσκο, K , μάζας $M=4\text{kg}$ και ακτίνας R . Ο κύλινδρος κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει καθώς το τυλιγμένο σε αυτόν νήμα ξετυλίγεται. Αν αφήσουμε το σύστημα ελεύθερο τη χρονική στιγμή $t_0=0$, να υπολογιστούν:



α. Οι επιταχύνσεις a_1 και a των κέντρων μάζας K_1 και K .

β. Οι τάσεις όλων των νημάτων F_1 , F_2 , F_3 .

γ. Η πτώση του κέντρου μάζας του δίσκου, K και η μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, K_1 τη χρονική στιγμή $t=2\text{s}$.

δ. Το ποσοστό της δυναμικής ενέργειας του δίσκου, (K) που μετατράπηκε σε κινητικές ενέργειες του δίσκου, της τροχαλίας και του κυλίνδρου, μέχρι τη χρονική στιγμή $t=2\text{s}$.

ε. Ο ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t=2\text{s}$.

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας και των τριών στερών $I=mr^2/2$.

Λύση

α. Για τον κύλινδρο K_1 . $F_1+T=m_1a_1$ (1) και $F_1r-Tr=\frac{m_1r^2}{2}\cdot\frac{a_1}{r}$ (2) $\rightarrow F_1=\frac{3m_1a_1}{4}$ (3)

Για την τροχαλία K_2 : $F_2r-F_1r=\frac{m_2r^2}{2}\cdot\frac{a_2}{r} \rightarrow F_2-F_1=\frac{m_2a_2}{2}$ (4)

Για το δίσκο, K : $Mg-F_2-F_3=Ma$ (5) και $F_3R-F_2R=\frac{MR^2}{2}\cdot\frac{a}{R} \rightarrow F_3-F_2=\frac{Ma}{2}$ (6)

$$a_B=a_H=a_2=2a_1$$

$$a_2=a_H=a_N=a_{\gamma v}R+a \rightarrow a_2=2a \text{ και } a=a_1 \quad (7)$$

$$a_Z=0 \rightarrow a-a_{\gamma v}R=0 \rightarrow a=a_{\gamma v}R$$

Από (3)+(4)+(5)+(6) και με τη βοήθεια της (7): $a=\frac{2Mg}{3M+4m_2+3m_1} \rightarrow a=a_1=2\text{m/s}^2$ και $a_2=4\text{m/s}^2$

β. Από (3) $\rightarrow F_1=12\text{N}$, (4) $\rightarrow F_2=14\text{N}$ και από (6) $\rightarrow F_3=20\text{N}$.

γ. $y_K=\frac{1}{2}at^2=4\text{m}$ και $v_K=at=4\text{m/s}$ $y_1=\frac{1}{2}at^2=4\text{m}$ και $v_1=4\text{m/s}$

δ. $U_K=Mgy_K=160\text{J}$

$$K_1=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_1r^2)\cdot(\frac{v_1}{r})^2 \rightarrow K_1=\frac{3}{4}m_1v_1^2 \rightarrow K_1=96\text{J}$$

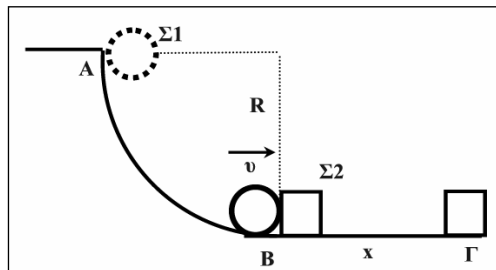
$$K_2=\frac{1}{2}I_2\omega_2^2=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_2r^2)\cdot(\frac{v_2}{r})^2=\frac{1}{4}m_2v_2^2=\frac{1}{4}m_2(2v_1)^2 \rightarrow K_2=16\text{J}$$

$$K=\frac{1}{2}Mv_K^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\cdot(\frac{v_K}{R})^2 \rightarrow K=\frac{3}{4}Mv_K^2 \rightarrow K_1=48\text{J}$$

Άρα τα ποσοστά είναι: $K_1/U=96/160$ $K_2/U=16/160$ και $K/U=48/160$

ε. $\Delta K_1/\Delta t=\Sigma F\cdot v_1+\Sigma \tau\cdot \omega_1=(F_1+T)v_1+(F_1-T)\omega_1r=2F_1v_1 \rightarrow \Delta K_1/\Delta t=96\text{J/s}$

ΓΔ32. Από την κορυφή ενός κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου, ακτίνας $R=2\text{m}$ αφήνεται να κινηθεί μια σφαίρα Σ_1 μάζας $m_1=2\text{kg}$. Η σφαίρα αρχικά ολισθαίνει για λίγο, ενώ στη συνέχεια κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και φτάνοντας στη βάση του επιπέδου, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με κύβο Σ_2 , ακμής $a=2r$, όπου r η ακτίνα της σφαίρας και μάζας $m_2=1\text{kg}$. Μετά την κρούση το σώμα Σ κινείται στο οριζόντιο επίπεδο και διανύει απόσταση $x=4\text{m}$, μέχρι να σταματήσει εξαιτίας της τριβής. Δίνεται ο συντελεστής τριβής μεταξύ του κύβου Σ_2 και του επιπέδου $\mu=0,2$ και $g=10\text{m/s}^2$. Κατά τη διάρκεια της κρούσης δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ σφαίρας-κύβου.



α. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του κύβου Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

β. Να βρεθεί η κινητική ενέργεια της σφαίρας, ελάχιστα πριν την κρούση.

γ. Να υπολογιστεί το ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας της σφαίρας, το οποίο μετατρέπεται σε θερμική, κατά τη διάρκεια της ολίσθησής της στο τεταρτοκύκλιο. Θεωρείστε μηδενική τη δυναμική της ενέργεια, ελάχιστα πριν την κρούση (σημείο, B) και ότι $r \ll R$.

δ. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας όταν θα συγκρουστεί και πάλι με το σώμα Σ .

Η ροπή αδράνειας της σφαίρας είναι ίση με $I = \frac{2}{5}mr^2$.

Λύση

α. Από το ΘΜΚΕ για την ολίσθηση του Σ_2 υπολογίζω την ταχύτητα της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση: $W_T = \Delta K_2 \rightarrow -m_2gx = -\frac{1}{2}m_2V_2^2 \rightarrow V_2 = 4\text{m/s}$.

β. Η κρούση είναι ελαστική κεντρική με $v_2=0$. Άρα ισχύουν:

$$V_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 \rightarrow v_1 = 3\text{m/s}, \quad V_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 \rightarrow V_1 = 1\text{m/s}$$

Η σφαίρα κυλίεται (XO) πριν την κρούση, άρα $K_{1\pi\rho} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{7}{10}m_1v_1^2 \rightarrow K_{1\pi\rho} = 12,6\text{J}$

γ. Από την ΑΔΕ για τη σφαίρα από το A στο B: $E_A = E_B + Q \rightarrow Q = m_1g(R-r) - K_{1\pi\rho} \rightarrow Q = 27,4\text{J}$

$$\pi\% = \frac{Q}{m_1gR}100\% = \frac{27,4}{40}100\% \rightarrow \pi\% = 68,5\%$$

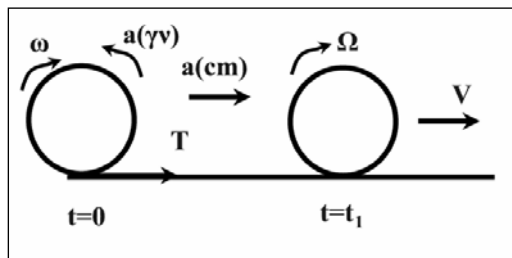
δ. Μετά την κρούση η σφαίρα έχει γωνιακή ταχύτητα, ω την ίδια που είχε και πριν αφού δεν δέχτηκε ροπή κατά την κρούση. Έχει και μεταφορική ταχύτητα $v_1 = 3\text{m/s}$. Άρα:

$v_1 = \omega r = 3\text{m/s}$ ενώ $V_1 = 1\text{m/s}$. Τότε όμως: $\omega r > V_1$ συνεπώς δεν κάνει κύλιση XO. Λόγω της τριβής που δέχεται στο οριζόντιο επίπεδο θα χρειαστεί κάποιο χρόνο t και κάποια μετατόπιση d μέχρι να γίνει $V = \Omega r$ ώστε να αρχίσει η κύλιση XO. Η T έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά για να την επιταχύνει μεταφορικά και να την επιβραδύνει ταυτόχρονα περιστροφικά.

$$T = \mu_\sigma m_2 g = 2\text{N}$$

$$\Sigma F = m_2 a \rightarrow a = T/m \rightarrow a = 2\text{m/s}^2$$

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma v} \rightarrow T r = \frac{2mr^2}{5} \alpha_{\gamma v} \rightarrow \alpha_{\gamma v} = 5/r$$



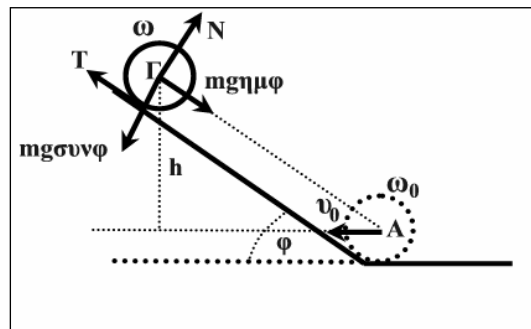
Άρα ισχύουν: $V = V_1 + at$ και $\Omega = \omega - \alpha_{\gamma\gamma} t$ με $V = \Omega r$ Άρα:

$$V = \Omega r \rightarrow V_1 + at = (\omega - \alpha_{\gamma\gamma} t)r \rightarrow V_1 + at = \omega r - \alpha_{\gamma\gamma} t \cdot r \rightarrow V_1 + at = v_1 - \alpha_{\gamma\gamma} t \cdot r \rightarrow \dots t = 2/7s.$$

Σε αυτό το χρονικό διάστημα το CM της σφαίρας θα έχει μετατοπιστεί κατά d όπου:

$d = V_1 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\gamma} t^2 \rightarrow \dots d = 30/49m$. Αλλά η απόσταση d που διανύει η σφαίρα μέχρι να αρχίσει η ΚΧΟ είναι μικρότερη της απόστασης $x = 4m$ που έχει διανύσει ο κύβος ολισθαίνοντας και έχει σταματήσει. Συνεπώς όταν η σφαίρα το συναντά και πάλι κάνει ήδη κύλιση ΧΟ και πέφτει πάνω του με σταθερή ταχύτητα την οποία αποκτάει τη χρονική στιγμή $t = 2/7s$. Δηλαδή: $V = V_2 + at = 1m/s + 2m/s^2 \cdot (2/7s) \rightarrow V = 11/7m/s$.

ΓΔ.33 Μια σφαίρα μάζας $m=1\text{kg}$ κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα κέντρου μάζας $v_0=4\text{m/s}$ και στην πορεία της συναντά ένα κεκλιμένο επίπεδο, κλίσεως $\varphi=30^\circ$, κατά μήκος του οποίου συνεχίζει την κίνησή της. Αν η προς τα πάνω κίνηση της σφαίρας σταματήσει όταν το κέντρο της ανέβει κατά $h=1\text{m}$, τότε:



α. Να αποδείξετε ότι κατά την άνοδό της στο κεκλιμένο επίπεδο, η σφαίρα δέχεται δύναμη τριβής από το επίπεδο

β. Να υπολογίσετε τη δύναμη της τριβής, T και το χρονικό διάστημα Δt που η σφαίρα μετατοπίζεται προς τα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

γ. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια της σφαίρας τη στιγμή που σταματά η άνοδός της στο κεκλιμένο επίπεδο.

δ. Να υπολογίσετε το έργο της ασκούμενης τριβής κατά την άνοδο της σφαίρας.

Δίνονται $I=0,4mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση:

α. Στο σημείο Α η σφαίρα έχει κινητική ενέργεια: $K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}(0,4mR^2)\omega_0^2 = 7mv_0^2/10 = 11,2\text{J}$

Στο σημείο Γ έχει δυναμική ενέργεια $U=mgh=10\text{J}$. Συνεπώς δεν ισχύει η ΑΔΜΕ άρα δεν κάνει ΚΧΟ.

Αν το επίπεδο ήταν λείο τότε η γωνιακή ταχύτητα θα έμενε σταθερή, δηλαδή $\omega=\omega_0=v_0/R$ και θα είχε στη θέση Γ κινητική ενέργεια περιστροφής $K_{\text{τελ}}=K_{\pi} = \frac{1}{2}(0,4mR^2)\omega_0^2 = 0,4mv_0^2 = 6,4\text{J}$.

Τότε από την ΑΔΜΕ θα ίσχυε: $K_{\text{αρχ}} = U + K_{\text{τελ}} \rightarrow 11,2\text{J} = 10\text{J} + 6,4\text{J}$. πράγμα άτοπο. Συνεπώς ούτε ΚΧΟ κάνει ούτε το επίπεδο είναι λείο, άρα υπάρχει τριβή. Η σφαίρα κάνει μια σύνθετη κίνηση και φτάνει στο μέγιστο ύψος όπου $v=0$ αλλά $\omega \neq 0$.

β. Το κέντρο της σφαίρας διανύει απόσταση $x=h/\eta\mu\varphi=2\text{m}$ μέχρι να σταματήσει. Συνεπώς η επιβράδυνση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x=v_0^2/2a \rightarrow a=v_0^2/2x \rightarrow a=4\text{m/s}^2 \quad \text{Συνεπώς } \Sigma F_x=ma \rightarrow m\eta\mu\varphi - T=ma \rightarrow T=1\text{N}$$

Η χρονική διάρκεια Δt μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα $v=0 \rightarrow v_0 - a\Delta t \rightarrow \Delta t=1\text{s}$.

γ. Υπολογίζουμε τη γωνιακή επιβράδυνση: $\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow TR = 0,4mR^2 \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow \alpha_{\gamma\gamma} = 5/(2R)$

Άρα η γωνιακή ταχύτητα μετά από χρόνο $\Delta t=1\text{s}$ θα είναι $\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\gamma} \Delta t \rightarrow \omega = \frac{v_0}{R} - \frac{5}{2R} = \frac{4}{R} - \frac{5}{2R} \rightarrow$

$$\omega = 3/2R \text{ rad/s}$$

$$\text{Άρα: } K_{\pi, \text{τελ}} = \frac{1}{2} \cdot (0,4mR^2) \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} mR^2 \cdot \left(\frac{3}{2R}\right)^2 = 9/20\text{J} \rightarrow K_{\pi, \text{τελ}} = 0,45\text{J}$$

δ. Από την ΑΔΕ έχουμε: $E_A = E_I + Q \rightarrow K_{\text{αρχ}} = U + K_{\pi, \text{τελ}} + Q \rightarrow Q = 11,2 - (10\text{J} + 0,45\text{J}) \rightarrow Q = 0,75\text{J}$. Άρα

$$W_T = -0,75\text{J}.$$

* Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το γινόμενο: $-Tx = -1 \cdot 2\text{J} = -2\text{J}$

$$\text{και το } TR\Delta\theta = TR \cdot \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\gamma} t^2 = TR \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2R} t^2 = 1,25\text{J} \quad \text{Άρα: } W_T = -Tx + TR\Delta\theta = -2\text{J} + 1,25\text{J} = -0,75\text{J}$$

ΓΔ.34 Λεπτή κυκλική στεφάνη μάζας $m = 4 \text{ kg}$ αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας $\varphi = 30^\circ$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$. Το κεκλιμένο επίπεδο δεν είναι λείο. Τη χρονική στιγμή t_1 , έχει χάσει ύψος $h = 2 \text{ m}$, ενώ το κέντρο μάζας έχει αποκτήσει ταχύτητα $v = 5 \text{ m/s}$.

Να υπολογίσετε

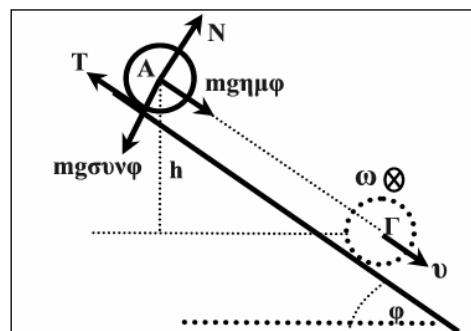
α. τη δύναμη της τριβής της στεφάνης με το κεκλιμένο.

β. τη χρονική στιγμή t_1 .

γ. την κινητική της ενέργεια τη χρονική στιγμή t_1 και το έργο της τριβής μέχρι τότε

δ. το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας τη χρονική στιγμή t_1 .

Δίνονται: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\eta_{\mu\varphi} = 0,5$



Λύση:

Το κεκλιμένο επίπεδο δεν είναι λείο αλλά οπότε η στεφάνη κάνει μεταφορά και περιστροφή χωρίς να είναι δεδομένο ότι κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.

α. Η μετατόπιση του κέντρου μάζας είναι $x = \frac{h}{\eta_{\mu\varphi}} \rightarrow x = 4 \text{ m}$

Από τις σχέσεις $x = \frac{1}{2}at^2$ και $v = at$ έχουμε $x = \frac{v^2}{2a} \rightarrow a = 25/8 \text{ m/s}^2$

$\Sigma F_x = ma \rightarrow mg \eta_{\mu\varphi} - T = ma \rightarrow T = mg \eta_{\mu\varphi} - ma \rightarrow T = 7,5 \text{ N}$

β. $v = at \rightarrow t = v/a \rightarrow t_1 = 8/5 \text{ s}$

γ. $\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow TR = mR^2 \alpha_{\gamma\gamma} \rightarrow \alpha_{\gamma\gamma} = 15/8R$

$\omega = \alpha_{\gamma\gamma} t \rightarrow \omega = (15/8R)(8/5) \text{ rad/s} \rightarrow \omega = 3/R \text{ rad/s}$

$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}4 \cdot 25 + \frac{1}{2}4 \cdot R^2 \cdot \frac{9}{R^2} \rightarrow K = 68 \text{ J}$

Από το ΘΜΚΕ: $W_T + W_{mg} = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \rightarrow W_T + (mg \eta_{\mu\varphi}) x = K \rightarrow W_T = K - (mg \eta_{\mu\varphi}) x \rightarrow W_T = -12 \text{ J}$

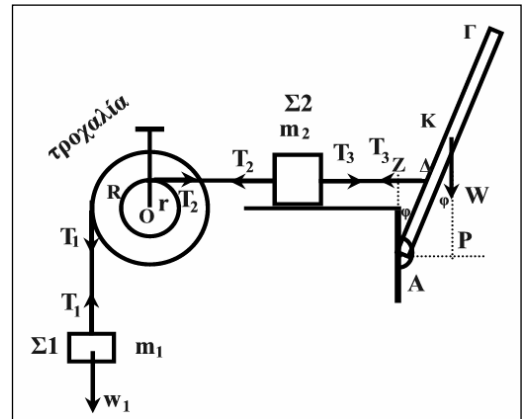
δ. $\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta K_{\text{μετ}}}{\Delta t} + \frac{\Delta K_{\text{περ}}}{\Delta t} = \Sigma F \cdot v + \Sigma \tau \cdot \omega = ma \cdot v + (mR^2) \alpha_{\gamma\gamma} \cdot \omega = ma \cdot at + mR^2 \alpha_{\gamma\gamma} \cdot \alpha_{\gamma\gamma} t = ma^2 t + mR^2 \alpha_{\gamma\gamma}^2 t \rightarrow$

$\Delta K / \Delta t = 85 \text{ J/s}$

* Η δύναμη της τριβής T κάνει ταυτόχρονα δύο έργα. Ένα μεταφορικό που είναι αρνητικό $W_{T,\text{μετ}} = -T \Delta x$ και ένα περιστροφικό που είναι θετικό γιατί αυτή δίνει γωνιακή επιτάχυνση στη στεφάνη. Αυτό είναι $W_{T,\text{περ}} = TR \Delta \theta$. Το συνολικό είναι:

$W_T = -Tx + TR \Delta \theta = -Tx + TR \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\gamma} t^2 = -30 \text{ J} + 18 \text{ J} = -12 \text{ J}$

ΓΔ.35 Άκαμπτη ομογενής ράβδος ΑΓ με μήκος $d=2\text{m}$ και μάζα $M=4\text{kg}$ έχει το άκρο της Α αρθρωμένο και ισορροπεί έτσι ώστε να σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία κλίσης φ , ($\eta\mu\varphi=0,8$, $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,6$) Στο σημείο Δ δένεται με νήμα και ισχύει $ΑΔ=d/3$. Το νήμα συνδέεται με σώμα μάζας $m_2=1\text{kg}$ που ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο και με τη βοήθεια δευτέρου νήματος που είναι τυλιγμένο στο αυλάκι ακτίνας $r=0,1\text{m}$ της τροχαλίας. Στο εξωτερικό αυλάκι της τροχαλίας ακτίνας R είναι τυλιγμένο νήμα που φέρει σώμα $m_1=4\text{kg}$ που ισορροπεί. Η τροχαλία έχει $I=0,62\text{kgm}^2$. Για τη ράβδο δίνεται $I_K=Md^2/12$ και $g=10\text{m/s}^2$.



α. Κατά τη διάρκεια της ισορροπίας του συστήματος να υπολογίσετε τις τάσεις και των τριών νημάτων και η ακτίνα R .

Τη χρονική στιγμή $t=0$ κόβουμε το νήμα στο σημείο Δ. Να υπολογίσετε:

β. Τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου και τις επιταχύνσεις των δύο σωμάτων m_1 και m_2 .

Τη χρονική στιγμή t , που το σώμα m_1 θα έχει πέσει κατά $h=1\text{m}$ να υπολογίσετε :

γ. την ταχύτητα και το ρυθμό μεταβολής κινητικής ενέργειας του m_1

δ. τη γωνιακή ταχύτητα το πλήθος των περιστροφών και το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας.

ε. το ποσοστό της δυναμικής ενέργειας του σώματος m_1 που έγινε κινητική του m_2 .

στ. Να υπολογιστούν η γωνιακή ταχύτητα, ω , της ράβδου, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής της ενέργειας και το μέτρο της δύναμης που δέχεται από την άρθρωση Α, τη χρονική στιγμή που γίνεται οριζόντια.

Λύση:

α. $T_1=m_1g \rightarrow T_1=40\text{N}$

$\Sigma r_A=0 \rightarrow T_3(AZ)-w(AP) \rightarrow T_3(A\Delta)\sigma\upsilon\nu\varphi=w(AK)\eta\mu\varphi \rightarrow T_3=80\text{N}$

$T_2=T_3=80\text{N}$

$\Sigma r_O=0 \rightarrow T_2r-T_1R=0 \rightarrow R=\frac{T_2r}{T_1} \rightarrow R=0,2\text{m}$

β. Όταν κόβεται το νήμα η ράβδος περιστρέφεται γύρω από το Α με $\alpha_{\gamma\nu}$, η τροχαλία γύρω από το Ο με $\alpha_{\gamma\nu}'$. Το σώμα Σ_1 έχει επιτάχυνση a_1 και το Σ_2 , a_2 . Οι τάσεις των νημάτων αλλάζουν και γίνονται T_1' , T_2'

$\Sigma \tau_K=I\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow w(AP)=\frac{Md^2}{3}\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\nu}=\frac{3g\eta\mu\varphi}{2d} \rightarrow \alpha_{\gamma\nu}=6\text{rad/s}$

Σώμα Σ_1 : $m_1g-T_1'=m_1a_1 \rightarrow T_1'=m_1g-m_1a_1$ (1)

Τροχαλία: $T_1'R-T_2'r=I\alpha_{\gamma\nu}' \rightarrow T_1'R-T_2'r=I\frac{a_1}{R}$ (2)

Σώμα Σ_2 : $T_2'=m_2a_2$ (3) Η σχέση των επιταχύνσεων $\frac{a_1}{R}=\frac{a_2}{r} \rightarrow a_2=\frac{a_1}{2}$ (4)

Με τις (1) (3) και (4) μέσα στην (2) έχουμε: $a_1=2\text{m/s}^2$ και $a_2=1\text{m/s}^2$

γ. Για πτώση του Σ_1 κατά $h=1\text{m}$ ο χρόνος είναι: $h=\frac{1}{2}a_1t^2 \rightarrow t=1\text{s}$ και η ταχύτητα $v_1=2\text{m/s}$

$$\frac{\Delta K_1}{\Delta t} = \Sigma F_1 v_1 = m a_1 v_1 \rightarrow \frac{\Delta K_1}{\Delta t} = 16 \text{ J/s}$$

$$\delta. a_1 = \alpha_{\gamma v} R \rightarrow \alpha_{\gamma v} = 10 \text{ rad/s} \quad \omega = \alpha_{\gamma v} t = 10 \text{ rad/s}, \Delta \theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma v} t^2 \rightarrow \Delta \theta = 5 \text{ rad}, \quad N = \frac{\Delta \theta}{2\pi} \rightarrow N = 2,5/\pi \text{ στροφές}$$

$$\frac{\Delta K_{\tau p}}{\Delta t} = \Sigma \tau_O \cdot \omega = -I \alpha_{\gamma v} \omega \rightarrow \frac{\Delta K_{\tau p}}{\Delta t} = 62 \text{ J/s}$$

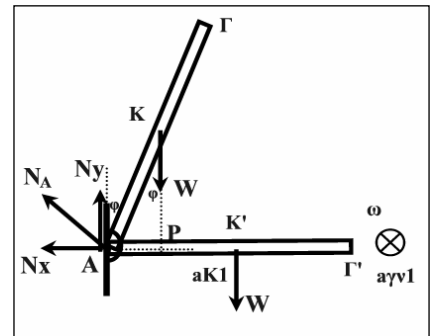
$$\epsilon. v_2 = a_2 t = 1 \text{ m/s} \quad K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \rightarrow K_2 = 0,5 \text{ J} \quad U = m_1 g h = 40 \text{ J} \quad \pi \% = \frac{K_2}{U} 100 \% = 1,25 \%$$

στ. Γράφω το ΘΜΚΕ από την αρχική έως την οριζόντια θέση για να βρω τη γωνιακή ταχύτητα, ω .

$$W_w = K_{\tau \epsilon \lambda} - K_{\alpha p \chi} \rightarrow M g (K P) = \frac{1}{2} I_A \omega^2 \rightarrow M g \frac{d}{2} \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{M d^2}{3} \omega^2 \rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3 g \sin \varphi}{d}} \rightarrow \omega = 3 \text{ rad/s}$$

$$\frac{\Delta K_{\pi \epsilon p}}{\Delta t} = \Sigma \tau \cdot \omega = M g \frac{d}{2} \cdot \omega \rightarrow \frac{\Delta K_{\pi \epsilon p}}{\Delta t} = 120 \text{ J/s}$$



Υπολογίζω την $\alpha_{\gamma v 1}$ στην οριζόντια θέση: $\Sigma \tau_1 = I_A \alpha_{\gamma v 1} \rightarrow M g \frac{d}{2} = \frac{M d^2}{3} \alpha_{\gamma v 1} \rightarrow \alpha_{\gamma v 1} = 7,5 \text{ rad/s}^2$. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας, K θα είναι: $a_{K1} = \alpha_{\gamma v 1} (d/2) = 7,5 \text{ m/s}^2$

Η ράβδος δέχεται στην άρθρωση A δύο συνιστώσες δυνάμεις N_x , και N_y η συνισταμένη των οποίων είναι η N_A . Η N_x οφείλεται στην κεντρομόλο επιτάχυνση και η N_y στο βάρος, w και την επιτάχυνση a_{K1} του κέντρου μάζας.

$$\Sigma F_x = F_{\kappa \epsilon v} \rightarrow N_x = M \omega^2 \frac{d}{2} \rightarrow N_x = 36 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = M a_{K1} \rightarrow M g - N_y = M a_{K1} \rightarrow N_y = M g - M a_{K1} \rightarrow N_y = 10 \text{ N}$$

$$\text{Άρα } N_A = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} \rightarrow N = 37,36 \text{ N}$$

ΓΔ.36 Λεπτή, άκαμπτη και ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους $d = 2\text{m}$ και μάζας $M = 5,6\text{ kg}$ ισορροπεί με τη βοήθεια οριζόντιου νήματος, μη εκτατού, που συνδέεται στο μέσο της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το άκρο Α της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο.

Δίνεται: $\eta\mu\varphi = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$

α. Να προσδιορίσετε τη δύναμη F που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.

Μικρή ομογενής σφαίρα, μάζας $m = 0,4\text{ kg}$ και ακτίνας $r = 1/70\text{ m}$ κυλίεται χωρίς ολίσθηση, έχοντας εκτοξευθεί κατά μήκος της ράβδου από το σημείο Κ προς το άκρο Γ.

β. Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας κατά την κίνησή της από το Κ μέχρι το Γ.

γ. Με δεδομένο ότι η σφαίρα φτάνει στο άκρο Γ, να βρείτε τη σχέση που περιγράφει την τάση του νήματος σε συνάρτηση με την απόσταση του σημείου επαφής της σφαίρας με τη ράβδο, από το σημείο Κ.

Αφού η σφαίρα έχει εγκαταλείψει τη ράβδο, κόβουμε το νήμα. Η ράβδος στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α, χωρίς τριβές.

δ. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου στη θέση στην οποία η ράβδος σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφο που διέρχεται από το άκρο Α, όπως στο παρακάτω σχήμα.

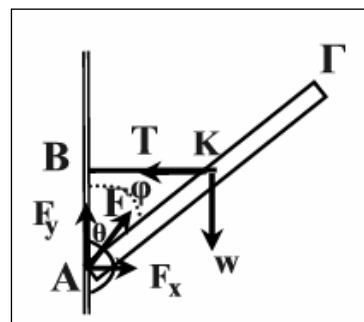
Δεύτερη λεπτή, άκαμπτη και ομογενής ράβδος ΑΔ, μήκους $d' = d$ και μάζας $M' = 3M$ είναι αρθρωμένη και αυτή στο σημείο Α γύρω από τον ίδιο άξονα περιστροφής με την ράβδο ΑΓ. Η ράβδος ΑΔ συγκρατείται ακίνητη, με κατάλληλο μηχανισμό, σε θέση όπου σχηματίζει γωνία φ με τον κατακόρυφο τοίχο όπως στο σχήμα. Οι δύο ράβδοι συγκρούονται και ταυτόχρονα ο μηχανισμός ελευθερώνει τη ράβδο ΑΔ χωρίς απώλεια ενέργειας. Οι ράβδοι μετά την κρούση κινούνται σαν ένα σώμα, χωρίς τριβές. Ο χρόνος της κρούσης θεωρείται αμελητέος.

ε. Να υπολογίσετε το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.

Όλες οι κινήσεις πραγματοποιούνται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας I_p λεπτής ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους d , ως προς άξονα που διέρχεται από το ένα της άκρο και είναι κάθετος σε αυτή: $I_p = 1/3 M d^2$.

Η ροπή αδράνειας $I_{\sigma\varphi}$ ομογενούς σφαίρας μάζας m και ακτίνας r ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της: $I_{\sigma\varphi} = (2/5)mr^2$ και $g = 10\text{m/s}^2$



Λύση

α. Ισορροπία ράβδου: $\Sigma\tau_A = 0 \rightarrow T(AB) - w(BK) = 0 \rightarrow$

$$T \frac{d}{2} \sigma\upsilon\nu\varphi = w \frac{d}{2} \eta\mu\varphi \rightarrow T = 42\text{N}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_x = T = 42\text{N} \text{ και } \Sigma F_y = 0 \rightarrow F_y = w = 56\text{N}$$

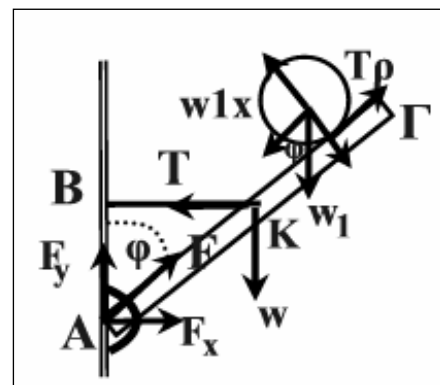
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \rightarrow F = 70\text{N} \text{ με } \epsilon\varphi\theta = \frac{F_x}{F_y} = \frac{42}{56} = \frac{3}{4} = \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \epsilon\varphi\varphi \rightarrow \theta = \varphi$$

β. Η κύλιση της σφαίρας είναι επιβραδυνόμενη

$$\Sigma F_x = ma_1 \rightarrow mg \sigma\upsilon\nu\varphi - T = ma_2 \rightarrow mg \sigma\upsilon\nu\varphi - T_p = ma_{\gamma\nu} \quad (1)$$

$$\Sigma\tau = I_{\sigma\varphi} \alpha_{\gamma\nu} \rightarrow T_p r = \frac{2mr^2}{5} \alpha_{\gamma\nu} \rightarrow T_p = \frac{2mr \alpha_{\gamma\nu}}{5} \quad (2)$$

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow \alpha_{\gamma\nu} = 5g \sigma\upsilon\nu\varphi / 7r \rightarrow \alpha_{\gamma\nu} = 400\text{rad/s}^2$$

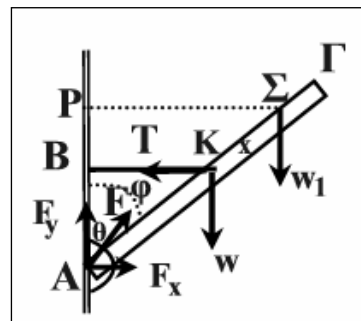


$$\gamma. \Sigma \tau_A = 0 \rightarrow T(AB) - Mg(BK) - mg(\Sigma P) = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma P = (A\Sigma)\eta\mu\varphi = \left(\frac{d}{2} + x\right)\eta\mu\varphi = 0,6(1+x),$$

$$BK = \frac{d}{2}\eta\mu\varphi = 0,6\text{m και } AB = \frac{d}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$$

$$(3) \rightarrow T = \frac{Mg(BK) + mg(\Sigma P)}{(AB)} \rightarrow T = 45 + 3x \text{ με } 0 \leq x \leq 1\text{m}$$

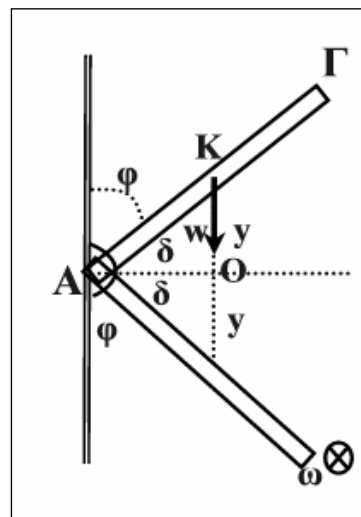


δ. Το κέντρο μάζας της ράβδου πέφτει κατά $h = 2y$ όπου $y = (d/2)\eta\mu\delta \rightarrow y = (d/2)\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8\text{m}$

Από την ΑΔΜΕ μεταξύ των δύο θέσεων που σχηματίζουν γωνία 2δ

$$\text{μεταξύ τους: } Mg2y = \frac{1}{2} \frac{Md^2}{3} \omega^2 \rightarrow \omega = 2\sqrt{6} \text{ rad/s}$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma \tau \cdot \omega = Mg(OA) \cdot \omega = Mg \frac{d}{2} \eta\mu\varphi \cdot \omega \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 67,2\sqrt{6} \text{ J/s}$$



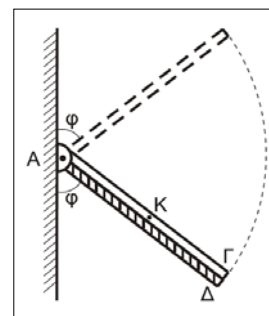
ε. Από την Αρχή διατήρησης της στροφορμής:

$$L_{\text{προ}} = L_{\text{μετα}} \rightarrow I_1 \omega = (I_1 + I_2) \omega' \rightarrow \frac{Md^2}{3} \omega = \left(\frac{Md^2}{3} + \frac{3Md^2}{3} \right) \omega' \rightarrow \omega' = \omega/4 \rightarrow$$

$$\omega' = 0,5\sqrt{6} \text{ rad/s}$$

$$K_{\text{προ}} = \frac{1}{2} \frac{Md^2}{3} \omega^2 \text{ και } K_{\text{μετα}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4Md^2}{3} \omega'^2$$

$$\Pi\% = \frac{K_{\text{μετα}} - K_{\text{προ}}}{K_{\text{προ}}} 100\% \rightarrow \Pi\% = -75\%$$



ΓΔ.37 Από το εσωτερικό σημείο Α ενός ημισφαιρίου ακτίνας $R=1,6\text{m}$ αφήνεται να κυλίσει μια μικρή σφαίρα μάζας $m=1,4\text{kg}$ ακτίνας $r=R/8$. Το ημισφαίριο είναι βυθισμένο στο έδαφος όπως φαίνεται στο σχήμα 3 και η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση.

α. Να εκφράσετε τη στατική τριβή T_σ που ασκείται στη σφαίρα συναρτήσει με το συνημίτονο της γωνίας, φ που σχηματίζει η ακτίνα ΟΓ του ημισφαιρίου με την ευθεία ΑΕ της επιφάνειας του εδάφους.

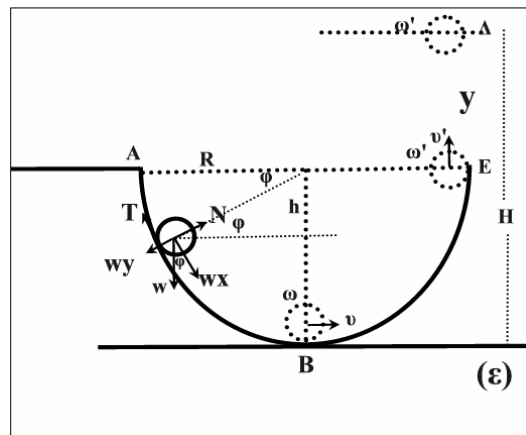
β. Να υπολογίσετε την κάθετη δύναμη που ασκεί η ημισφαιρική επιφάνεια στη σφαίρα όταν αυτή βρίσκεται στο σημείο Γ όπου $\varphi=30^\circ$.

Μια άλλη σφαίρα, όμοια με την προηγούμενη εκτοξεύεται από το κατώτατο σημείο Δ του ημισφαιρίου με ταχύτητα $v=6\text{m/s}$ και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο εσωτερικό του με κατεύθυνση προς το άκρο, Ε.

γ. Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος από την επιφάνεια του εδάφους που θα φτάσει η σφαίρα κατά την κίνησή της.

δ. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας και το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας αμέσως μόλις χάσει την επαφή με την επιφάνεια τη ημισφαιρίου στο σημείο, Ε.

Δίνεται για τη σφαίρα $I_{\text{cm}}=0,4mr^2$.



Λύση:

α. $\Sigma F_x = ma \rightarrow mg \sin \varphi - T_\sigma = ma$ (1) και

$\Sigma \tau = I_{\text{cm}} \alpha \rightarrow T_\sigma r = 0,4mr^2(a/r) \rightarrow T_\sigma = 2ma/5$ (2)

Από (1) (2) $\rightarrow T_\sigma = 2mg \sin \varphi / 7 \rightarrow T_\sigma = 4 \sin \varphi$

β. $N - w_y = \frac{mv^2}{x}$ όπου $x = R - r = R - \frac{R}{8} = \frac{7R}{8}$ και $w_y = mg \eta \mu \varphi = mg/2$

Άρα $N = \frac{mg}{2} + \frac{mv^2}{x}$ (3)

Από την ΑΔΜΕ: $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow mgh = \frac{7}{10}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{10gh/7}$ όπου $\eta \mu \varphi = h/x \rightarrow h = x/2$

Άρα $v = \sqrt{5gx/7}$ (4)

Από (3)(4) $\rightarrow N = \frac{mg}{2} + \frac{5mg}{7} \rightarrow N = 17\text{N}$

γ. Από την ΑΔΜΕ Από το Β στο Ε με $v = \omega r$ και $v' = \omega' r$:

$E_B = E_E \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}0,4mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}0,4mr^2\omega'^2 + mg(R-r) \rightarrow v' = 4\text{m/s}$

Από την ΑΔΜΕ από το Ε στο Δ με $\omega' = \text{σταθερό}$ και $v_\Delta = 0$

$E_E = E_\Delta \rightarrow \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}0,4mr^2\omega'^2 = \frac{1}{2}0,4mr^2\omega'^2 + mgy \rightarrow y = \frac{v'^2}{2g} \rightarrow y = 0,8\text{m}$

δ. $\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta K_\pi}{\Delta t} + \frac{\Delta K_\mu}{\Delta t} = 0 + (-mgu) = -mgu \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = -56\text{J/s}$

$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma \tau = 0$

