

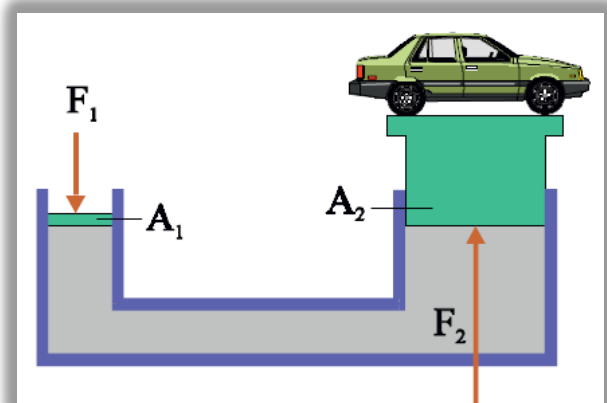
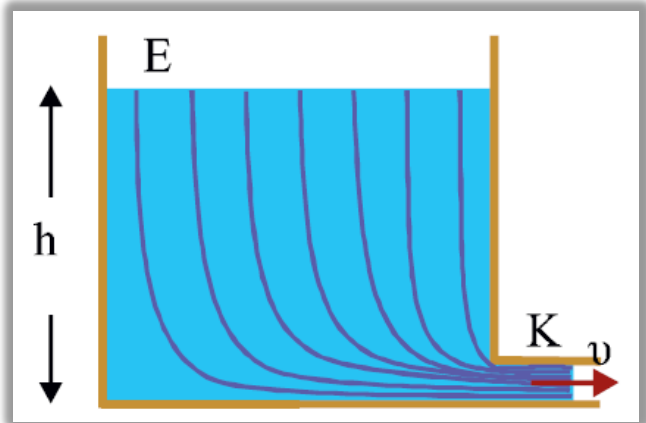
ΦΥΣΙΚΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΜΑΔΑΣ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ



Blaise Pascal (1623-1662)



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

Ρευστά

1. Ρευστά σε ισορροπία

Ρευστά → είναι τα υγρά και τα αέρια σώματα, τα οποία δεν έχουν δικό τους σχήμα, αλλά παίρνουν το σχήμα του δοχείου που τα περιέχει.

Τα υγρά είναι πρακτικά ασυμπίεστα, δηλαδή έχουν σταθερό όγκο ανεξάρτητο από την πίεση

Τα αέρια είναι συμπίεστα, που σημαίνει ότι ο όγκος τους εξαρτάται από την πίεσή τους.

Ποια είναι η αξία της μελέτης των ρευστών;

Τα ρευστά παίζουν σημαντικό ρόλο στη ζωή μας:

- Κινούμαστε μέσα σε ρευστά (ατμοσφαιρικός αέρας ή το νερό των θαλασσών, ποταμών, λιμνών)
- Ζούμε αναπνέοντας τον ρευστό αέρα
- Το αίμα μας είναι ρευστό
- Μεταφέρουμε τεράστιες ποσότητες υγρών σε πολύ μεγάλες αποστάσεις (π.χ. πετρέλαιο)
- Εκμεταλλευόμαστε την ενέργεια των ρευστών για να λύσουμε πολλά πρακτικά προβλήματα και να αναπτυχθούμε

Επομένως όλα τα παραπάνω δημιουργούν την ανάγκη μελέτης των νόμων που διέπουν την ισορροπία και την κίνηση των ρευστών.

Πίεση(P) → ονομάζουμε το **μονόμετρο** φυσικό μέγεθος που εκφράζεται από το πηλίκο της δύναμης (dF_K) που ασκείται κάθετα σε μια ορισμένη επιφάνεια προς το εμβαδόν της επιφάνειας(dA), δηλαδή:

$$P = \frac{dF_K}{dA}$$

Η μονάδα της πίεσης στο S.I. είναι το: $1Pa = \frac{1N}{m^2}$ (1 Pascal)

Που οφείλεται η πίεση σε διάφορα σημεία του χώρου που καταλαμβάνει ένα υγρό και στα τοιχώματα του δοχείου μέσα στο οποίο βρίσκεται;

- Στο βάρος του
- Σε κάποιο εξωτερικό αίτιο (π.χ. κάποιο έμβολο)

Υδροστατική πίεση → η πίεση που ασκούν τα ρευστά εξαιτίας του βάρους τους (όταν ισορροπούν)

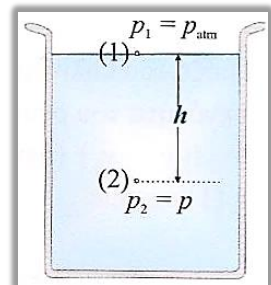
Νόμος της υδροστατικής πίεσης →

$$P = \rho gh$$

ρ = η πυκνότητα του υγρού, g = η επιτάχυνση της βαρύτητας, h = το βάθος από την επιφάνεια του υγρού

Όταν η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού είναι σε επαφή με τον ατμοσφαιρικό αέρα τότε:

$$P = P_{atm} + \rho gh$$



Παρατηρήσεις:

- ✓ Η υδροστατική πίεση υπάρχει **μόνο** όταν το υγρό βρίσκεται μέσα σε πεδίο βαρύτητας.
- ✓ Την υδροστατική πίεση την μετράμε με ειδικά όργανα που ονομάζονται **μανόμετρα** (με τα μανόμετρα μετράμε την πίεση που ασκείται στην επιφάνεια μια μικρής ελαστικής μεμβράνης την οποία έχουμε βυθίσει στο νερό).
- ✓ Αν ένα μανόμετρο το βυθίσουμε σε υγρό σε συγκεκριμένο βάθος (h), όποιο προσανατολισμό(κατακόρυφο, πλάγιο, οριζόντιο) και να έχει το μανόμετρο (δηλ. η μεμβράνη), τότε το μανόμετρο θα μετράει την ίδια πίεση στο βάθος (h). Επομένως:
- ✓ «Η υδροστατική πίεση είναι ανεξάρτητη του προσανατολισμού της επιφάνειας»
Μπορούμε να λέμε: Τα υγρά ασκούν πίεση προς οποιαδήποτε κατεύθυνση

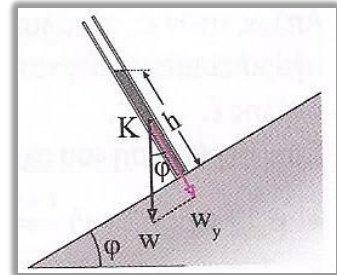
Πως βρίσκω την υδροστατική πίεση όταν ο στενόμακρος σωλήνας είναι σε πλάγια θέση;

Επειδή από τον ορισμό της πίεσης έχουμε: $P = \frac{F_K}{A}$, όπου F_K = η κάθετη δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια εμβαδού A , παρατηρούμε ότι η πίεση του υγρού στη βάση του σωλήνα θα οφείλεται στην κατακόρυφη συνιστώσα του βάρους w_y .

Επομένως:

$$P = \frac{w_y}{A} \rightarrow P = \frac{mg \sin \varphi}{A} = \frac{dVg \sin \varphi}{A} = \frac{\rho Ahg \sin \varphi}{A} \Rightarrow$$

$$P = \rho gh \sin \varphi$$



Ισορροπία υγρών σε κατακόρυφο υοειδή σωλήνα

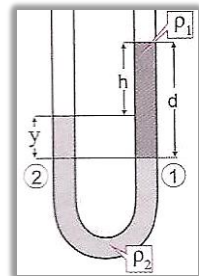
Μεθοδολογία

Το σύστημα των δυο υγρών πυκνοτήτων ρ_1 και ρ_2 στον ισοδιαμετρικό υοειδή σωλήνα ισορροπεί. Τη μελέτη αυτής της ισορροπίας τη διευκολύνει η παρατήρηση ότι οι πιέσεις στη διαχωριστική επιφάνεια (1) των δυο υγρών και στην ακριβώς απέναντί της επιφάνεια (2) του άλλου σωλήνα είναι ίσες.

Έτσι: $P_1 = P_2 \rightarrow P_{atm} + \rho_1 g d = P_{atm} + \rho_2 g y \rightarrow \rho_1 g d = \rho_2 g y$ (1)

Επίσης: $d = y + h$ (2)

Από τις εξισώσεις (1) και (2) μπορούμε να υπολογίσουμε δυο άγνωστα μεγέθη αυτής της ισορροπίας.



Αρχή του Pascal

« Η μεταβολή της πίεσης που δημιουργεί ένας εξωτερικός παράγοντας σε κάποιο σημείο ενός υγρού, το οποίο βρίσκεται σε κλειστό δοχείο, μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του υγρού »

Υπολογισμός της πίεσης σε κάποιο σημείο ενός υγρού, στην περίπτωση που αυτό βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας

Προσοχή!!! --> όταν το υγρό βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας δεν υπάρχει υδροστατική πίεση, επομένως η πίεση σε οποιοδήποτε σημείο του υγρού, θα οφείλεται μόνο σε κάποιο εξωτερικό αίτιο.

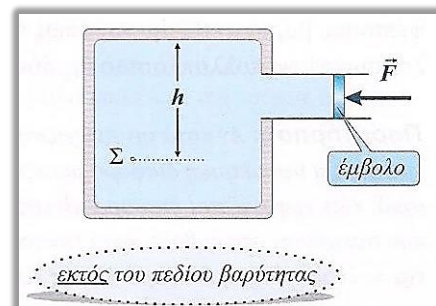
Για παράδειγμα στο διπλανό σχήμα με το έμβολο να

ασκεί πίεση:

$$P = \frac{F}{A}$$

όπου A = το εμβαδόν του εμβόλου.

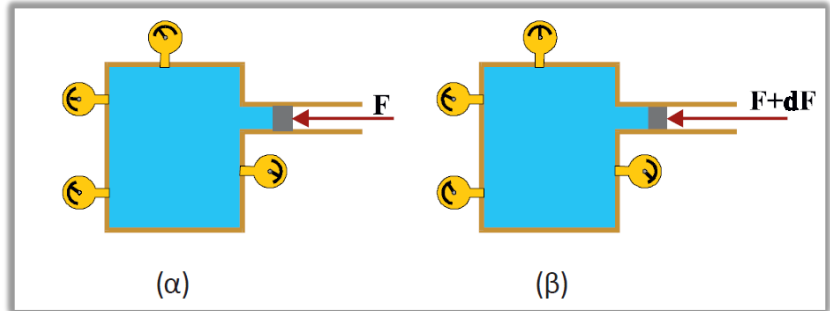
Λόγω της «Αρχής του Pascal»: $P_\Sigma = P_{εξ} = \frac{F}{A}$



Για παράδειγμα :

Τα δοχεία του διπλανού σχήματος βρίσκονται **εκτός πεδίου βαρύτητας**.

Στο δοχείο (α) έχουμε σε όλα τα μανόμετρα την ίδια πίεση ενώ στο δοχείο (β) που αυξάνουμε τη δύναμη στο έμβολο κατά dF αυξάνεται



αντίστοιχα σε όλα τα μανόμετρα και η πίεση κατά $dp = \frac{dF}{A}$ (Α το εμβαδόν του εμβόλου).

Αυτό εξάλλου αποτελεί και μια έμμεση απόδειξη της « αρχής του Pascal » .

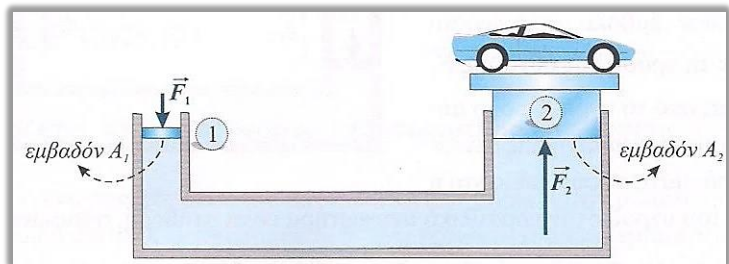
Αν τα δοχεία του παραπάνω σχήματος βρίσκονταν **εντός του πεδίου βαρύτητας**, η πίεση που θα δείχνουν τα μανόμετρα θα είναι διαφορετική σε καθένα από αυτά ανάλογα με το βάθος στο οποίο βρίσκεται. Αν πάλι αυξηθεί η δύναμη που ασκείται στο έμβολο κατά dF τότε θα αυξηθεί και η πίεση (ισόποσα) σε όλα τα μανόμετρα κατά $dp = \frac{dF}{A}$ (Α το εμβαδόν του εμβόλου).

Το υδραυλικό πιεστήριο ως εφαρμογή της «Αρχής του Pascal»

Που στηρίζεται η λειτουργία του «υδραυλικού ανυψωτήρα»:

Την μετάδοση της πίεσης (Αρχή του Pascal) λόγω ενός εξωτερικού αιτίου σε όλα τα σημεία του υγρού.

Έμβολο (1): $P_1 = \frac{F_1}{A_1}$



Έμβολο (2): $P_2 = \frac{F_2}{A_2}$ Λόγω της «αρχής του Pascal» : $P_1 = P_2 \rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow$

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

Επειδή $A_2 > A_1 \rightarrow F_2 > F_1$.

Επομένως με μικρή δύναμη στο έμβολο (1), μπορούμε να πάρουμε στο έμβολο (2) μεγάλη δύναμη, ώστε να ανυψώσουμε βαριά αντικείμενα π.χ. αυτοκίνητα. Δηλ. ο «υδραυλικός ανυψωτήρας» λειτουργεί ως ένα είδος **μοχλού** ή πιο απλά **πολλαπλασιαστή δύναμης**

Υδραυλικός ανυψωτήρας και ενέργεια

Η ενέργεια που ξοδεύουμε, μέσω του έργου (dW_{F1}) της δύναμης F_1 , για την μετακίνηση του εμβόλου (1) κατά dy_1 είναι:

$$E_{\text{δαπ}} = dW_{F1} = F_1 \cdot dy_1 \quad (1),$$

Ενώ η ενέργεια που παρέχει το υγρό στο έμβολο (2) είναι:

$$E_{\omega\phi} = dW_{F2} = F_2 \cdot dy_2 \quad (2)$$

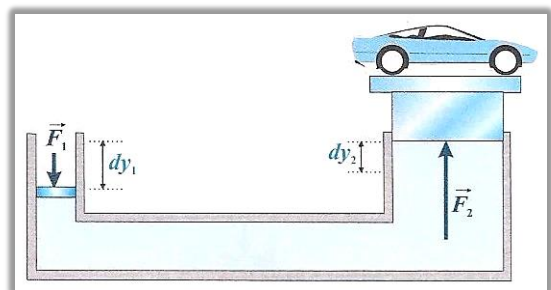
Επειδή όμως το υγρό είναι ασυμπίεστο ισχύει ότι:

$$dV_1 = dV_2 \rightarrow A_1 \cdot dy_1 = A_2 \cdot dy_2 \rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{dy_2}{dy_1} \quad (3)$$

Στον «υδραυλικό ανυψωτήρα» δείξαμε ότι: $F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1} \rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{F_2}{F_1} \quad (4)$

Από (3) και (4) $\rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{dy_2}{dy_1} \rightarrow F_2 \cdot dy_2 = F_1 \cdot dy_1$, οπότε από (1) και (2) $\rightarrow$

$$E_{\text{δαπ}} = E_{\omega\phi}$$



Άρα: « Η ενέργεια που ξοδεύουμε για να μετακινήσουμε το έμβολο (1) του υδραυλικού ανυψωτήρα, μεταφέρεται μέσω του υγρού, αμετάβλητο, στο έμβολο (2) και επομένως στο σώμα που ανυψώνει. Με την προϋπόθεση βέβαια ότι δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας λόγω τριβών » .

Παρατηρήσεις:

➤ Στην πράξη όμως το κέντρο μάζας (c.m) του μετατοπιζόμενου όγκου dV_1 στη 1^η στήλη του υδραυλικού ανυψωτήρα κατεβαίνει περισσότερο από ανεβαίνει το κέντρο μάζας του μετατοπιζόμενου όγκου dV_2 της 2^{ης} στήλης του ανυψωτήρα, δηλαδή θα έχουμε:

$$dW_{F1} + dU_1 = dW_{F2} + dU_2 \Rightarrow dW_{F1} + dU_1 - dU_2 = dW_{F2} \Rightarrow dW_{F1} + dU_{c.m} = dW_{F2} \Rightarrow$$

$$dW_{F1} + dm \cdot g \cdot dy_{c.m} = dW_{F2}$$

Όμως η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας : $dU_{c.m} = dm \cdot g \cdot dy_{c.m} = dm \cdot g \cdot (dy_1 - dy_2)$, είναι πολύ μικρή λόγω των πολύ μικρών μετατοπίσεων: dy_1 και dy_2

➤ Επομένως για να ισχύουν αυτά που είπαμε για τον υδραυλικό ανυψωτήρα πρέπει να ισχύουν οι εξής παραδοχές:

A) Οι δυνάμεις F_1 , F_2 που ασκούνται στα έμβολα να είναι σταθερές.

B) Οι μετατοπίσεις dy_1 , dy_2 να είναι πολύ μικρές (αμελητέες)

Γ) Να μην υπάρχουν τριβές.

Αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων

«Όταν κάποιο υγρό βρίσκεται μέσα σε συγκοινωνούντα δοχεία και ισορροπεί, τότε σε όλα τα δοχεία η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού βρίσκεται στο ίδιο ύψος»

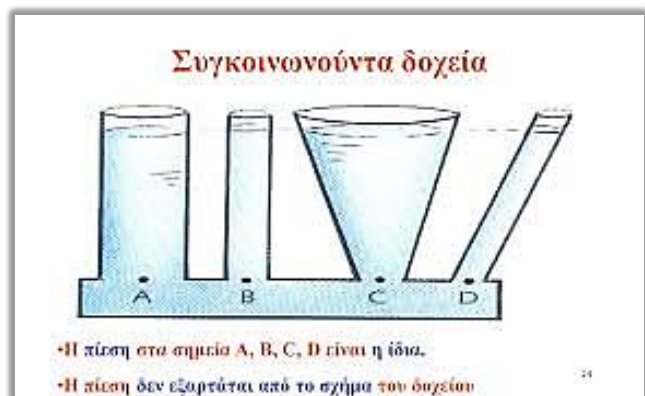
Η απόδειξη της παραπάνω αρχής

βασίζεται στη υδροστατική πίεση. Πράγματι αφού το υγρό ισορροπεί και στα τέσσερα δοχεία θα έχουμε: $p_A = p_B = p_C = p_D$ (1)

Αν δε συνέβαινε αυτό τότε θα είχαμε μετακίνηση υγρού από τα σημεία μεγαλύτερης πίεσης σε σημεία χαμηλότερης πίεσης και επομένως το υγρό δεν θα ισορροπούσε (κατάσταση ηρεμίας).

$$(1) \Rightarrow \rho g h_A = \rho g h_B = \rho g h_C = \rho g h_D \Rightarrow h_A = h_B = h_C = h_D$$

Επομένως η στάθμη του υγρού έχει το ίδιο ύψος σε όλα τα δοχεία.



Άνωση → η δύναμη που δέχεται κάθε σώμα που βυθίζεται σε υγρό.

Που οφείλεται η άνωση → στην υδροστατική πίεση.

Είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται, λόγω της υδροστατικής σε ένα σώμα που βυθίζεται μέσα σε κάποιο υγρό. Έχει διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα πάνω.

Αρχή του Αρχιμήδη:

«Η άνωση που δέχεται κάθε σώμα που βυθίζεται σε ένα υγρό έχει μέτρο που ισούται με το βάρος του υγρού που εκτοπίζεται από το σώμα, δηλαδή:

$$A = \rho g V_{\text{εκτοπιζ.υγρού}} = \rho g V_{\text{βυθισμένου σώματος}}$$

Παρατηρήσεις:

❖ Η άνωση **δεν εξαρτάται** από το σχήμα και το βάρος του σώματος που βυθίζεται

❖ Η άνωση είναι **ανεξάρτητη** από το βάθος που βρίσκεται το σώμα, αρκεί αυτό να είναι εξολοκλήρου βυθισμένο στο υγρό

Ατμοσφαιρική πίεση → είναι η πίεση που οφείλεται στο βάρος του αέρα.

(Στη σελήνη έχουμε ατμοσφαιρική πίεση;)

Πως μετράμε την ατμοσφαιρική πίεση;

Με ειδικά όργανα που λέγονται **βαρόμετρα**.

Ποιος, πότε και πως μέτρησε την ατμοσφαιρική πίεση;

Ο Ιταλός **Evangelista Toricelli** το **1643**.

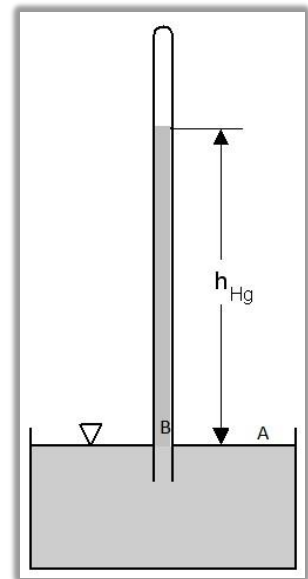
Γέμισε με υδράργυρο ένα γυάλινο σωλήνα 1m και τον αναποδογύρισε (κρατώντας τον κατακόρυφο) μέσα σε μια λεκάνη. Χύθηκε υδράργυρος στην λεκάνη και στο σωλήνα απέμεινε υδράργυρος ύψους 76cm. Το υγρό στη λεκάνη και στο σωλήνα ηρεμεί, άρα οι πιέσεις στα σημεία A και B είναι ίδιες: $p_A = p_B \Rightarrow p_B = p_{\text{Atm}}$. Επομένως η ατμοσφαιρική πίεση είναι ίση με την πίεση που ασκεί μια κατακόρυφη στήλη υδραργύρου ύψους h (για περιοχές που βρίσκονται στο υψόμετρο της θάλασσας $h=76\text{cm}=760\text{mm}$).

Η πίεση που ασκεί στήλη υδραργύρου ύψους 1mm την ονομάζουμε Torr.

Άρα: **1Atm=760Torr**

Μονάδες ατμοσφαιρικής πίεσης:

1Atm=1,013.10⁵Pa -> Για τα προβλήματα δεχόμαστε: **1Atm=10⁵Pa**



1

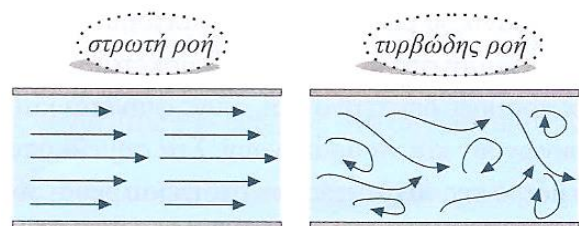
2. Ρευστά σε κίνηση

Στοιχείο ρευστού ή σωματίδιο ρευστού

Θεωρούμε ένα πολύ μικρό τμήμα του ρευστού, το οποίο όμως περιέχει έναν πολύ μεγάλο αριθμό μορίων. Απλά θεωρούμε ότι το *στοιχείο ρευστού*, έχει απειροελάχιστο όγκο σε σχέση με τον όγκο του υγρού.

Στρωτή → είναι η ροή ενός ρευστού, όταν τα παρακείμενα επίπεδα (στρώσεις) που το αποτελούν κινούνται απρόσκοπτα το ένα ως προς το άλλο.

Παράδειγμα: η ροή του νερού που εξέρχεται από τη βρύση όταν την έχουμε ανοίξει λίγο, οπότε η ποσότητα του νερού που εξέρχεται από αυτήν είναι μικρή.



Τυρβώδης ή στροβιλώδης ροή → όταν στο ρευστό δημιουργούνται δίνες, που καταστρέφουν την ομαλή πορεία κίνησης των στρώσεων του υγρού.

Παράδειγμα: η ροή του νερού που εξέρχεται από μια βρύση, που έχουμε ανοίξει πολύ, οπότε παρατηρούμε τυρβώδη ροή, στην οποία τα σωματίδια του νερού έχουν πολύπλοκη ροή.

Μόνιμη ροή → η ροή όπου η ταχύτητα του ρευστού σε κάθε σημείο του παραμένει σταθερή με την πάροδο του χρόνου.

Ιδανικό ρευστό

Ένα ρευστό ιδανικό, πρέπει να πληρεί τις εξής προϋποθέσεις:

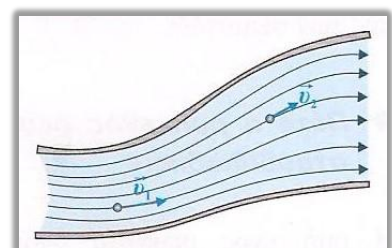
- Να είναι ασυμπίεστο
- Να μην εμφανίζει εσωτερικές τριβές και τριβές με τα τοιχώματα του σωλήνα στον οποίο ρέει.

Ρευματική γραμμή → είναι το σύνολο των θέσεων από τις οποίες διέρχεται ένα στοιχείο του ρευστού, κατά τη διάρκεια της *στρωτής* ροής του.

Η ταχύτητα κάθε στοιχείου ενός ιδανικού ρευστού είναι εφαπτόμενη στη ρευματική γραμμή στο σημείο όπου βρίσκεται.

Ιδιότητες των ρευματικών γραμμών

✓ Ποτέ **δεν τέμνονται**, στην στρωτή ροή (διαφορετικά θα είχαμε δυο ή περισσότερες ταχύτητες το ρευστού σε ένα σημείο του)



✓ **Η πυκνότητα των ρευματικών γραμμών, είναι ανάλογη της ταχύτητας του ρευστού, δηλ. εκεί όπου η ταχύτητα του στοιχείου του ρευστού είναι μεγάλη, θα έχουμε πύκνωση των ρευματικών γραμμών.**

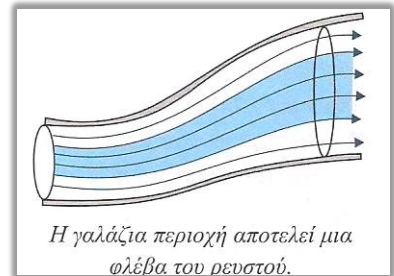
✓ **Στις περιοχές, όπου οι ρευματικές γραμμές είναι παράλληλες, κάθε στοιχείο του ρευστού έχει την ίδια ταχύτητα.**

Φλέβα ρευστού

Μπορούμε να θεωρούμε τη φλέβα να αποτελείται από πολλές ρευματικές γραμμές, συνιστώντας ένα πρισματικό στερεό.

Το ρευστό που ρέει σε κάποια φλέβα, δεν αναμειγνύεται με το περιεχόμενο άλλης φλέβας του σωλήνα μεταφοράς του ρευστού.

Το ρευστό που ρέει σε μια φλέβα παραμένει στη φλέβα αυτή καθ' όλη τη διάρκεια της ροής του.



Παροχή (Π) ενός σωλήνα ή μιας φλέβας ενός ρευστού

Ονομάζεται το πηλίκο του όγκου (dV) που διέρχεται από μια διατομή του σωλήνα ή της φλέβας σε ορισμένο χρόνο dt προς τον χρόνο αυτό, δηλ.

$$\Pi = \frac{dV}{dt}$$

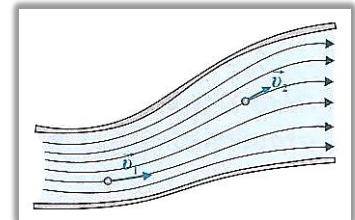
Σχέση παροχής και ταχύτητας ροής του ρευστού

$$\Pi = A \cdot u$$

Εξίσωση της συνέχειας

Η παροχή κατά μήκος ενός σωλήνα που διαρρέεται από διαρρέεται από ιδανικό ρευστό παραμένει σταθερή δηλ.

$$A_1 \cdot u_1 = A_2 \cdot u_2 \rightarrow \Pi_1 = \Pi_2 \text{ ή } \Pi = \text{σταθ.}$$



Παρατηρήσεις:

- Η «εξίσωσης της συνέχειας» εφαρμόζεται κατά μήκος φλέβας ή σωλήνα και όχι ρευματικής γραμμής.
- Η «εξίσωση της συνέχειας» μας λέει ότι στα σημεία που ο σωλήνας είναι πιο στενός, η ταχύτητα ροής του ρευστού είναι μεγαλύτερη
- Η «εξίσωση της συνέχειας εκφράζει την «αρχή διατήρησης της ύλης»

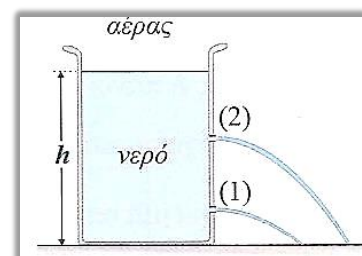
Ένα πρόβλημα στο οποίο θέλει προσοχή η εφαρμογή της «εξίσωσης της συνέχειας»

Εδώ για την ταχύτητα εκροής του υγρού από τις οπές (1) και (2) δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την εξίσωση της συνέχειας ξεχωριστά για την ελεύθερη επιφάνεια και τις οπές (1) και (2). Δηλαδή είναι λάθος να γράψουμε:

$$\Pi_{\text{επιφ}} = \Pi_1 \rightarrow A_{\text{επιφ}} u_{\text{επιφ}} = A_1 u_1 \xrightarrow{A_{\text{επιφ}} \gg A_1} u_{\text{επιφ}} = 0$$

$$\text{Και } \Pi_{\text{επιφ}} = \Pi_2 \rightarrow A_{\text{επιφ}} u_{\text{επιφ}} = A_2 u_2 \xrightarrow{A_{\text{επιφ}} \gg A_2} u_{\text{επιφ}} = 0$$

Γιατί αφού η «εξίσωση της συνέχειας» εκφράζει την «αρχή διατήρησης της ύλης» θα πρέπει να



ισχύει:

$$\Pi_{\text{επιφ}} = \Pi_1 + \Pi_2$$

Επομένως για να εφαρμόσουμε την «εξίσωση του Bernoulli» για κάθε σπή και να βγάλουμε τους τύπους: $u_1 = \sqrt{2gh_1}$ και $u_2 = \sqrt{2gh_2}$ (Θεώρημα Torricelli), αρκεί να πούμε μια φορά μόνο ότι: Επειδή η ελεύθερη επιφάνεια είναι πολύ μεγάλου εμβαδού, πρακτικά παραμένει ακίνητη ή κατεβαίνει πολύ αργά, ώστε να μπορούμε να θεωρούμε $\rightarrow u_{\text{επιφ}} = 0$

Ερωτήσεις – εφαρμογής της «εξίσωσης της συνέχειας»

- Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι παροχές σε m^3/s και οι κατευθύνσεις στις οποίες κινείται το νερό σε διάφορες των σωλήνων ενός οριζόντιου υδραυλικού συστήματος. Να υπολογίσετε την παροχή στην περιοχή Γ του συστήματος και την κατεύθυνση στην οποία κινείται το νερό.

Λύση:

Από την «εξίσωση της συνέχειας»:

Εισερχόμενη Παροχή = Εξερχόμενη Παροχή $\rightarrow$

$6+10+22+\Pi_{\Gamma} = 11+12+8 \rightarrow \Pi_{\Gamma} = 31-38 \rightarrow \Pi_{\Gamma} = -7\text{m}^3/\text{s}$. Το πρόσημο (-) δηλώνει ότι από το σημείο Γ εξέρχεται νερό. Άρα: **$\Pi_{\Gamma} = 7\text{m}^3/\text{s}$**

- Αν είναι ανοικτή μόνο η βρύση (1), η μεγάλη δεξαμενή του σχήματος γεμίζει σε χρόνο t_1 . Αν είναι ανοικτή μόνο η βρύση (2), η δεξαμενή γεμίζει σε χρόνο t_2 . Αν είναι ανοικτές και οι δυο βρύσες ταυτόχρονα, σε πόσο χρόνο ($t_{\text{ολ}}$) γεμίζει η δεξαμενή;

Λύση:

Έστω ΔV ο όγκος της δεξαμενής, Π_1, Π_2 οι παροχές νερού από τις βρύσες (1) και (2) αντίστοιχα και Π η παροχή του νερού και από τις δυο βρύσες μαζί.

Εφαρμόζοντας την «εξίσωση της συνέχειας» έχουμε:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 \rightarrow \frac{\Delta V}{t_{\text{ολ}}} = \frac{\Delta V_1}{t_1} + \frac{\Delta V_2}{t_2} \rightarrow t_{\text{ολ}} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}$$

- Ανάμιξη υγρών διαφορετικών πυκνοτήτων σε υδραυλική εγκατάσταση- υπολογισμός τελικής πυκνότητας**

Από τις εισόδους (1) και (2) εισέρχονται δυο διαφορετικά υγρά με πυκνότητες $\rho_1 = 700\text{Kg}/\text{m}^3$ $\rho_2 = 1000\text{Kg}/\text{m}^3$ αντίστοιχα. Οι εισοδοί (1), (2) και (3) έχουν διατομές $A_1 = 8\text{cm}^2$, $A_2 = 10\text{cm}^2$ και $A_3 = 12\text{cm}^2$ αντίστοιχα. Για τις ταχύτητες εισόδου των υγρών έχουμε $u_1 = 10\text{m}/\text{s}$ και $u_2 = 4\text{m}/\text{s}$. Μετά την ανάμειξη των δυο υγρών προκύπτει υγρό πυκνότητας ρ που εξέρχεται από την έξοδο (3) με ταχύτητα u_3 .

Α) Ποια είναι η ταχύτητα u_3

Β) Πόση είναι η πυκνότητα ρ του εξερχόμενου υγρού

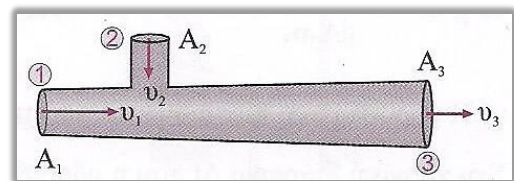
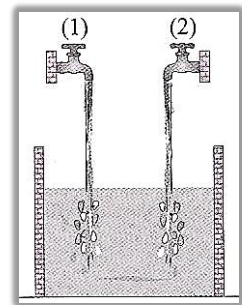
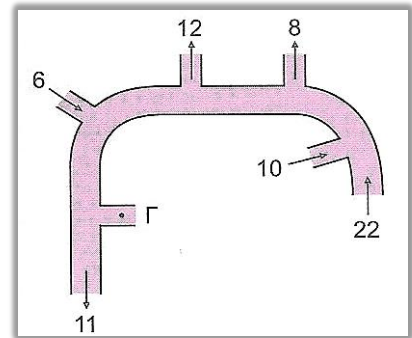
Λύση:

Α) «Εξίσωση συνέχειας» $\rightarrow \Pi_1 + \Pi_2 = \Pi_3 \rightarrow A_1 u_1 + A_2 u_2 = A_3 u_3 \rightarrow u_3 = 10\text{m}/\text{s}$

Β) Για την απάντηση στο ερώτημα αυτό χρησιμοποιούμε την «αρχή διατήρησης της μάζας», που σημαίνει ότι όσο υγρό μπαίνει σε χρόνο Δt , τόσο υγρό βγαίνει, στον ίδιο χρόνο Δt από την υδραυλική εγκατάσταση. Επομένως:

$\Delta m_1 + \Delta m_2 = \Delta m_3 \rightarrow \rho_1 \Delta V_1 + \rho_2 \Delta V_2 = \rho \Delta V_3 \rightarrow \rho_1 A_1 u_1 + \rho_2 A_2 u_2 = \rho A_3 u_3 \rightarrow$

$$\frac{\rho_1 \Delta V_1}{\Delta t} + \frac{\rho_2 \Delta V_2}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V_3}{\Delta t} \rightarrow \rho_1 \Pi_1 + \rho_2 \Pi_2 = \rho \Pi_3 \rightarrow \rho_1 A_1 u_1 + \rho_2 A_2 u_2 = \rho A_3 u_3 \rightarrow$$

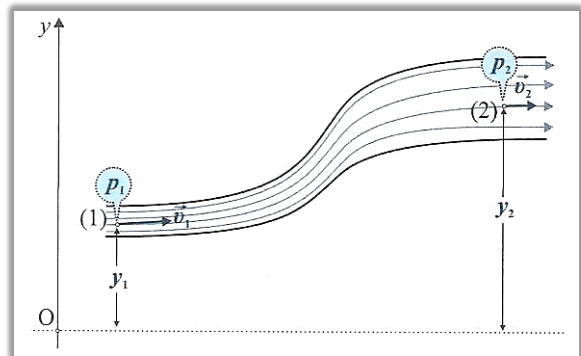


$$\rho = \frac{\rho_1 A_1 v_1 + \rho_2 A_2 v_2}{A_3 v_3} \rightarrow \rho = 800 \text{ Kg/m}^3$$

Εξίσωση του Bernoulli

Το άθροισμα της πίεσης (p), της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου ($\rho v^2/2$) και της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας ανά μονάδα όγκου ($\rho g y$) έχει την ίδια σταθερή τιμή σε οποιοδήποτε σημείο μιας ρευματικής γραμμής, δηλ.

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$



Παρατηρήσεις:

- Η «Εξίσωση του Bernoulli» εφαρμόζεται κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής.
- Η «Εξίσωση του Bernoulli» εκφράζει την «**αρχή διατήρησης της ενέργειας**»
- **Προσοχή!!** Η «εξίσωση του Bernoulli» ισχύει με τις εξής παραδοχές:
 - ❖ Η ροή να είναι μόνιμη
 - ❖ Οι τριβές που εμφανίζει το ρευστό να είναι αμελητέες
 - ❖ Το ρευστό να είναι ασυμπίεστο
 - ❖ Η ανταλλαγή θερμότητας του ρευστού με το περιβάλλον αμελητέα
 - ❖ Μεταξύ των σημείων της ρευματικής γραμμής, όπου εφαρμόζεται, να μην υπάρχει συσκευή που να προσφέρει ενέργεια στο ρευστό (π.χ. αντλία, ανεμιστήρας) ή να απορροφά ενέργεια από αυτό (π.χ. τουρπίνα)

➤ Άσκηση 3.27 του σχολικού βιβλίου (αντλία)

Μια αντλία χρησιμοποιείται για την άντληση νερού από πηγάδι βάθους 5m. Το νερό βγαίνει από την αντλία με σωλήνα διατομής 10 cm^2 και με ταχύτητα $v=20 \text{ m/s}$. Υπολογίστε την ισχύ της αντλίας. Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho=10^3 \text{ Kg/m}^3$ και $g=10 \text{ m/s}^2$

Λύση:

Θ.Μ.Κ.Ε. για την άντληση μιας στοιχειώδους ποσότητας νερού dm : $dK = dW_W + dW_{F_{\text{αντλίας}}} \rightarrow$

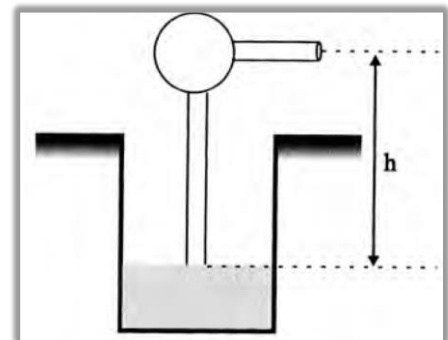
$$\frac{1}{2} dm v^2 = -dm g h + dW_{F_{\text{αντλίας}}} \rightarrow$$

$$dW_{F_{\text{αντλίας}}} = \frac{1}{2} dm v^2 + dm g h \rightarrow$$

$$P_{\text{αντλίας}} = \frac{dW_{F_{\text{αντλίας}}}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} v^2 + \frac{dm}{dt} g h \rightarrow$$

$$P_{\text{αντλίας}} = \frac{1}{2} \frac{\rho dV}{dt} v^2 + \frac{\rho dV}{dt} g h = \frac{1}{2} \rho \Pi v^2 + \rho \Pi g h \rightarrow$$

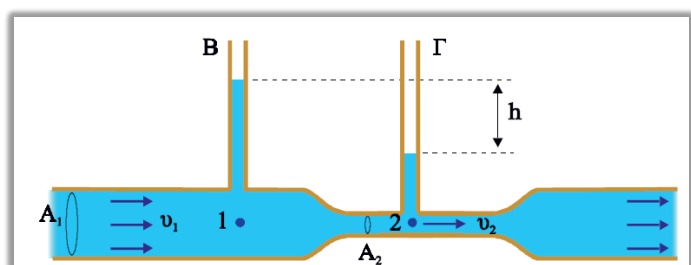
$$P_{\text{αντλίας}} = \frac{1}{2} \rho A v v^2 + \rho A v g h \rightarrow P_{\text{αντλίας}} = \frac{1}{2} \rho A v^3 + \rho A v g h \rightarrow P_{\text{αντλίας}} = 5000 \text{ W}$$



Ερωτήσεις εφαρμογής της «εξίσωσης του Bernoulli»

• Ροόμετρο Bentouri (Βεντουρίμετρο)

Με εφαρμογή της εξίσωσης της συνέχειας, της εξίσωσης Bernoulli και του νόμου της υδροστατικής πίεσης, μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα ροής (π.χ. την



u_1) σε ένα σωλήνα.

Από τις σχέσεις: $A_1 u_1 = A_2 u_2$,

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \quad \text{και} \quad P_1 - P_2 = \rho g h$$

μπορούμε να καταλήξουμε στην παρακάτω σχέση :

$$u_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2}}$$

• Κατακόρυφο Βεντουρίμετρο

Το σχήμα παριστάνει ένα κατακόρυφο βεντουρίμετρο στο οποίο έχει προσαρμοστεί ένα μανόμετρο υδραργύρου σχήματος U. Στην περιοχή του σημείου (1) ο κυλινδρικός σωλήνας έχει διατομή τριπλάσιου εμβαδού από ό,τι στην περιοχή (2). Από το ροόμετρο διέρχεται νερό πυκνότητας ρ , με αποτέλεσμα η στάθμη του υδραργύρου στον σωλήνα U να εμφανίζει υψομετρική διαφορά h_1 . Η πυκνότητα του υδραργύρου είναι ρ_{Hg} , η ταχύτητα του νερού στην περιοχή του σημείου (1) είναι u_1 και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g . Πόση είναι η υψομετρική διαφορά h_1 ;

Λύση:

Εξίσωση συνέχειας ανάμεσα στα σημεία (1) και (2):

$$A_1 u_1 = A_2 u_2 \xrightarrow{A_1 = 3A_2} u_2 = 3u_1 \quad (1)$$

Εξίσωση Bernoulli ανάμεσα στα σημεία (1) και (2) του ροόμετρου:

Εξίσωση Bernoulli ανάμεσα στα σημεία (1) και (2) του ροόμετρου:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \xrightarrow{(1)} P_1 - P_2 = 4\rho u_1^2 + \rho g h \quad (2)$$

Στο σωλήνα του μανόμετρου τα υγρά ισορροπούν, επομένως: $P_\Gamma = P_\Delta \rightarrow$

$$P_B + \rho g(d+h_1) = P_K + \rho g(h+d) + \rho_{Hg} g h_1 \xrightarrow{P_K = P_2, P_B = P_1} P_1 + \rho g(d+h_1) = P_2 + \rho g(h+d) + \rho_{Hg} g h_1 \rightarrow$$

$$h_1 = \frac{4\rho u_1^2}{g(\rho_{Hg} - \rho)}$$

• Στο σωλήνα του σχήματος που είναι μεταβλητής διατομής ρέει ιδανικό υγρό. Η προσφερόμενη ενέργεια ανά μονάδα όγκου για τη μετακίνηση του υγρού από το τμήμα A στο τμήμα B είναι μικρότερη από την προκαλούμενη αύξηση της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου του υγρού. Οι διατομές A_1 και A_2 συνδέονται με τη σχέση

$$\alpha) A_1 = A_2 \quad \beta) A_1 < A_2 \quad \gamma) A_1 > A_2$$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση:

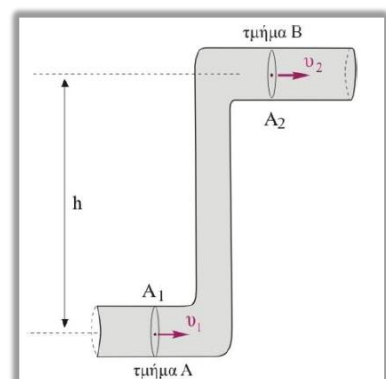
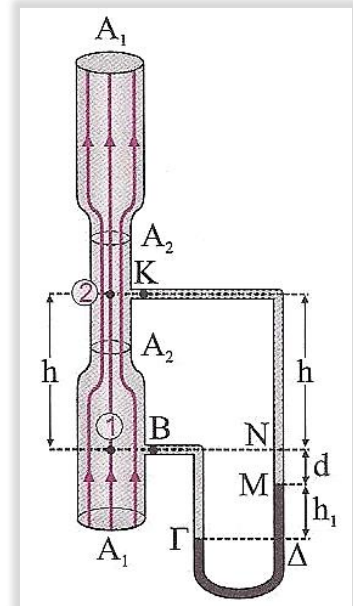
Από την «εξίσωση του Bernoulli» έχουμε:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 + \rho g y_2 \rightarrow$$

$$\frac{F_1}{A_1} - \frac{F_2}{A_2} = \rho g(y_2 - y_1) + \frac{1}{2} \rho g(u_2^2 - u_1^2) \rightarrow \frac{F_1 dx_1}{A_1 dx_1} - \frac{F_2 dx_2}{A_2 dx_2} = \rho g(y_2 - y_1) + \frac{1}{2} \rho g(u_2^2 - u_1^2) \rightarrow$$

$$\frac{dW_1 - dW_2}{dV} = \frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dV} + \frac{dK}{dV} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{E_{\text{προσφ}}}{dV} = \frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dV} + \frac{dK}{dV}} \quad (1)$$



Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι:

« η προσφερόμενη ανά μονάδα όγκου, ενέργεια, στο ρευστό, ισούται με το άθροισμα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου συν τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου »

Είναι με άλλα λόγια η «αρχή διατήρησης της ενέργειας» για το ρευστό, και η (1) αποτελεί μια σχέση που μπορεί να απαντήσει πολλά ανάλογα ερωτήματα, όπως άσκησης.

Έχουμε λοιπόν από την εκφώνηση : $\frac{dE_{\text{προσφ}}}{dV} < \frac{dU_{\text{βαρ}}}{dV} \xrightarrow{(1)} \frac{dK}{dV} = \frac{dE_{\text{προσφ}}}{dV} - \frac{dU_{\text{βαρ}}}{dV} < 0 \rightarrow \frac{dK}{dV} < 0 \rightarrow$

$$u_1 < u_2 \quad (2)$$

Εφαρμόζοντας την «εξίσωση της συνέχειας» : $A_1 u_1 = A_2 u_2 \xrightarrow{(2)} A_1 > A_2$ (σωστή η γ)

• **Άσκηση 3.30 σχολικού βιβλίου- μέγιστο βεληνεκές**

Ένα δοχείο με κατακόρυφα τοιχώματα περιέχει νερό μέχρι ύψους h . Σε ποιο ύψος (x) πρέπει να τρυπήσουμε το δοχείο, ώστε η φλέβα που θα δημιουργηθεί να συναντά το έδαφος στη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση από τη βάση του δοχείου;

Λύση:

Από το “θεώρημα του Torricelli», έχουμε για την ταχύτητα εκροής του υγρού από την οπή:

$$u = \sqrt{2g(h-x)} \quad (1)$$

Για την οριζόντια βολή του ρευστού έχουμε:

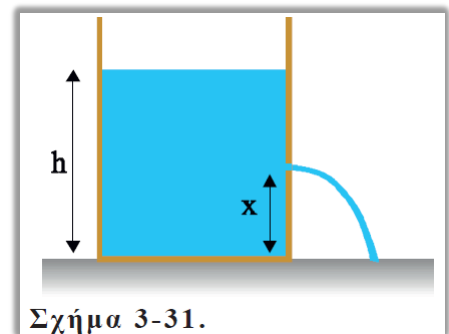
$$x = \frac{1}{2} g \Delta t^2 \rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2x}{g}} \quad (2)$$

Έστω s το βεληνεκές της βολής: $s = u \Delta t \xrightarrow{(1),(2)} s = \sqrt{2g(h-x)} \sqrt{\frac{2x}{g}} \rightarrow s^2 = 2g(h-x) \frac{2x}{g} \rightarrow$

$$4x^2 - 4hx + s^2 = 0 \quad (3)$$

Η (3) για να έχει πραγματικές λύσεις πρέπει: $\Delta \geq 0 \rightarrow 16h^2 - 16s^2 \geq 0 \rightarrow s \leq h \rightarrow s_{\max} = h$

Επομένως από την (3) έχουμε: $x = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{4h}{8} \rightarrow x = \frac{h}{2}$



Σχήμα 3-31.