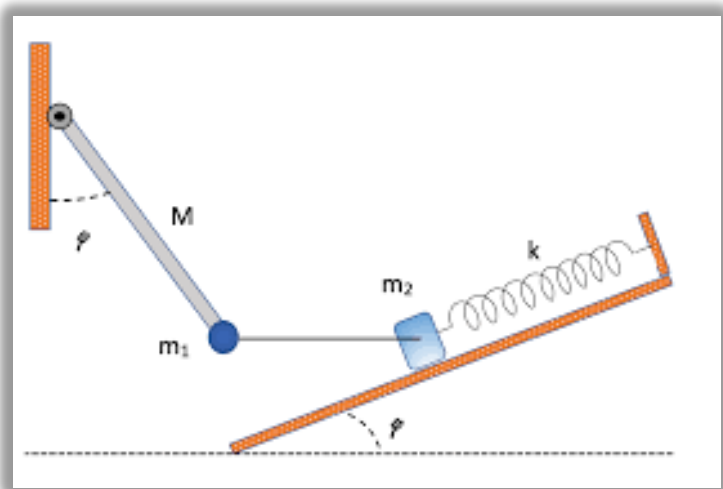
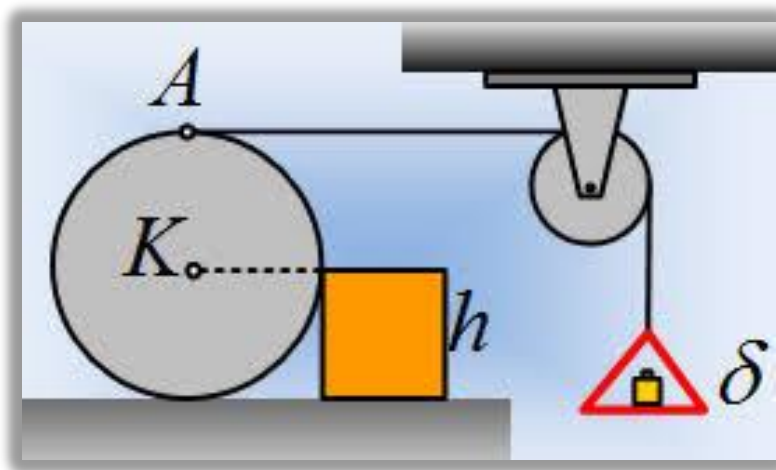


ΣΤΕΡΕΟ ΘΕΩΡΙΑ



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

Κεφάλαιο 3

Μηχανική Στερεού Σώματος

3.1 Η κινηματική της κυκλικής κίνησης

Κυκλική Κίνηση

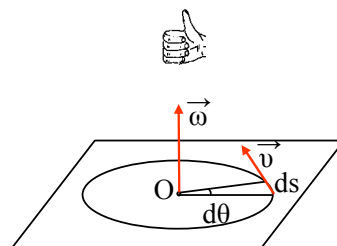
Θεωρούμε ένα υλικό σημείο, το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R , όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν υποθέσουμε ότι σε χρονικό διάστημα dt διαγράφει μήκος τόξου ds που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $d\theta$.

Γραμμική Ταχύτητα

Ονομάζουμε γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$ του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t , ένα διάνυσμα, το οποίο έχει μέτρο ίσο με το πηλίκο του τόξου ds προς τον αντίστοιχο χρόνο dt .

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (3.1)$$

Η γραμμική ταχύτητα εφάπτεται της κυκλικής τροχιάς στη θέση που βρίσκεται κάθε φορά το υλικό σημείο και έχει τη φορά της κίνησης του. Η μονάδα μέτρησης είναι το $1m/s$.



Γωνιακή Ταχύτητα

Ονομάζουμε γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t ένα διάνυσμα, το οποίο έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς του και μέτρο ίσο με το πηλίκο της γωνιάς $d\theta$ προς τον αντίστοιχο χρόνο dt .

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (3.2)$$

Η κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η μονάδα μέτρησης της γωνιακής ταχύτητας είναι το $1rad/s$.

Σχέση γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας

Η επίκεντρη γωνία ορίζεται από την σχέση $\theta = \frac{s}{R}$. Από τον ορισμό της γωνιάς έχουμε:

$$d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow ds = R \cdot d\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = \omega \cdot R$$

Κεντρομόλος επιτάχυνση

Στην κυκλική κίνηση λόγω της μεταβολής της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας του, το υλικό σημείο έχει κεντρομόλο επιτάχυνση, της οποίας το μέτρο δίνεται από την σχέση:

$$\alpha_{\kappa} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R \quad (3.3)$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι υπεύθυνη για την μεταβολή της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας. Η διεύθυνση της είναι πάντα κάθετη στην γραμμική ταχύτητα.

Ομαλή κυκλική κίνηση

Όταν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας παραμένει σταθερό, τότε η κίνηση του υλικού σημείου χαρακτηρίζεται ως **Ομαλή Κυκλική Κίνηση**.

Στην κίνηση αυτή παραμένει επίσης σταθερό και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας, οπότε προκύπτει:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - 0}{t - 0} \Rightarrow \theta = \omega \cdot t$$

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το υλικό σημείο σε ίσους χρόνους διανύει ίσα τόξα.

Μεταβαλλόμενη κυκλική Κίνηση

Θεωρούμε ένα υλικό σημείο, το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R . Αν υποθέσουμε ότι σε χρονικό διάστημα dt μεταβάλλεται η γραμμική ταχύτητα κατά $d\vec{v}$ και η γωνιακή ταχύτητα κατά $d\vec{\omega}$ τότε η κίνηση του είναι μια μεταβαλλόμενη κίνηση.

Γραμμική (ή επιτρόχια) επιτάχυνση

Λόγω της μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας, το υλικό σημείο έχει γραμμική επιτάχυνση.

Ονομάζουμε γραμμική επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\epsilon}$ του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t ένα διάνυσμα, του οποίου το μέτρο είναι ίσο με το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της γραμμικής ταχύτητας.

$$\alpha_{\epsilon} = \frac{dv}{dt} \quad (3.4)$$

Η γραμμική επιτάχυνση εφάπτεται της κυκλικής τροχιάς και έχει τη φορά της κίνησης, όταν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας αυξάνεται και φορά αντίθετη από τη φορά της κίνησης, όταν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ελαττώνεται. Η μονάδα μέτρησης της γραμμικής επιτάχυνσης είναι το $1m/s^2$.

Το διανυσματικό άθροισμα της γραμμικής επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_\epsilon$ και της κεντρομόλου επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_\kappa$ δίνει την συνισταμένη επιτάχυνση $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_\epsilon + \vec{\alpha}_\kappa$ του υλικού σημείου σε κάθε θέση της τροχιάς του. Το μέτρο της συνολικής επιτάχυνσης είναι ίσο με $\alpha = \sqrt{\alpha_\epsilon^2 + \alpha_\kappa^2}$

Γωνιακή Επιτάχυνση

Ονομάζουμε γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t ένα διάνυσμα, του οποίου το μέτρο είναι ίσο με το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας.

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} \quad (3.5)$$

Η γωνιακή επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση του διανύσματος $d\vec{\omega}$. Μονάδα μέτρησης της γωνιακής επιτάχυνσης είναι το 1rad/s^2 . Γωνιακή επιτάχυνση 1rad/s^2 σημαίνει ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας είναι 1rad/s σε κάθε 1s .

Σχέση γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας

Η σχέση $v = \omega \cdot R$ μπορεί να γραφτεί:

$$dv = R \cdot d\omega \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha_\epsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$

Ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση

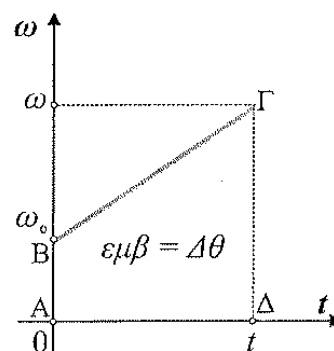
Όταν το μέτρο της επιτροχίας επιτάχυνσης παραμένει σταθερό, τότε η κίνηση του υλικού σημείου χαρακτηρίζεται ως **Ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση**.

Στην κίνηση αυτή παραμένει επίσης σταθερό και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης, άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - 0}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t \quad (3.6)$$



Από το διάγραμμα γωνιακής ταχύτητας (ω) - χρόνου (t) μπορούμε να υπολογίσουμε:

- την γωνιακή επιτάχυνση που είναι ίση με την κλίση της ευθείας $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

- την γωνία θ που διαγράφει το υλικό σημείο από την χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι την στιγμή t με τον υπολογισμό του εμβαδού που περικλείεται κάτω από την ευθεία. Εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \quad (3.7)$$

Στην περίπτωση της ομαλά επιβραδυνόμενης στροφικής κίνησης ($\alpha_{\gamma\omega\nu} < 0$) οι παραπάνω σχέσεις γράφονται: $\omega = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega\nu}|t$ και $\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2} |\alpha_{\gamma\omega\nu}|t^2$.

Παρακάτω ακολουθεί ένας πίνακας αντιστοιχιών μεταξύ γραμμικών και στροφικών μεγεθών της κυκλικής κίνησης.

Γραμμικά μεγέθη	Γωνιακά μεγέθη
Μήκος τόξου s	γωνία στροφής θ
γραμμική ταχύτητα v	γωνιακή ταχύτητα ω
γραμμική επιτάχυνση $\alpha_\epsilon = \frac{dv}{dt}$	γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$
Ομαλή Κυκλική Κίνηση	
$s = vt$	$\theta = \omega t$
Ομαλά Επιταχυνόμενη Κυκλική Κίνηση	
$v = v_0 + \alpha_\epsilon t$	$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t$
$s = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha_\epsilon t^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$
Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κυκλική Κίνηση	
$v = v_0 - \alpha_\epsilon t$	$\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t$
$s = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha_\epsilon t^2$	$\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$

3.2 Κινήσεις Στερών Σωμάτων

3.2.1 Υλικό σημείο και μηχανικό στερεό

Υλικά σημεία λέγονται τα σώματα που θεωρούμε ότι έχουν όλες τις άληθες ιδιότητες της ύλης, εκτός από διαστάσεις. Ένα υλικό σημείο, αφού δεν έχει διαστάσεις, μπορεί να εκτελεί μόνο μεταφορικές κινήσεις. Τέτοιες κινήσεις έχουμε περιγράψει στην Φυσική της Α Λυκείου.

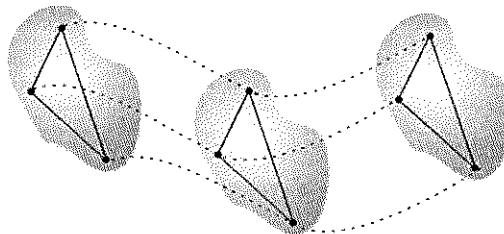
Μηχανικά Στερεά λέγονται τα σώματα που έχουν διαστάσεις, τις οποίες δεν μπορούμε να αγνοήσουμε και που δεν παραμορφώνονται όταν σε αυτά ασκούνται δυνάμεις. Ένα στερεό σώμα, αφού έχει διαστάσεις, εκτός από την μεταφορική κίνηση, μπορεί ακόμα να εκτελέσει περιστροφική (στροφική) κίνηση ή ακόμα και σύνθετη κίνηση (μεταφορική και περιστροφική).

Οι κινήσεις των στερεών σωμάτων

Ένα στερεό μπορεί να κάνει μεταφορική, στροφική ή σύνθετη κίνηση.

Μεταφορική Κίνηση

Λέμε ότι ένα σώμα κάνει μεταφορική κίνηση, όταν κάθε στιγμή όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα κατά μέτρο και κατεύθυνση.



Σχήμα 3.1: Μεταφορική κίνηση στερεού

Η μεταφορική κίνηση δεν είναι κατ'ανάγκη και ευθύγραμμη κίνηση, μπορεί να είναι και καμπυλόγραμμη αρκεί βέβαια να ισχύουν τα παρακάτω:

- οι τροχιές όλων των σημείων του σώματος να είναι παράλληλες
- το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του σώματος να μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του.

Στροφική Κίνηση

Λέμε ότι ένα σώμα κάνει στροφική κίνηση, όταν αλληλάζει προσανατολισμό.

Στη στροφική κίνηση υπάρχει μια ευθεία (ο άξονας περιστροφής) που όλα τα σημεία της παραμένουν ακίνητα, ενώ τα υπόλοιπα σημεία του σώματος κάνουν κυκλική κίνηση, σε επίπεδα κάθετα στον άξονα με τα κέντρα τους πάνω στον άξονα. Ο άξονας περιστροφής δεν είναι απαραίτητο να διέρχεται από το σώμα. Η στροφική κίνηση δεν είναι κατ' ανάγκη κυκλική κίνηση. **Αφού κάθε υλικό σημείο του στερεού εκτελεί μια κυκλική κίνηση, θα ισχύει για αυτό η κινηματική περιγραφή των παραπάνω παραγράφων.** Άρα για την στροφική κίνηση ενός στερεού σώματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες ποσότητες με τις οποίες περιγράψαμε την κυκλική κίνηση ενός υλικού σημείου.

Η έννοια του κέντρου μάζας

Με στόχο την απλοποίηση της μελέτης του στερεού σώματος εισάγουμε την έννοια του κέντρου μάζας του σώματος.

Κέντρο μάζας (cm) ονομάζεται το σημείο εκείνο που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με την μάζα του σώματος, αν σ' αυτό ασκούνται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

Στην ουσία η μελέτη της μεταφορικής κίνησης ενός στερεού σώματος, ανάγεται στη μελέτη της κίνησης του κέντρου μάζας του.

Η κίνηση του κέντρου μάζας ενός σώματος καθορίζεται από την συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα. Σύμφωνα με τον **2ο Νόμο του Νεύτωνα** ισχύει ότι:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{cm} \quad (3.8)$$

Στα ομογενή στερεά σώματα, τα οποία έχουν κέντρο συμμετρίας, το κέντρο μάζας τους συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας. Για παράδειγμα το κέντρο μάζας μιας ομογενούς σφαίρας είναι το κέντρο της σφαίρας. Βέβαια το κέντρο μάζας μπορεί να βρίσκεται και σε σημείο έξω από το σώμα. Για παράδειγμα σε ένα ομογενή δακτύλιο το κέντρο μάζας είναι στο κέντρο K του δακτυλίου.

Σύνθετη Κίνηση

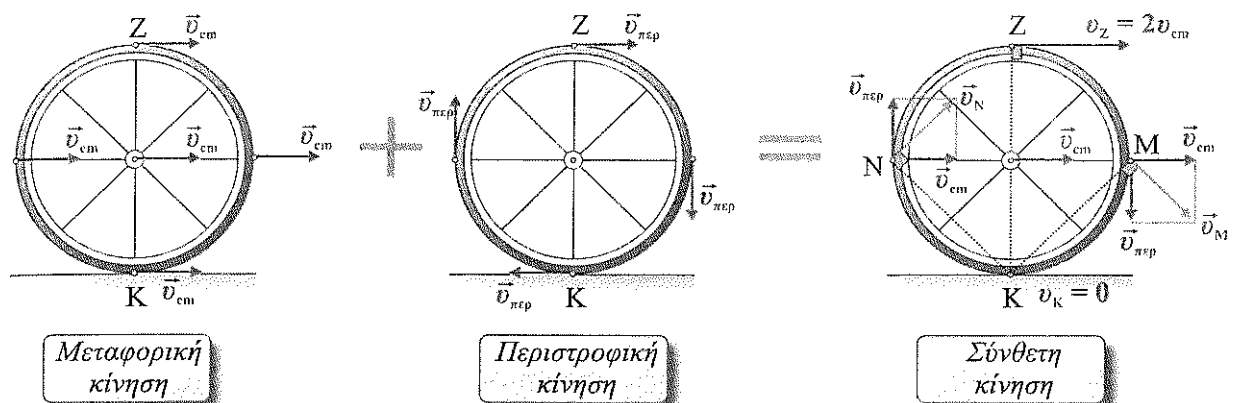
Λέμε ότι ένα σώμα κάνει σύνθετη κίνηση, όταν μετακινείται στον χώρο και ταυτόχρονα αλληλάζει ο προσανατολισμός του.

Για παράδειγμα σύνθετη κίνηση κάνει ο τροχός ενός αυτοκινήτου, όταν αυτό είναι σε κίνηση. Ο τροχός στρέφεται γύρω από τον άξονα του και ταυτόχρονα συμμετέχει στην μεταφορική κίνηση του αυτοκινήτου.

Η σύνθετη κίνηση μπορεί να περιγραφεί ως το αποτέλεσμα της Επαλληλίας (σύνθεσης) μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης.

Το παράδειγμα της κύλισης του τροχού

Παρακάτω βλέπουμε ένα τροχό που κυλιέται σε οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να ολισθαίνει. **Ο τροχός μπορεί να κυλιέται χωρίς ολίσθηση, όταν δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ του σημείου επαφής του τροχού με το δάπεδο.**

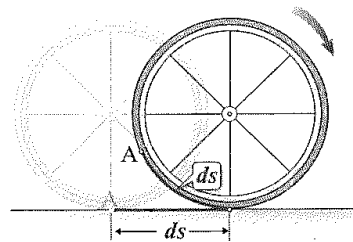


Η κίνηση του τροχού μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της επαλληλίας (σύνθεσης):

- μιας μεταφορικής κίνησης, λόγω της οποίας τα σημεία του τροχού, κάθε στιγμή έχουν την ίδια ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$

- β. μιας στροφικής κίνησης γύρω από τον άξονα του, λόγω της οποίας όλα τα σημεία του τροχού που απέχουν το ίδιο από τον άξονα περιστροφής έχουν ταχύτητες που είναι εφαπτόμενες στην κυκλική τους τροχιά και έχουν μέτρο v

Όταν ένας τροχός ακτίνας R κυλίνεται, χωρίς να ολισθαίνει, τότε κάθε σημείο της περιφέρειας του έρχεται διαδοχικά σε επαφή με το δρόμο. Έτσι αν το κέντρο μάζας του τροχού έχει μετακινηθεί κατά διάστημα dx σε ένα χρονικό διάστημα dt , ένα σημείο της περιφέρειας θα έχει στραφεί κατά επίκεντρη γωνία $d\theta$, η οποία αντιστοιχεί σε μήκος τόξου ds , στον ίδιο χρόνο. Όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, λόγω της μη ολίσθησης ($dx = ds$) και με βάση τον ορισμό της επίκεντρης γωνίας έχουμε:



$$d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow ds = R \cdot d\theta \Rightarrow dx = R \cdot d\theta$$

Από τα παραπάνω προκύπτει η **1η Συνθήκη Κύλισης**, η οποία είναι αναγκαία συνθήκη, ώστε ο τροχός να κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει.

$$x = R \cdot \theta \quad (3.9)$$

Με βάση τον ορισμό της ταχύτητας του κέντρου μάζας ($v_{cm} = \frac{dx}{dt}$) και της γωνιακής ταχύτητας ($\omega = \frac{d\theta}{dt}$) προκύπτει ότι:

$$\frac{dx}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v_{cm} = \omega \cdot R \quad (3.10)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί επίσης αναγκαία συνθήκη για την κύλιση χωρίς ολίσθηση και είναι η **2η Συνθήκη Κύλισης**. Επειδή $v = \omega \cdot R$ είναι η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του τροχού προκύπτει ότι $v_{cm} = v$. Συμπεραίνουμε ότι:

Κατά την κύλιση ενός τροχού, χωρίς ταυτόχρονη ολίσθηση, το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του είναι ίσο με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας του.

Με βάση την 2η Συνθήκη Κύλισης μπορούμε να προχωρήσουμε στον **προσδιορισμό της ταχύτητας διαφόρων σημείων της περιφέρειας του τροχού**. Η ταχύτητα κάθε σημείου Σ της περιφέρειας προκύπτει από την "επαλληλία" των επιμέρους κινήσεων ($\vec{v}_{\Sigma} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$). Από το παραπάνω σχήμα σύνθεσης των κινήσεων προκύπτουν:

- Η ταχύτητα του κέντρου Ο του τροχού είναι:

$$v_o = v_{cm}$$

- Η ταχύτητα του σημείου Κ του τροχού είναι:

$$v_k = v_{cm} - v = 0$$

- Η ταχύτητα του σημείου Z του τροχού είναι:

$$v_z = v_{cm} + v = 2v_{cm}$$

- Η ταχύτητα του σημείου M του τροχού είναι:

$$v_M = \sqrt{v_{cm}^2 + v^2} = \sqrt{2}v_{cm}$$

Αν θεωρήσουμε ότι ο τροχός κυλίνεται σε πλάγιο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει, είναι προφανές ότι τόσο η ταχύτητα του κέντρου μάζας, όσο και η γωνιακή ταχύτητα θα αυξάνονται. Έστω ότι σε χρόνο dt η ταχύτητα του κέντρου μάζας αυξάνεται κατά dv_{cm} και η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται κατά $d\omega$. Με βάση τον ορισμό της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας ($\alpha_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt}$) και της γωνιακής επιτάχυνσης ($\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$) έχουμε:

$$v_{cm} = \omega \cdot R \Rightarrow dv_{cm} = R \cdot d\omega \Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (3.11)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί επίσης αναγκαία συνθήκη, ώστε ο τροχός να κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει και είναι η **3η Συνθήκη Κύλισης**. Επειδή $\alpha_{\epsilon} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ είναι η επιρρόχιος επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας του τροχού, προκύπτει ότι $\alpha_{cm} = \alpha_{\epsilon}$

Κατά την κύλιση ενός τροχού, χωρίς ταυτόχρονη ολίσθηση, το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του είναι ίσο με το μέτρο της επιρρόχιας επιτάχυνσης των σημείων της περιφέρειας του.

Η επιτάχυνση κάθε σημείου της περιφέρειας του τροχού είναι η συνισταμένη της επιτάχυνσης λόγω της μεταφορικής κίνησης ($\vec{\alpha}_{cm}$), της γραμμικής επιτάχυνσης λόγω της στροφικής κίνησης ($\vec{\alpha}_{\epsilon}$) και της κεντρομόλου επιτάχυνσης ($\vec{\alpha}_{\kappa}$).

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 1.1 - 1.50, 1.55, 1.57, 1.58, 1.60, 1.61, 1.62, 1.65, 1.66, 1.69, 1.72, 1.75, 1.77, 1.86 - 1.92, 1.94, 1.97, 1.98, 1.100, 1.101, 1.102, 1.105

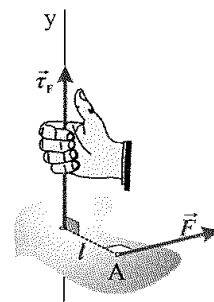
3.3 Ροπή Δύναμης - Ισορροπία Στερεού Σώματος

Ροπή Δύναμης

Η ροπή δύναμης ($\vec{\tau}$) είναι το φυσικό μέγεθος που περιγράφει την ικανότητα μιας δύναμης να στρέφει ένα σώμα.

α) Ροπή Δύναμης ως προς άξονα

Θεωρούμε ένα σώμα, το οποίο έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από τον άξονα zz' . Στο σώμα ασκείται δύναμη $\vec{F}$, η οποία



βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής και ο φορέας της απέχει από τον άξονα απόσταση l (μοχλοβραχίονας).

Ονομάζουμε ροπή δύναμης ως προς άξονα περιστροφής zz' , το διανυσματικό μέγεθος $\vec{\tau}$, το οποίο έχει:

- **διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής**
- **φορά τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού και**
- **μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου F της δύναμης επί την κάθετη απόσταση l της δύναμης από τον άξονα περιστροφής, δηλαδή:**

$$\tau = F \cdot l \quad (3.12)$$

Στο διεθνές σύστημα μονάδων η **μονάδα μέτρησης** της ροπής δύναμης είναι το $1N \cdot m$.

Αν η δύναμη δεν βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής, αλλά σχηματίζει γωνία ϕ με αυτό, τότε την αναλύουμε σε δύο συνιστώσες, μια συνιστώσα (F_x) πάνω σε επίπεδο κάθετο στον άξονα και μια συνιστώσα (F_y) παράλληλη προς τον άξονα. Η ροπή της δύναμης έχει μέτρο:

$$\tau = F_x \cdot l = Fl \sin \phi \quad (3.13)$$

Η ροπή μιας δύναμης ως προς άξονα είναι **ίση με μηδέν**:

- όταν η δύναμη ασκείται στον άξονα
- όταν ο φορέας της δύναμης τέμνει τον άξονα
- όταν ο φορέας της δύναμης είναι παράλληλος προς τον άξονα.

Κατά σύμβαση θεωρούμε θετική την ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από την φορά των δεικτών του ρολογιού και αρνητική τη ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει το σώμα κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Η **συνολική ροπή** ($\Sigma\tau$) που δέχεται ένα σώμα, στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις, **είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών** των δυνάμεων ως προς τον άξονα περιστροφής του σώματος.

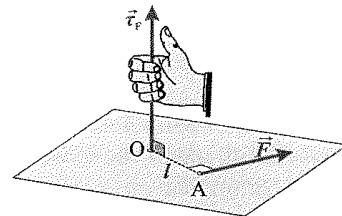
β)Ροπή Δύναμης ως προς σημείο

Αν σ ένα σώμα ελεύθερο να κινηθεί ασκείται δύναμη που ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση. Αν, όμως, ο φορέας της δύναμης δε διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση: μια μεταφορική και μια περιστροφική γύρω από ένα νοητό άξονα

που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζει ο φορέας της δύναμης και το κέντρο μάζας. Στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει σταθερός άξονας περιστροφής χρησιμοποιείται η έννοια της ροπής δύναμης ως προς σημείο.

Ονομάζουμε ροπή δύναμης ως προς σημείο O , το διανυσματικό μέγεθος $\vec{\tau}$, το οποίο έχει:

- διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από το φορέα της δύναμης και το σημείο O
- φορά τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού
- μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου F της δύναμης από την απόσταση l του σημείου O από το φορέα της δύναμης. Δηλαδή:



$$\tau = F \cdot l$$

Η ροπή δύναμης ως προς σημείο είναι **ίση με μηδέν**:

- όταν η δύναμη ασκείται στο σημείο αυτό ή
- όταν ο φορέας της δύναμης διέρχεται από το σημείο αυτό.

γ) Ροπή ζεύγους δυνάμεων

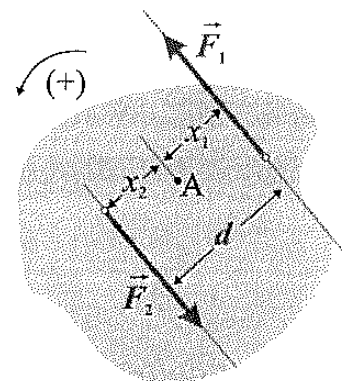
Ζεύγος δυνάμεων ονομάζουμε ένα σύστημα δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, οι οποίες ασκούνται σε δύο διαφορετικά σημεία ενός σώματος, είναι αντίρροπες και έχουν ίσα μέτρα.

Στο διπλανό σχήμα, η αλγεβρική τιμή της ροπής τους ζεύγους, ως προς κάποιο σημείο A θα είναι το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους ροπών των δύο δυνάμεων ($F_1 = F_2$):

$$\tau = F_1 x_1 + F_2 x_2 = F_1 (x_1 + x_2) \Rightarrow \tau = F_1 d$$

Ονομάζουμε ροπή ζεύγους δυνάμεων το διανυσματικό μέγεθος $\vec{\tau}$, το οποίο έχει:

- διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των δύο δυνάμεων,
- φορά την φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού και
- μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου F_1 της μιας από τις δύο δυνάμεις επί τον βραχίονα d του ζεύγους. Δηλαδή:



$$\tau = F_1 \cdot d \quad (3.14)$$

Από τα παραπάνω είναι εύκολα κατανοητό ότι **η ροπή του ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους και ως προς οποιονδήποτε άξονα περιστροφής κάθετο στο επίπεδο του ζεύγους.**

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 2.1 - 2.21, 2.58, 2.59, 2.60, 2.62, 2.63, 2.65, 2.67

Ισορροπία Στερεού Σώματος

Θεωρούμε ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα, στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις. **Για να ισορροπεί θα πρέπει:**

- α) Η συνισταμένη δύναμη να είναι μηδέν

$$\Sigma \vec{F} = 0 \quad (3.15)$$

Όταν ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη, η επιτάχυνση του σώματος στην μεταφορική κίνηση είναι μηδέν. Επομένως για αρχικά ακίνητο σώμα ($v = 0$), η συνθήκη αυτή αποτελεί συνθήκη ισορροπίας για την μεταφορική κίνηση (Φυσική Α Λυκείου).

- β) Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς οποιοδήποτε σημείο να είναι μηδέν

$$\Sigma \tau = 0 \quad (3.16)$$

Όταν ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη, η επιτάχυνση του σώματος στην στροφική κίνηση είναι μηδέν. Επομένως για αρχικά ακίνητο σώμα ($\omega = 0$), η συνθήκη αυτή αποτελεί συνθήκη ισορροπίας για την στροφική κίνηση.

Στις ασκήσεις ισορροπίας στερεού ακολουθούμε γενικά τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1ο: Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο υπο μελέτη σώμα.

Η κατεύθυνση κάθε δύναμης καθορίζεται από το είδος της (π.χ. βάρος, κάθετη αντίδραση, τάση νήματος). Για τις δυνάμεις που δεν γνωρίζουμε την κατεύθυνση τους είναι χρήσιμη η ακόλουθη πρόταση:

Όταν ένα σώμα ισορροπεί με την επίδραση τριών μη παράλληλων ομοεπίπεδων δυνάμεων, τότε οι φορείς των δυνάμεων αυτών πρέπει να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Βήμα 2ο: Επιλέγουμε τους κατάλληλους ορθογώνιους άξονες x και y και αναλύουμε όλες τις δυνάμεις που δεν είναι παράλληλες σε αυτούς.

Βήμα 3ο: Εφαρμόζουμε τις συνθήκες ισορροπίας ομοεπίπεδων δυνάμεων:

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma \tau = 0$$

Κατάλληλο σημείο για να εφαρμόσουμε την τρίτη συνθήκη είναι συνήθως, εκείνο από το οποίο διέρχεται ο φορέας μιας άγνωστης δύναμης. Στην περίπτωση αυτή επειδή η ροπή της είναι μηδέν, εξαφανίζεται από την εξίσωση που προκύπτει.

Βήμα 4ο: Λύνουμε το σύστημα των τριών εξισώσεων που προκύπτει. Με την λύση του συστήματος μπορούμε να υπολογίσουμε μέχρι τρία άγνωστα μεγέθη.

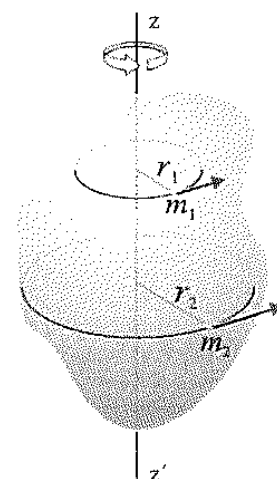
Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 2.22 - 2.55, 2.81, 2.82, 2.85, 2.87, 2.90 - 2.99, 2.102, 2.104, 2.105, 2.107, 2.108, 2.111, 2.113, 2.116, 2.118, 2.123.

3.4 Ροπή Αδράνειας

Έστω ένα στερεό σώμα, το οποίο στρέφεται γύρω από το σταθερό άξονα $z'z$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδη τμήματα με μάζες $m_1, m_2, \dots, m_\nu$, τόσο μικρά ώστε καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Οι μάζες $m_1, m_2, \dots, m_\nu$ κινούνται κυκλικά γύρω από τον άξονα, σε κύκλους με ακτίνες $r_1, r_2, \dots, r_\nu$, αντίστοιχα.

Ονομάζουμε ροπή αδράνειας I ενός στερεού ως προς τον άξονα $z'z$ το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα τετράγωνα των αποστάσεων τους από τον άξονα περιστροφής. Δηλαδή:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots m_\nu r_\nu^2 \quad (3.17)$$



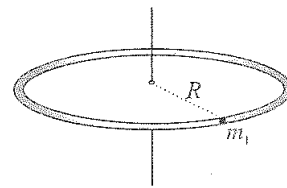
Η ροπή αδράνειας είναι μονόμετρο μέγεθος και στο σύστημα $S.I.$ έχει μονάδες μέτρησης το $1 kg \cdot m^2$.

Από τον ορισμό της ροπής αδράνειας για ένα στερεό προκύπτει ότι η ροπή αδράνειας ενός υλικού σημείου με μάζα m , το οποίο κινείται κυκλικά σε κύκλο ακτίνας r , ως προς άξονα $z'z$ που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδο της δίνεται από τη σχέση:

$$I = mr^2 \quad (3.18)$$

Παράδειγμα: Ροπή Αδράνειας Ομογενούς δακτυλίου, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του.

Χωρίζουμε το δακτύλιο σε στοιχειώδεις μάζες $m_1, m_2, \dots, m_\nu$. Είναι φανερό ότι $m_1 + m_2 + \dots + m_\nu = M$. Επειδή το πάχος του δακτυλίου είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα του R , όλες οι στοιχειώδεις μάζες έχουν την ίδια απόσταση R από τον άξονα περιστροφής. Σύμφωνα με τον ορισμό της ροπής αδράνειας έχουμε:



$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_\nu r_\nu^2 = m_1 R^2 + m_2 R^2 + \dots + m_\nu R^2$$

$$\Rightarrow I = (m_1 + m_2 + \dots + m_\nu) R^2 \Rightarrow I = M R^2$$

Θεώρημα Στάινερ (Steiner)

Μεταξύ της ροπής αδράνειας I_{cm} ενός σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και της ροπής αδράνειας I_p του σώματος ως προς οποιοδήποτε άλλο άξονα p , παράλληλο με τον πρώτο και σε απόσταση d από αυτόν υπάρχει μια απλή σχέση, γνωστή ως το **θεώρημα Παραλλήλων αξόνων** ή **θεώρημα Steiner**:

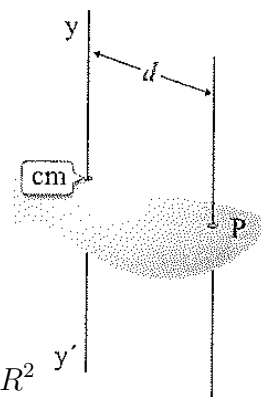
Αν I_{cm} είναι η ροπή αδράνειας ενός σώματος μάζας M ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς έναν άξονα που είναι παράλληλος και απέχει απόσταση d από τον πρώτο είναι ίση με το άθροισμα της ροπής αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και του γινομένου της μάζας του σώματος επί το τετράγωνο της απόστασης d . Δηλαδή:

$$I_p = I_{cm} + M d^2 \quad (3.19)$$

Παράδειγμα: Ροπή Αδράνειας Ομογενούς δακτυλίου, ως προς άξονα που διέρχεται κάθετα από σημείο της περιφέρειας του.

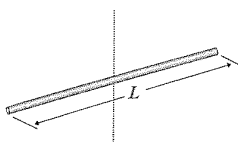
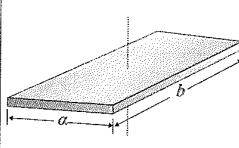
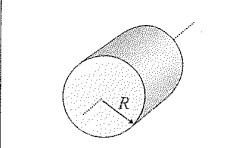
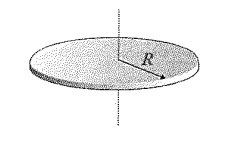
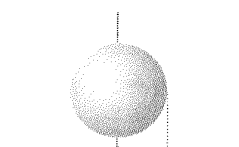
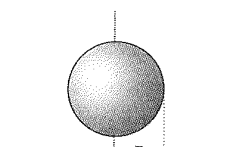
Σύμφωνα με το θεώρημα Steiner έχουμε ότι:

$$I_p = I_{cm} + M d^2 \Rightarrow I_p = I_{cm} + M R^2 = M R^2 + M R^2 \Rightarrow I_p = 2 M R^2$$



Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει ότι **η ροπή αδράνειας ενός σώματος που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα εξαρτάται:**

- από την ολική μάζα του σώματος.
- από την κατανομή της μάζας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του, η οποία έχει να κάνει με το μέγεθος και το σχήμα του σώματος.
- από τη θέση του άξονα περιστροφής.

 Λεπτή ράβδος $I = \frac{1}{12} ML^2$	 Ορθογώνια πλάκα $I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$	 Συμπαγής κύλινδρος $I = \frac{1}{2} MR^2$
 Δίσκος $I = \frac{1}{2} MR^2$	 Σφαιρικός φλοιός $I = \frac{2}{3} MR^2$	 Συμπαγής σφαίρα $I = \frac{2}{5} MR^2$

Σχήμα 3.2: οι ροπές αδράνειας μερικών σωμάτων ως προς ένα συγκεκριμένο άξονα για κάθε σώμα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

3.5 Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κίνησης

Όπως είναι γνωστό από την Φυσική της Α Λυκείου, στην περίπτωση ενός υλικού σημείου, για να μεταβληθεί η ταχύτητα του, πρέπει να ασκηθεί σε αυτό δύναμη. Η σχέση ανάμεσα στην **αιτία** (δύναμη) και το **αποτέλεσμα** (επιτάχυνση) είναι:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \quad (3.20)$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως ο **θεμελιώδης νόμος της μηχανικής**.

Ένας αντίστοιχος νόμος ισχύει στη στροφική κίνηση στερεών σωμάτων. Σύμφωνα με αυτόν, για να μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, πρέπει να ασκηθεί σ' αυτό ροπή. Η σχέση ανάμεσα στην **αιτία** (ροπή) και το **αποτέλεσμα** (γωνιακή επιτάχυνση) είναι:

$$\Sigma \tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (3.21)$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως ο **Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης**, ο οποίος διατυπώνεται ως εξής:

Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν πάνω σε ένα στερεό σώμα, το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με το γινόμενο της ροπής αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής και της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος.

Είναι προφανές ότι στην σχέση **3.21** το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών και η ροπή αδράνειας αναφέρονται στον ίδιο άξονα περιστροφής.

Φυσική Σημασία της Ροπής Αδράνειας

Είναι προφανές ότι από τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης και την εξίσωση **3.21** προκύπτει ότι η ροπή αδράνειας “παίζει” σημαντικό ρόλο στην μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας, καθώς η γωνιακή επιτάχυνση είναι αντιστρόφως ανάλογη της ροπής αδράνειας.

Η ροπή αδράνειας εκφράζει στην περιστροφική κίνηση, ό,τι εκφράζει η μάζα στην μεταφορική κίνηση. Ποιο συγκεκριμένα:

- Η μάζα m εκφράζει στην μεταφορική κίνηση την αντίσταση που προβάλλει ένα σώμα σε κάθε μεταβολή της ταχύτητας του. Είναι δηλαδή το **μέτρο της αδράνειας στην μεταφορική κίνηση**.
- Η ροπή αδράνειας I εκφράζει στην περιστροφική κίνηση την αντίδραση που προβάλλει ένα στερεό σώμα σε κάθε μεταβολή της γωνιακής του ταχύτητας. Είναι δηλαδή το **μέτρο της αδράνειας στην στροφική κίνηση**.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, αντίθετα με την μάζα ενός σώματος που είναι ένα σταθερό μέγεθος, η ροπή αδράνειας δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη για ένα σώμα και εξαρτάται από την θέση του άξονα περιστροφής. **Ένα στερεό σώμα έχει μια μάζα, αλλά άπειρες ροπές αδράνειας.**

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 3.1 - 3.25, 3.27, 3.28, 3.29, 3.32, 3.33, 3.36, 3.38

Διερεύνηση της σχέσης $\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$

- Θέτοντας στη σχέση αυτή $\Sigma \tau = 0$ παίρνουμε $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$. Δηλαδή αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν, τότε η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν και κατά συνέπεια η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι, αν το σώμα δεν στρέφεται ($\omega = 0$), θα εξακολουθήσει να μην στρέφεται, ενώ αν στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, θα εξακολουθήσει να στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. (**Αρχή της Αδράνειας στην στροφική κίνηση**).
- Θέτοντας στη σχέση αυτή $\Sigma \tau = \text{σταθ.}$, παίρνουμε $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \text{στάθ.}$ Αυτό σημαίνει ότι, αν σε ένα σώμα που έχει την δυνατότητα να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ασκείται σταθερή συνισταμένη ροπή, το σώμα στρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, δηλαδή εκτελεί ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση.

3.5.1 Εφαρμογή των Θεμελιωδών Νόμων στην κίνηση στερεού σώματος

Τα είδη των κινήσεων που μπορεί να εκτελέσει ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα που είναι ελεύθερο να κινηθεί, ανάλογα με τις συνθήκες που ισχύουν, δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

$\Sigma \vec{F} = 0, \Sigma \tau = 0$	Το σώμα ισορροπεί
$\Sigma \vec{F} \neq 0, \Sigma \tau = 0$	Το σώμα εκτελεί επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση. με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας να είναι $\vec{a}_{cm}$
$\Sigma \vec{F} = 0, \Sigma \tau \neq 0$	Το σώμα εκτελεί επιταχυνόμενη στροφική κίνηση γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γων}$
$\Sigma \vec{F} \neq 0, \Sigma \tau \neq 0$	Το σώμα εκτελεί σύνθετη κίνηση (επιταχυνόμενη μεταφορική με επιτάχυνση $\vec{a}_{cm}$ και επιταχυνόμενη στροφική γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γων}$)

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 4.1 - 4.14, 4.52, 4.53, 4.55, 4.56, 4.57, 4.60, 4.63, 4.64, 4.66, 4.68, 4.69, 4.70

Ασκήσεις, όπου ένα στερεό (τροχαλία, κύλινδρος κλπ) εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα:

- (α) με την επίδραση σταθερής εφαπτομενικής δύναμης.
- (β) με την ταυτόχρονη μεταφορική κίνηση ενός άλλου σώματος μέσω σχοινιού.
- (γ) με την ταυτόχρονη μεταφορική κίνηση δύο άλλων σωμάτων, μέσω σχοινιών.

Στις ασκήσεις αυτές, θεωρώντας ότι το περιστρεφόμενο στερεό είναι μια τροχαλία εργαζόμαστε ως εξής:

- Σχεδιάζουμε προσεκτικά τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα ή στα σώματα που εκτελούν μεταφορική κίνηση.
- Σχεδιάζουμε προσεκτικά τις δυνάμεις που ασκούνται στην τροχαλία.
- Για κάθε σώμα που εκτελεί μεταφορική κίνηση γράφουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής:

$$\Sigma \vec{F} = m\alpha$$

- Αν χρειάζεται, για κάθε σώμα που εκτελεί μεταφορική κίνηση γράφουμε τις εξισώσεις της κίνησης του:

$$v = v_0 + \alpha t, \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

- Για την τροχαλία γράφουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την στροφική κίνηση ως προς τον άξονα περιστροφής της:

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

- Αν χρειάζεται για την τροχαλία γράφουμε τις εξισώσεις της περιστροφικής κίνησης:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\tau} t, \quad \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$$

- Επειδή δεχόμαστε πάντα ότι το σχοινί που περιβάλλει την τροχαλία δεν ολισθαίνει πάνω σε αυτήν, γράφουμε την **συνθήκη μη ολίσθησης του σχοινιού**. Σύμφωνα με την συνθήκη αυτή υποθέτουμε ότι αν το σώμα που αναρτάται στο σχοινί διανύει διάστημα x τότε η τροχαλία στρέφεται κατά τόξο μήκους $s = R\theta = x$. Άρα με την λογική που παρουσιάσαμε στην περίπτωση της κύλισης χωρίς ολίσθηση προκύπτει ότι η γραμμική επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας στα οποία εφάπτεται το σχοινί ταυτίζεται με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του σώματος που είναι δεμένο στο άκρο του σχοινιού:

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$$

- Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει και βρίσκουμε τα ζητούμενα άγνωστα μεγέθη.

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 4.74, 4.76 - 4.82, 4.84, 4.86 - 4.89, 4.91, 4.92, 4.93

Ασκήσεις όπου ένα στερεό εκτελεί ταυτόχρονα και μεταφορική και περιστροφική κίνηση - Κύλιση.

Στις ασκήσεις αυτές εργαζόμαστε ως εξής:

- Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.
- Αγνοώντας το γεγονός ότι το σώμα περιστρέφεται, εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας του σώματος:

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_{cm}$$

- Αγνοώντας το γεγονός ότι το σώμα μεταφέρεται, εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης:

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

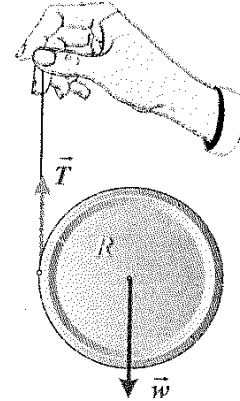
θεωρώντας ότι το σώμα απλά στρέφεται γύρω από ένα σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

- Όταν οι δύο κινήσεις σχετίζονται μεταξύ τους, όπως για παράδειγμα συμβαίνει στα σώματα που κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν ή στο «γινό-γινό», τότε οι επιταχύνσεις α_{cm} και $\alpha_{γων}$ συνδέονται με τη σχέση:

$$\alpha_{cm} = \alpha_{γων} R$$

Δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτής της περίπτωσης είναι:

Α. Το «γινό-γινό»: Αποτελείται από ένα μικρό κύλινδρο, μάζας m και ακτίνας R που στο κυρτό μέρος του έχει τυλιχθεί πολλές φορές ένα σχοινί. Κρατώντας σταθερό το ελεύθερο άκρο του σχοινιού και αφήνοντας τον κύλινδρο να πέσει, το σχοινί ξετυλίγεται και ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από ένα νοητό οριζόντιο άξονα. Θεωρούμε ότι το σχοινί παραμένει κατακόρυφο σε όλη τη διάρκεια της κίνησης. Η κατακόρυφη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου εξασφαλίζεται από τις κατακόρυφες δυνάμεις του βάρους ($\vec{w}$) και της Τάσης ($\vec{T}$) του νήματος, ενώ η περιστροφική από την ροπή της Τάσης του νήματος. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:



Μεταφορική Κίνηση:

$$\Sigma F = m\alpha_{cm} \Rightarrow mg - T = m\alpha_{cm}$$

Στροφική Κίνηση:

$$\Sigma \tau = I_{cm}\alpha_{γων} \Rightarrow TR = I_{cm}\alpha_{γων}$$

Συνθήκη μη ολίσθησης του σχοινιού

$$\alpha_{cm} = \alpha_{γων} R$$

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 4.109, 4.111, 4.113, 4.120, 4.124, 4.134, 4.138, 4.144, 4.146

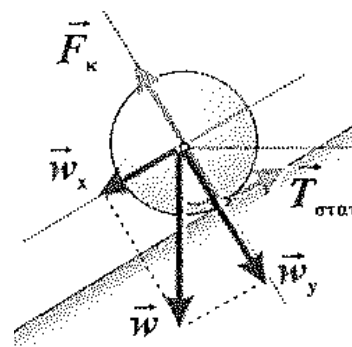
Β. Κύλιση κυλίνδρου χωρίς ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο: Η μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου στο κεκλιμένο επίπεδο εξασφαλίζεται από την συνιστώσα του βάρους ($w\eta\mu\theta$) και από την στατική τριβή ($T_{στ}$), ενώ η περιστροφική από την ροπή της στατικής τριβής ως προς τον άξονα περιστροφής που ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου. Έχουμε:

Μεταφορική Κίνηση:

$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow mg\eta\mu\theta - T_{\sigma\tau} = m\alpha_{cm}$$

Στροφική Κίνηση:

$$\Sigma \tau = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_{\sigma\tau}R = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu}$$



Συνθήκη μη ολίσθησης του σχοινιού

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$$

Ο ρόλος της στατικής τριβής στην κύλιση

Ο ρόλος της στατικής τριβής είναι κατά κάποιο τρόπο ρυθμιστικός γιατί:

- από την μια ελαττώνει το μέτρο της επιτάχυνσης (α_{cm}) του κέντρου μάζας του κυλίνδρου που θα προκαλούσε μόνη της η συνιστώσα του βάρους, αφού είναι:

$$\alpha_{cm} = \frac{mg\eta\mu\theta - T_{\sigma\tau}}{m}$$

- από την άλλη προκαλεί, μέσω της ροπής της $T_{\sigma\tau}R$, γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$, την οποία δεν μπορεί να δημιουργήσει η συνιστώσα του βάρους, με αποτέλεσμα να δημιουργείται η εξισορρόπηση των μεγεθών α_{cm} και $\alpha_{\gamma\omega\nu}R$, που είναι η αναγκαία συνθήκη $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$ για την κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Προφανώς, αν δεν υπήρχε η τριβή, τότε δεν θα υπήρχε και ροπή ως προς τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου, με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να ολισθαίνει χωρίς να κυλίεται.

Η φορά της στατικής τριβής

Η φορά της στατικής τριβής, η οποία είναι υπεύθυνη για την κύλιση, μπορεί να προσδιοριστεί, αρκεί να την σχετίσουμε με το αποτέλεσμα της, δηλαδή την αύξηση ή μείωση της γωνιακής ταχύτητας.

Όταν ο κύλινδρος κυλίνεται σε πλάγιο επίπεδο προς τα κάτω, το μέτρο της v_{cm} αυξάνεται και αυξάνεται και η γωνιακή ταχύτητα. Άρα η ροπή της στατικής τριβής θα πρέπει να αυξάνει την γωνιακή ταχύτητα, άρα να τείνει να περιστρέψει τον κύλινδρο κατά την φορά περιστροφής του.

Όταν ο κύλινδρος κυλίνεται σε πλάγιο επίπεδο προς τα πάνω , το μέτρο της v_{cm} μειώνεται και μειώνεται και η γωνιακή ταχύτητα. Άρα η ροπή της στατικής τριβής θα πρέπει να μειώνει την γωνιακή ταχύτητα, άρα να τείνει να περιστρέψει τον κύλινδρο αντίθετα από την φορά περιστροφής του.

Πότε ο κύλινδρος κυλίνεται χωρίς ταυτόχρονη ολίσθηση .

Στον κύλινδρο ασκούνται η δύναμη του βάρους ($\vec{w}$), η στατική τριβή ($\vec{T}_{\sigma\tau}$) και η κάθετη αντίδραση από το δάπεδο ($\vec{N}$). Το μέτρο της στατικής τριβής καθορίζεται από τις υπόλοιπες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και μπορεί να πάρει τιμές στο παρακάτω διάστημα :

$$0 \leq T_{\sigma\tau} \leq \mu_s N$$

Όταν η στατική τριβή πάρει την μέγιστη τιμή της τότε αρχίζει η ολίσθηση του σώματος, άρα για να μην ολισθαίνει πρέπει να ισχύει η ακολουθεί συνθήκη :

$$T_{\sigma\tau} < \mu_s N$$

Όταν $T_{\sigma\tau} = \mu_s N$, τότε ο κύλινδρος είναι έτοιμος να ολισθήσει. Στην περίπτωση της κύλισης με ταυτόχρονη ολίσθηση δεν ισχύει η συνθήκη μη ολίσθησης άρα $\alpha_{cm} \neq \alpha_{\gamma\omega\nu} R$

Υπολογισμός του χρόνου κίνησης και του μέτρου της τελικής ταχύτητας κατά την κύλιση χωρίς ολίσθηση σε πλάγιο επίπεδο χωρίς ολίσθηση.

Όταν ένα στερεό μάζας M , ακτίνας R και ροπής αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας του I_{cm} κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο, τότε ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου, όπως και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του, υπολογίζονται εύκολα με τα ακόλουθα βήματα :

- Υπολογίζουμε την επιτάχυνση α_{cm} του κέντρου μάζας του σώματος από τις εξισώσεις: $\Sigma F_x = m\alpha_{cm}$ $\Sigma \tau = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu}$ $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$
- Υπολογίζουμε τον χρόνο κίνησης του στερεού από την εξίσωση κίνησης για την ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση: $x = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{\alpha_{cm}}}$
- Υπολογίζουμε την τελική ταχύτητα του κυλίνδρου από την εξίσωση της ταχύτητας: $v_{cm} = \alpha_{cm}t \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{2\alpha_{cm}x}$

Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 4.13 - 4.16, 4.19 - 4.44, 4.114, 4.116, 4.117, 4.119, 4.4.121, 4.122, 4.127, 4.129, 4.130, 4.131, 4.132, 4.136, 4.137, 4.141, 4.143

Γ. Σώμα που εκτελεί στροφική κίνηση με μεταβλητή επιτάχυνση

Στην περίπτωση μιας ομογενούς ράβδου μάζας M , μήκους L και ροπής αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$ που περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από το άκρο της O με την επίδραση του βάρους, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί.

Η γωνιακή επιτάχυνση **δεν είναι σταθερή** γιατί η ροπή του βάρους ως προς τον άξονα περιστροφής δεν είναι σταθερή, κατά την διάρκεια της περιστροφής!

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης σε μια τυχαία θέση που η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο προκύπτει ότι:

$$\Sigma \tau_{(o)} = I_{(o)} \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

βέβαια δεν ξεχνάμε την εφαρμογή του **Θεωρήματος Steiner** για τον σωστό υπολογισμό της ροπής αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής:

$$I_{(o)} = I_{cm} + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Η ροπή του βάρους μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από την σχέση:

$$\tau_{(o)} = Mg \frac{L}{2} \sin \theta$$

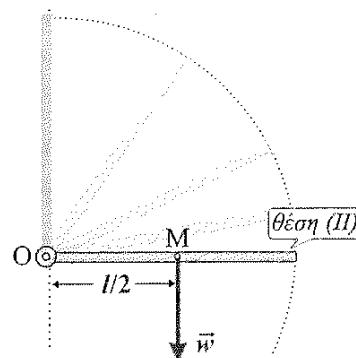
είναι προφανές ότι στην οριζόντια θέση της ράβδου ($\theta = 0$) η ροπή του βάρους είναι απλά $Mg \frac{L}{2}$

Άρα με βάση τα παραπάνω **η γωνιακή επιτάχυνση μπορεί να υπολογιστεί μόνο σε συγκεκριμένες θέσεις και χρονικές στιγμές και όχι για όλη την διάρκεια της κίνησης** και είναι ίση με:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3}{2L} \sin \theta$$

Προσοχή! σε αυτού του είδους την κίνηση δεν ισχύουν οι εξισώσεις της ομαλά μεταβαλλόμενης στροφικής κίνησης. Ο υπολογισμός της γωνίας στροφής και της γωνιακής ταχύτητας μπορούν να γίνουν με την Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας που θα δούμε παρακάτω.

Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 4.150, 4.152, 4.153, 4.155, 4.156, 4.157, 4.158, 4.159, 4.161, 4.163



3.6 Στροφορμή-Διατήρηση Στροφορμής

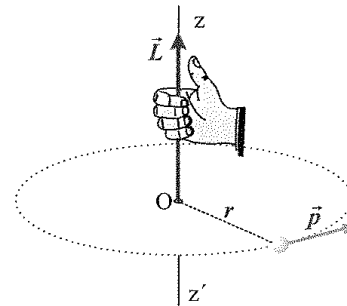
Στην Φυσική της Α Λυκείου, μελετώντας την μεταφορική κίνηση ενός υλικού σημείου γνωρίσαμε την έννοια της ορμής ($\vec{P}$). **Το αντίστοιχο μέγεθος της ορμής για την στροφική κίνηση ενός στερεού, είναι η στροφορμή που την συμβολίζουμε με το σύμβολο $\vec{L}$.**

α) Στροφορμή Υλικού σημείου.

Θεωρούμε ένα υλικό σημείο μάζας m που κινείται στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας r , έχοντας στιγμιαία ορμή $\vec{P}$, όπως στο σχημα.

Ονομάζουμε Στροφορμή του υλικού σημείου, ως προς έναν άξονα zz' που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδο της, ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{L}$ που έχει:

- διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής
- φορά τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού
- μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου p της ορμής του υλικού σημείου επί την ακτίνα r της κυκλικής τροχιάς. Δηλαδή:



$$L = pr \Rightarrow L = mvr \quad (3.22)$$

Μονάδα μέτρησης της στροφορμής υλικού σημείου στο $S.I.$ είναι το $1kgm^2/s$.

Αν ω είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του υλικού σημείου, τότε η σχέση (3.22) γράφεται:

$$L = m(\omega r)r \Rightarrow L = mr^2\omega \quad (3.23)$$

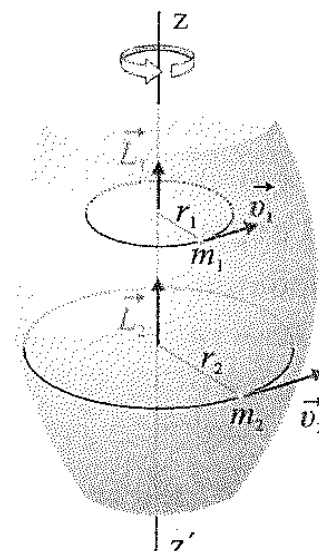
Ο τρόπος ορισμού της στροφορμής έχει "πολλά κοινά" με τον ορισμό της ροπής ($\tau = Fr$). Τα διανύσματα της στροφορμής και της ροπής έχουν την ίδια διεύθυνση και η φορά τους προσδιορίζεται με τον ίδιο τρόπο. Άρα δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η απόσταση r από τον άξονα περιστροφής είναι η κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας ($\vec{v}$), ακριβώς όπως και ο μοχλοβραχίονας μιας δύναμης στην περίπτωση της ροπής.

β) Στροφορμή Στερεού σώματος.

Ονομάζουμε στροφορμή ενός στερεού σώματος το οποίο περιστρέφεται γύρω από ένα άξονα περιστροφής zz' , το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των στοιχειωδών μαζών που το αποτελούν, ως προς τον ίδιο άξονα.

Θεωρούμε ένα στερεό που περιστρέφεται γύρω από το σταθερό άξονα zz' με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδη τμήματα με μάζες $m_1, m_2, \dots, m_\nu$, τόσο μικρά που το καθένα μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Κατά την περιστροφή του σώματος, οι στοιχειώσεις αυτές μάζες διαγράφουν κυκλικές τροχιές γύρω από τον άξονα zz' με την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ και γραμμικές ταχύτητες $v_1 = \omega r_1, v_2 = \omega r_2, \dots, v_\nu = \omega r_\nu$.

Οι στροφορμές των στοιχειωδών μαζών του σώματος έχουν όλες την ίδια κατεύθυνση και μέτρο:



$$L_1 = m_1\omega r_1^2, \quad L_2 = m_2\omega r_2^2, \quad \dots \quad L_\nu = m_\nu\omega r_\nu^2$$

Η στροφορμή του σώματος είναι το άθροισμα των στροφορμών των στοιχειωδών μαζών που το αποτελούν. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 + \dots + L_\nu \Rightarrow \\ L &= m_1 \omega r_1^2 + m_2 \omega r_2^2 + \dots + m_\nu \omega r_\nu^2 \Rightarrow \\ L &= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_\nu r_\nu^2) \omega \Rightarrow \\ L &= I \omega \end{aligned}$$

όπου βέβαια $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_\nu r_\nu^2$ η ροπή αδράνειας του στερεού, ως προς τον άξονα περιστροφής zz' . Επομένως:

Η στροφορμή ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από άξονα είναι ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{L}$, το οποίο έχει:

- διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα,
- φορά τη φορά που ορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού
- μέτρο ίσο με το γινόμενο της ροπής αδράνειας I του στερεού, ως προς τον άξονα περιστροφής, επί το μέτρο ω της γωνιακής ταχύτητας του στερεού. Δηλαδή:

$$L = I \omega \quad (3.24)$$

Η σύμβαση για την αλγεβρική τιμή της στροφορμής είναι η ίδια με εκείνη της ροπής. Έτσι θεωρούμε ως θετική την αλγεβρική τιμή της στροφορμής, ενός σώματος που στρέφεται αντίθετα προς την φορά των δεικτών του ρολογιού και αρνητική όταν στρέφεται με την φορά των δεικτών του ρολογιού.

Το σπίν: Η περιστροφή που μπορεί να κάνει ένα σώμα γύρω άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του έχει στροφορμή που την ονομάζουμε "**σπίν**". Για παράδειγμα η γη έχει σπιν εξαιτίας της περιστροφής της γύρω από τον άξονα της και τροχιακή στροφορμή λόγω της περιστροφής της γύρω από τον Ήλιο. Επίσης τα στοιχειώδη σωματίδια, όπως το ηλεκτρόνιο έχουν σπιν συγκεκριμένου μέτρου που τα διακρίνει σε φερμιόνια και μποζονια (αλλά δεν μας αφορά σε αυτό το μάθημα).

γ) Στροφορμή συστήματος σωματιδίων

Ονομάζουμε στροφορμή ενός συστήματος σωμάτων το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα.

Δηλαδή αν οι στροφορμές των σωμάτων που απαρτίζουν ένα σύστημα είναι $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \dots, \vec{L}_\nu$ τότε η στροφορμή $\vec{L}$ του συστήματος είναι:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_\nu$$

Γενικότερη διατύπωση του Θεμελιώδη Νόμου της στροφικής κίνησης

Θεωρούμε ότι η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είναι σταθερή και ότι σε απειροστό μικρό χρόνο dt η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται κατά $d\omega$, οπότε από την σχέση (3.24) προκύπτει:

$$L = I\omega \Rightarrow dL = Id\omega \Rightarrow \frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$$

Άρα: Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν σε ένα στερεό, το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του.

Η παραπάνω διατύπωση είναι γενικότερη της $\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$, γιατί ισχύει ακόμα και όταν η ροπή αδράνειας δεν είναι σταθερή.

Ο νόμος της στροφικής κίνησης σε σύστημα σωμάτων

Σε ένα σύστημα σωμάτων το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών, δηλαδή εκείνων που οφείλονται σε εσωτερικές δυνάμεις καθώς και εκείνων που οφείλονται σε εσωτερικές δυνάμεις είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.

όμως η ροπή των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική. Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται σε ζεύγη δράσης - αντίδρασης, οπότε οι ροπές τους αλληλοαναιρούνται και έτσι σε ένα σύστημα σωμάτων ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης μπορεί να γραφτεί:

$$\Sigma\tau_{\epsilon\varsigma} = \frac{dL}{dt} \quad (3.25)$$

όπου βέβαια το $\Sigma\tau_{\epsilon\varsigma}$ είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων, ως προς κάποιο άξονα περιστροφής και L η στροφορμή του συστήματος, ως προς τον ίδιο άξονα.

Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 5.26 - 5.36, 5.60 - 5.63, 5.65, 5.67, 5.69, 5.70 - 5.72, 5.74, 5.76, 5.79, 5.83, 5.84, 5.86, 5.87

3.6.1 Διατήρηση της Στροφορμής

Αν στην γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδη νόμου της στροφικής κίνησης θέσουμε $\Sigma\tau = 0$ τότε:

$$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Δηλαδή: **Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που δρουν σε ένα στερεό σώμα (ως προς κάποιο άξονα) είναι μηδέν, η στροφορμή του σώματος (ως προς τον ίδιο άξονα) παραμένει σταθερή.**

Για ένα σύστημα σωμάτων είναι προφανές ότι αν $\Sigma \tau_{\epsilon\zeta} = 0$ η στροφορμή του συστήματος των σωμάτων θα παραμένει σταθερή.

Μεταβολή της ροπής αδράνειας και διατήρηση της στροφορμής

Θεωρούμε ότι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν σε ένα περιστρεφόμενο σώμα είναι μηδέν. Αν, λόγω ανακατανομής της μάζας μεταβληθεί η ροπή αδράνειας του σώματος, ως προς τον άξονα περιστροφής του, τότε μεταβάλλεται και η γωνιακή του ταχύτητα, αλλά η στροφορμή του διατηρείται σταθερή. Δηλαδή:

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\epsilon\lambda} \quad (3.26)$$

Αν το σώμα στρέφεται γύρω από έναν ακλόνητο άξονα περιστροφής ή γύρω από ένα νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του τότε η παραπάνω σχέση είναι αλγεβρική.

Αν I_1 η αρχική ροπή αδράνειας και ω_1 η αρχική γωνιακή ταχύτητα του σώματος και I_2 η τελική ροπή αδράνειας και ω_2 η τελική γωνιακή ταχύτητα του σώματος τότε από την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής προκύπτει:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Από την παραπάνω σχέση είναι προφανές ότι όταν μεταβάλλεται η ροπή αδράνειας ενός σώματος ή ενός συστήματος σωμάτων, τότε μεταβάλλεται και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να έχουμε γωνιακή επιτάχυνση ενός σώματος ακόμα και όταν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν.

Το παράδειγμα του πατινάζ: Μια αθλήτρια του πατινάζ που στριφογυρίζει στο παγοδρόμιο, μπορεί συμπύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της να αυξήσει την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της. Λογικό γιατί αν θεωρήσουμε αμελητέες τις τριβές, τότε οι ροπή της μόνης εξωτερικής δύναμης που είναι το βάρος θα είναι μηδέν και η στροφορμή θα πρέπει να διατηρείται σταθερή, άρα αφού μειώνετε η ροπή αδράνειας θα αυξάνετε η γωνιακή ταχύτητα της.

Το παράδειγμα των "νεκρών" άστρων: Τα αστέρια στο τελευταίο στάδιο της ζωής τους έχουν μάζα από 1,4 μέχρι 2,5 φορές την μάζα του ήλιου, μετατρέπονται σε αστέρες νετρονίων. Τα αστέρια αυτά, όταν εξαντλήσουν τα αποθέματα ενέργειας τους, συρρικνώνονται λόγω της βαρύτητας, με αποτέλεσμα η ακτίνα τους να είναι μόνο μερικές δεκάδες km . Επειδή η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων κατά την διαδικασία αυτή είναι μηδέν, η στροφορμή του αστεριού θα παραμένει σταθερή. Η δραματική μείωση της ροπής αδράνειας του αστεριού έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της γωνιακής του ταχύτητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι ένας αστέρας νετρονίων έχει περίοδο περιστροφής $\frac{1}{3000}s$, με την περίοδο περιστροφής του ήλιου να είναι 25 μέρες.

Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 5.1 - 5.25, 5.37 - 5.49, 5.93, 5.95 - 5.99, 5.101, 5.102, 5.105, 5.107, 5.108, 5.109, 5.111, 5.112

3.7 Κινητική Ενέργεια και Έργο στην Στροφική Κίνηση

3.7.1 Κινητική Ενέργεια λόγω μεταφορικής Κίνησης

Θεωρούμε ένα σώμα μάζας M που εκτελεί μεταφορική κίνηση με ταχύτητα $\vec{v}$. Για να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του σώματος, το χωρίζουμε σε στοιχειώδεις μάζες $m_1, m_2, \dots, m_\nu$ που λόγω της μεταφορικής κίνησης έχουν όλες την ίδια ταχύτητα $\vec{v}$. Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μαζών από τις οποίες αποτελείται. Δηλαδή:

$$K = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \dots + \frac{1}{2}m_\nu v^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}Mv^2 \quad (3.27)$$

Η παραπάνω σχέση είναι προφανώς η γνωστή σχέση για την Κινητική Ενέργεια που μάθαμε στην Α Λυκείου, η οποία βέβαια αναφέρονταν στην μεταφορική κίνηση υλικού σημείου.

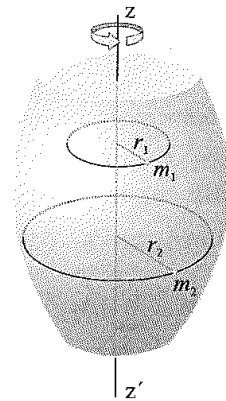
3.7.2 Κινητική Ενέργεια λόγω περιστροφής

Θεωρούμε ένα σώμα που στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από άξονα zz' , όπως φαίνεται στο σχήμα.

Για να υπολογίσουμε την Κινητική Ενέργεια του σώματος, θα το χωρίσουμε σε στοιχειώδεις μάζες $m_1, m_2, \dots, m_\nu$, οι οποίες απέχουν αποστάσεις $r_1, r_2, \dots, r_\nu$, αντίστοιχα από τον άξονα περιστροφής. Οι μάζες αυτές έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ και γραμμικές ταχύτητες με μέτρα $v_1 = \omega r_1, v_2 = \omega r_2, \dots, v_\nu = \omega r_\nu$.

Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μαζών από τις οποίες αποτελείται. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \dots + \frac{1}{2}m_\nu v^2 \Rightarrow \\ K &= \frac{1}{2}m_1\omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2 r_2^2 + \dots + \frac{1}{2}m_\nu\omega^2 r_\nu^2 \Rightarrow \\ K &= \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots + m_\nu r_\nu^2)\omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}I\omega^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$



3.7.3 Κινητική Ενέργεια σώματος που εκτελεί σύνθετη κίνηση

Αν ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική κίνηση με ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$ και στροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Η κινητική ενέργεια του σώματος αυτού θα είναι το άθροισμα των δύο κινητικών ενεργειών. Δηλαδή:

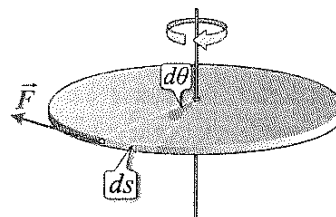
$$K = K_{\mu\epsilon\tau} + K_{\pi\epsilon\rho} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \quad (3.29)$$

όπου M η μάζα του σώματος και I_{cm} η ροπή αδράνειας του σώματος, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και έχει την ίδια διεύθυνση με τη γωνιακή ταχύτητα.

3.7.4 Έργο κατά την στροφική κίνηση

Στην Φυσική Α Λυκείου μάθαμε ότι το έργο μιας σταθερής δύναμης $\vec{F}$ που μετακινεί το σημείο εφαρμογής κατά Δx υπολογίζεται από την σχέση $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$. Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε το έργο μιας δύναμης που περιστρέφει ένα σώμα ως συνάρτηση της ροπής και της γωνίας στροφής.

Αν υποθέσουμε ότι σε ένα τροχό ακτίνας R , που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του, ασκείτε μια εφαπτομενική δύναμη $\vec{F}$ σταθερού μέτρου. Όταν ο τροχός στρέφεται κατά την απειροστά μικρή γωνία $d\theta$, τότε το σημείο εφαρμογής της δύναμης μετατοπίζεται κατά το αντίστοιχο απειροστά μικρό μήκος $ds = R d\theta$. Επειδή η δύναμη και το απειροστό τόξο ds έχουν θεωρητικά την ίδια διεύθυνση μπορούμε να υπολογίσουμε το στοιχειώδες έργο από την σχέση:



$$W = F ds \Rightarrow dW = F R d\theta$$

Επειδή όμως $\tau = FR$ είναι το μέτρο της ροπής της δύναμης ως προς τον άξονα περιστροφής η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$dW = \tau d\theta \quad (3.30)$$

Όταν μια δύναμη περιστρέφει ένα σώμα κατά γωνία θ , τότε για να υπολογίσουμε το έργο W της δύναμης, χωρίζουμε την γωνία σε απειροστές γωνίες $d\theta$ και αθροίζουμε τα αντίστοιχα στοιχειώδη έργα dW . Αν η ροπή της δύναμης έχει σταθερό μέτρο ίσο με τ τότε το έργο της υπολογίζεται από την σχέση:

$$W = \tau \theta \quad (3.31)$$

Το έργο W μια ροπής μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό. Θετικό είναι όταν η ροπή έχει την ίδια φορά με την φορά περιστροφής του σώματος και αρνητικό όταν η ροπή έχει φορά αντίθετη από την φορά περιστροφής.

3.7.5 Ισχύς δύναμης στη στροφική κίνηση

Έστω ότι ένα σώμα που εκτελεί στροφική κίνηση δέχεται την επίδραση μιας εξωτερικής δύναμης $\vec{F}$, της οποίας η ροπή ως προς άξονα περιστροφής του σώματος έχει μέτρο τ . Αν σε ένα απειροστά μικρό χρονικό διάστημα dt το σώμα περιστρέφεται κατά απειροστή γωνία $d\theta$, τότε η δύναμη παράγει έργο dW :

$$dW = \tau d\theta \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Είναι προφανές ότι ο ρυθμός μεταβολής του έργου $\frac{dW}{dt}$ είναι το μέγεθος της στιγμιαίας ισχύος (P) και βέβαια ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας στροφής είναι η γωνιακή ταχύτητα. Επομένως η ισχύς μιας δύναμης σε μια χρονική στιγμή t είναι:

$$P = \tau\omega \quad (3.32)$$

Στο $S.I.$ η μονάδα μέτρησης της ισχύος είναι το $1Watt$. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην μεταφορική κίνηση η στιγμιαία ισχύς δίνεται από την σχέση:

$$P = Fv.$$

Η μέση ισχύς $\bar{P}$ μιας δύναμης ή της ροπής μιας δύναμης ονομάζεται το πηλίκο του έργου ΔW , το οποίο παράγεται από την δύναμη ή τη ροπή της δύναμης σε χρόνο Δt , προς το χρόνο Δt .

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (3.33)$$

3.7.6 Θεώρημα Έργου- Ενέργειας στη στροφική κίνηση

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης προκύπτει ότι, όταν σε ένα σώμα που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ασκούνται εξωτερικές ροπές με $\Sigma\tau \neq 0$, τότε το σώμα αποκτά γωνιακή επιτάχυνση με αποτέλεσμα την μεταβολή της γωνιακής του ταχύτητας ω και κατά συνέπεια και της κινητικής ενέργειας περιστροφής της $K = \frac{1}{2}I\omega^2$.

Η μεταβολή της Κινητικής ενέργειας περιστροφής του σώματος είναι ίση με το έργο των δυνάμεων που οι ροπές τους προκαλούν την μεταβολή. Έτσι για την περίπτωση ενός στερεού σώματος που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα το γνωστό μας από την Α Λυκείου **Θεώρημα Έργου - Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.)** γράφεται:

$$K_2 - K_1 = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \Sigma W \quad (3.34)$$

Το έργο της στατικής τριβής κατά την κύλιση χωρίς ολίσθηση

Όπως έχουμε ξαναδεί παραπάνω στο πρόβλημα της κύλισης χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο ή κεκλιμένο επίπεδο εμφανίζεται η δύναμη της στατικής τριβής στο σημείο επαφής του στερεού με το δάπεδο. **Το έργο της στατικής τριβής κατά την σύνθετη κίνηση του στερεού είναι ίσο με μηδέν.** Η στατική τριβή δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, αφού κάθε στιγμή ασκείται σε διαφορετικό σημείο, έτσι έχει έργο μηδέν. Βέβαια η απάντηση δεν είναι τόσο προφανής όσο το σχολικό βιβλίο την εμφανίζει.

Αν θεωρήσουμε ότι σε χρόνο Δt το κέντρο μάζας του κυλίνδρου μετατοπίζεται κατά Δx πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης ϕ και ο κύλινδρος στρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας του κατά $\Delta\theta$, χωρίς ολίσθηση τότε ισχύει:

$$\Delta x = R\Delta\theta$$

Το έργο της στατικής τριβής κατά την περιστροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής είναι ίσο με την αντίστοιχη μεταβολή της κινητικής ενέργειας λόγω της περιστροφικής κίνησης σύμφωνα με το *Θεώρημα Έργου - Ενέργειας στην στροφική κίνηση*. Άρα έχουμε:

$$\Delta K_{\pi\epsilon\rho} = \Sigma W = (T_{\sigma\tau} R) \Delta\theta$$

Το έργο της στατικής τριβής μαζί με το έργο του βάρους κατά την μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας είναι ίσο με την μεταβολή της κινητικής ενέργειας λόγω της μεταφορικής κίνησης *Θεώρημα Έργου - Ενέργειας στην μεταφορική κίνηση*. Άρα έχουμε:

$$\Delta K_{\mu\epsilon\tau} = \Sigma W = W_x \Delta x - T_{\sigma\tau} \Delta x \Rightarrow \Delta K_{\mu\epsilon\tau} = \Sigma W = W_x \Delta x - T_{\sigma\tau} R \Delta\theta$$

Η μεταβολή της Κινητικής ενέργειας λόγω της σύνθετης κίνησης προκύπτει από την σχέση:

$$\Delta K_{\pi\epsilon\rho} + \Delta K_{\mu\epsilon\tau} = T_{\sigma\tau} R \Delta\theta + W_x \Delta x - T_{\sigma\tau} R \Delta\theta \Rightarrow \Delta K = W_x \Delta x$$

Από τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Το έργο της στατικής τριβής κατά τη στροφική κίνηση είναι αντίθετο με το έργο της ίδιας δύναμης κατά την μεταφορική κίνηση, στον ίδιο χρόνο Δt . Δηλαδή το συνολικό έργο της στατικής τριβής είναι μηδέν.
- Μπορούμε να εφαρμόσουμε την **Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.)**, αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος που είναι μια συντηρητική δύναμη.

3.7.7 Η Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας

Η Α.Δ.Μ.Ε. σε ένα σύστημα ή ένα σύστημα σωμάτων εφαρμόζεται όταν οι δυνάμεις που ασκούνται και παράγουν έργο είναι συντηρητικές δυνάμεις (π.χ. βάρος, δύναμη ελατηρίου). Στην γενική περίπτωση που ένα στερεό εκτελεί σύνθετη κίνηση πρέπει:

$$E_{\mu\eta\chi} = K_{\mu\epsilon\tau} + K_{\pi\epsilon\rho} + U_{\beta\alpha\rho} = \sigma\tau\alpha\theta\epsilon\rho\sigma \quad (3.35)$$

Βέβαια πριν την εφαρμογή της παραπάνω σχέσης, πρέπει να επιλέξουμε ένα οριζόντιο επίπεδο ως επίπεδο αναφοράς ($U_{\beta\alpha\rho} = 0$). Συνήθως επιλέγουμε το χαμηλότερο σημείο από το οποίο διέρχεται το κέντρο μάζας κατά την κίνηση.

Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 6.1 - 6.62, 6.90, 6.92, 6.93, 6.114, 6.116, 6.117, 6.118, 6.120, 6.121, 6.122, 6.123, 6.124, 6.125, 6.127, 6.130, 6.131, 6.132, 6.133, 6.136, 6.137, 6.139, 6.141, 6.143, 6.144, 6.145, 6.148, 6.149, 6.152, 6.155, 6.161, 6.167, 6.171, 6.172, **6.146, 6.147, 6.153, 6.156, 6.159, 6.160, 6.163, 6.164, 6.165, 6.166, 6.170, 6.174**

Αντιστοίχιση μεγεθών και νόμων μεταξύ μεταφορικής και στροφικής κίνησης

Μεταφορική Κίνηση	Στροφική Κίνηση
Μετατόπιση: x	Γωνία στροφής: θ
Ταχύτητα: $v = \frac{dx}{dt}$	Γωνιακή ταχύτητα: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Επιτάχυνση: $a = \frac{dv}{dt}$	Γωνιακή επιτάχυνση: $\alpha_{γων} = \frac{d\omega}{dt}$
Δύναμη: $\vec{F}$	Ροπή Δύναμης: $\vec{\tau}$
Μάζα: m	Ροπή Αδράνειας: I
Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής: $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$	Θεμελιώδης Νόμος Στροφικής Κίνησης: $\Sigma \tau = I\alpha_{γων}$
Ορμή $\vec{P} = m\vec{v}$	Στροφορμή $L = I\omega$
$\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$	$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt}$
Διατήρηση της Ορμής: Αν $\Sigma \vec{F}_{εξ} = 0$, τότε: $\vec{P} = \text{σταθ.}$	Διατήρηση της Στροφορμής: Αν $\Sigma \tau_{εξ} = 0$, τότε: $L = \text{σταθ.}$
Έργο σταθερής δύναμης: $W = Fx$	Έργο σταθερής ροπής $W = \tau\theta$
Ισχύς δύναμης: $P = Fv$	Ισχύς ροπής: $P = \tau\omega$
Κινητική Ενέργεια μεταφοράς: $K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2$	Κινητική Ενέργεια περιστροφής: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Θεώρημα Έργου - Ενέργειας στη μεταφορική κίνηση: $\Sigma W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$	Θεώρημα Έργου Ενέργειας στη στροφική κίνηση: $\Sigma W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$

Είναι προφανές από τον παραπάνω πίνακα ότι με την μηχανική στερεού σώματος “ξαναγράψαμε” την μηχανική του υλικού σημείου που μελετήσαμε στην Α Λυκείου με μια νέα γλώσσα. Οι μαθηματικές σχέσεις δείχνουν μια απόλυτα “συμμετρική” εικόνα ανάμεσα στις δύο κινήσεις. Βέβαια αυτή την φορά έχουμε όλα τα “εργαλεία” για μια περισσότερο ρεαλιστική εικόνα της κίνησης σε σχέση με την μηχανική του υλικού σημείου.

ΠΗΓΗ:

<https://perifysikhs.files.wordpress.com/2011/05/simeiwseisg-july2013.pdf>