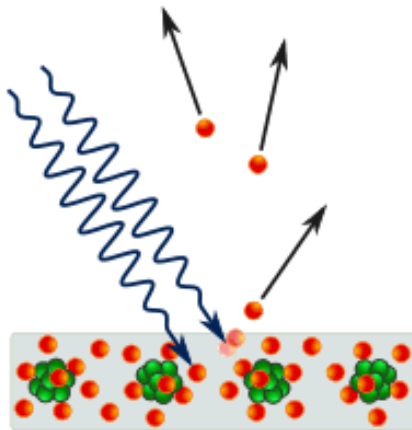


Leo Kastanas

**Στοιχεία Σύγχρονης Φυσικής
για τη Γ λυκείου**



1. Ακτινοβολία μέλανος σώματος
2. Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο
3. Φαινόμενο Compton
4. Η κυματική φύση της ύλης
5. Η αρχή της αβεβαιότητας και η κυματοσυνάρτηση

Αθήνα 2022

1. Ακτινοβολία Μέλανος σώματος

► **Περί ακτινοβολίας:** Ένα οποιοδήποτε αντικείμενο γίνεται ορατό όταν εκπέμπει φως. Στην περίπτωση που φωτίσουμε ένα σώμα τότε ένα μέρος από τις φωτεινές ακτίνες που προσπίπτουν σε αυτό επανεκπέμπονται προς το περιβάλλον και γίνονται ορατές φτάνοντας στα μάτια μας όπου σχηματίζεται η εικόνα του σώματος. Το υπόλοιπο μέρος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας απορροφάται από το σώμα οπότε η θερμοκρασία του σώματος ανεβαίνει. Διακρίνουμε έτσι τις εξής περιπτώσεις:

α. Αν ένα σώμα είναι στο σκοτάδι και δεν γίνεται ορατό σημαίνει ότι από την επιφάνεια του σώματος δεν εκπέμπεται ακτινοβολία στο φάσμα του ορατού. Στην περίπτωση αυτή το αντιλαμβανόμαστε ως μαύρο.

β. Αν ένα σώμα φωτιστεί με λευκό φως, τότε αυτό απορροφά ορισμένες ακτινοβολίες αλλά επανεκπέμπει κάποιες άλλες με βάση τις οποίες διακρίνουμε το χρώμα του σώματος.

γ. Αν ένα σώμα φωτιστεί με λευκό φως και εμείς το βλέπουμε λευκό, τότε το σώμα δεν απορρόφησε καμία από τις εισερχόμενες ακτίνες και τις επανεκπέμπει όλες. Το λευκό χρώμα δημιουργείται από την ταυτόχρονη άφιξη όλων των μηκών κύματος του ορατού φωτός στο μάτι μας. Το λευκό δηλαδή δεν αποτελείται από κάποιο μήκος κύματος ή κάποια συχνότητα αλλά αποτελεί τη σύνθεση όλων.

δ. Αν ένα σώμα φωτιστεί με λευκό φως και εμείς το βλέπουμε μαύρο, τότε το σώμα απορρόφησε όλες τις εισερχόμενες ακτίνες και δεν επανεκπέμπει καμία.

► **Μέλαν σώμα στη φυσική θεωρείται το σώμα που απορροφά την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που προσπίπτει σ' αυτό, σε όλο το φάσμα της (όλες τις συχνότητες).**

Στην πράξη, μέλαν σώμα μπορεί να θεωρηθεί ένα οποιοδήποτε αντικείμενο με αιθαλωμένη την επιφάνειά του. Το μέλαν σώμα χαρακτηρίζεται από μηδενική επιφανειακή ανάκλαση και απόλυτη εσωτερική απορροφητικότητα! Τα παραπάνω ισχύουν για όλα τα μήκη κύματος και για όλες τις γωνίες προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

► **Θερμική ακτινοβολία:** Είναι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκπέμπει κάθε σώμα σε οποιαδήποτε θερμοκρασία κι αν βρίσκεται. Η θερμική ακτινοβολία μπορεί να αποτελείται από οποιοδήποτε μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος, από τα ραδιοφωνικά κύματα μέχρι τις ακτίνες γάμα.

► **Ένταση ακτινοβολίας, I:** Ονομάζεται το μονόμετρο φυσικό μέγεθος που εκφράζει την ενέργεια που εκπέμπεται ανά μονάδα επιφανείας στη μονάδα του χρόνου. Ή το πηλίκο της ισχύος της ακτινοβολίας ανά μονάδα επιφανείας

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{P}{\Delta S} \quad (1.1)$$

Στο S.I. μετριέται σε J/m²s ή W/m².

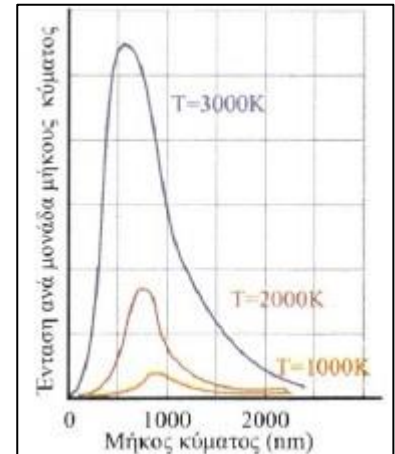
Η ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπει ένα σώμα εξαρτάται από τη θερμοκρασία του.

Για ακτινοβολίες που εκπέμπονται σφαιρικά, το εμβαδόν της σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r είναι $\Delta S = 4\pi r^2$, αν υποθέσουμε ότι η πηγή της ακτινοβολίας είναι στο κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας r. Τότε

$$I = \frac{P}{\Delta S} = \frac{P}{4\pi r^2} \quad (1.2)$$

► **Η ακτινοβολία του μέλανος σώματος:** Το μέλαν σώμα, σ' οποιαδήποτε θερμοκρασία κι αν βρίσκεται εκπέμπει ενέργεια με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σ' όλο το φάσμα της. Δηλαδή το μέλαν σώμα όχι μόνο απορροφά αλλά και εκπέμπει και μάλιστα το μέγιστο δυνατόν ποσό ακτινοβολίας. Δεν εκπέμπει όμως την ίδια ένταση ακτινοβολίας σε 'όλα τα μήκη κύματος. Το μεγαλύτερο τμήμα της ενέργειας που εκπέμπεται μ' αυτό τον τρόπο περιορίζεται σε μια στενή περιοχή, με "αιχμή" κάποιο μήκος κύματος ($\lambda_{\max}$) διαφορετικό για κάθε θερμοκρασία.

Διαπιστώνουμε ότι, **καθώς η θερμοκρασία αυξάνεται, να αυξάνεται και η ολική εκπεμπόμενη ένταση I , ενώ η κορυφή της καμπύλης $I(\lambda)$ γίνεται υψηλότερη και η θέση της μετατοπίζεται προς μικρότερα μήκη κύματος (μεγαλύτερες συχνότητες).**



Σε θερμοκρασίες γύρω στους 1000 K το μέλαν σώμα εκπέμπει κυρίως στην υπέρυθη περιοχή, ενώ σε ψηλότερες θερμοκρασίες το $\lambda_{\max}$ μετατοπίζεται σε μικρότερα μήκη κύματος (μεγαλύτερες συχνότητες), στην περιοχή του ορατού, (βλέπε σχήμα).

Η καλύτερη αναπαράσταση μέλανος σώματος είναι μια θερμαινόμενη κοιλότητα (π.χ. ένας φούρνος). Αν ανοίξει κανείς μια οπή σε φούρνο, η εκπεμπόμενη ακτινοβολία έχει όλα τα χαρακτηριστικά της ακτινοβολίας μέλανος σώματος. Η εκπεμπόμενη ακτινοβολία σε θερμοκρασίες μικρότερες των 800K δεν είναι ορατές από το ανθρώπινο μάτι.

Δύο αξιοσημείωτα χαρακτηριστικά στο φάσμα της ακτινοβολίας των σωμάτων που προσεγγίζουν την συμπεριφορά του μέλανος σώματος είναι ότι

(α) το φάσμα είναι συνεχές – εκπέμπει όλα τα μήκη κύματος του H/M φάσματος και

(β) το φάσμα δεν εξαρτάται από την φύση των σωμάτων, αλλά μόνο από την θερμοκρασία τους.

Η σχέση που συνδέει την απόλυτη θερμοκρασία (T) του μέλανος σώματος με το μήκος κύματος αιχμής ($\lambda_{\max}$) είναι ο **νόμος μετατόπισης Wien**.

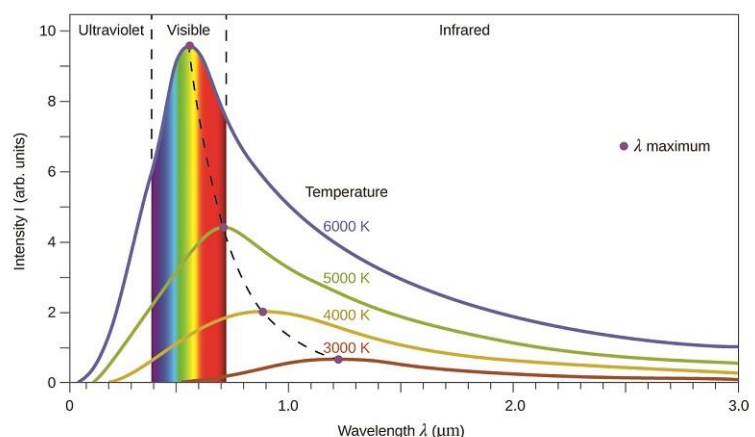
$$\lambda_{\max} T = \text{σταθερό} \quad (1.3)$$

Αυτό το σταθερό γινόμενο ισούται με:

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Η σχέση αυτή αλλά και η καμπύλη ($I-\lambda$) μας λένε ότι **για υψηλότερες θερμοκρασίες το μήκος κύματος αιχμής στο οποίο εκπέμπεται το μέγιστο της έντασης της ακτινοβολίας του είναι μικρότερο.**

Με άλλα λόγια τα μήκη κύματος της ακτινοβολίας που εκπέμπονται είναι κυρίως μικρότερα δηλ. οι συχνότητες μεγαλύτερες.



- Να παρατηρήσουμε ότι τα εμβαδά κάτω από τις καμπύλες αυξάνονται στις υψηλότερες θερμοκρασίες. Τα εμβαδά ισοδυναμούν με την ποσότητα της ακτινοβολίας.

- **Ερμηνεία:** Για την ερμηνεία των πειραματικών δεδομένων οι ερευνητές δέχτηκαν ότι τα άτομα των σωμάτων ταλαντώνονται. Το πλάτος της ταλάντωσής τους είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας στην

οποία βρίσκονται τα σώματα. Αποτέλεσμα αυτής της ταλάντωσης των ατόμων, που μπορούμε να τα δούμε ως στοιχειώδη ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα, είναι η εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η υπόθεση όμως αυτή δεν μπόρεσε να ερμηνεύσει ικανοποιητικά τα πειραματικά αποτελέσματα. Το φαινόμενο ερμηνεύτηκε πλήρως το 1900, με τις δύο υποθέσεις που διατύπωσε ο **Planck** θεμελιώνοντας έτσι την **κβαντική θεωρία**.

1. Η ενέργεια των ταλαντούμενων ατόμων δε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Μπορεί να πάρει μόνο διακριτές (κβαντισμένες) τιμές. Οι τιμές της ενέργειας που μπορεί να έχει το ταλαντούμενο άτομο είναι

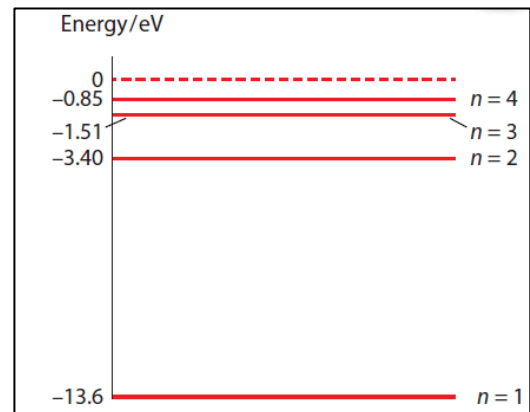
$$E = nh \cdot f \quad (1.4)$$

όπου n ένας θετικός ακέραιος αριθμός που ονομάζεται **κβαντικός αριθμός**, f η συχνότητα ταλάντωσης του ατόμου και h μια σταθερά που αργότερα έπαιξε μεγάλο ρόλο στη φυσική και ονομάστηκε **σταθερά δράσης του Planck**. Η τιμή της βρέθηκε $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$

• **Όσο αυξάνεται η συχνότητα αυξάνεται και η ενέργεια.** Άρα η υπεριώδης ακτινοβολία έχει μεγαλύτερη ενέργεια από την υπέρυθη. Πχ κάτι που εκπέμπει θερμική ακτινοβολία και είναι κυανό έχει υψηλότερη θερμοκρασία από κάτι άλλο που είναι κόκκινο.

2. Το ποσό της ενέργειας, που μπορεί να απορροφήσει ή να εκπέμψει ένα άτομο, υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, μπορεί να πάρει μόνο διακριτές τιμές.

Αν το άτομο απορροφήσει ένα κβάντο ενέργειας δηλαδή ενέργεια $E = hf$, αυξάνει την ενέργειά του κατά ένα σκαλοπάτι στην κλίμακα των ενεργειακών σταθμών. Αν πάλι το άτομο εκπέμψει ένα κβάντο ενέργειας υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας τότε κατεβαίνει ένα σκαλοπάτι στην ίδια κλίμακα. Όσο ένα άτομο παραμένει στην ίδια ενεργειακή κατάσταση (στάθμη), ούτε εκπέμπει ούτε απορροφά ενέργεια. Τα άτομα, λοιπόν, απορροφούν ή εκπέμπουν ενέργεια όχι συνεχώς, αλλά κάνοντας ενεργειακά άλματα, δηλαδή **ασυνεχώς**.



Παράδειγμα 1.1: Πόση ενέργεια σε Joule και σε eV έχει ένα φωτόνιο ακτινοβολίας, συχνότητας $f = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Δίνεται $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Η ενέργεια του φωτονίου: $E = h \cdot f = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 5 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1} \rightarrow E = 33,15 \cdot 10^{-20} \text{ J}$

Και επειδή $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, έχουμε: $E = \frac{33,15 \cdot 10^{-20} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} \rightarrow E = 2,07 \text{ eV}$

Παράδειγμα 1.2 Η κβάντωση της ενέργειας μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα συστήματα απλώς δεν παρατηρείται σε μεγάλα σώματα (του μακρόκοσμου) λόγω της μικρής σχετικά συχνότητας ταλάντωσης. Ας δούμε έναν ταλαντωτή μάζα-ελατήριο. Σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k = 1000 \text{ N/m}$ και κάνει ΑΑΤ με πλάτος $A = 0,2 \text{ m}$.

Το σύστημα έχει ενέργεια $E = \frac{1}{2} k A^2 = 20 \text{ J}$ και συχνότητα ταλάντωσης $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m} \rightarrow f = 20 \text{ Hz}$

Η ενέργεια ενός κβάντου αυτού του συστήματος θα είναι:

$$E_1 = hf = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 20 \text{ s}^{-1} \rightarrow E_1 = 132,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}$$

Αν υποθέσουμε ότι το σύστημα χάνει λόγω τριβών ενέργεια E_1 το ποσό αυτό δεν μπορεί να γίνει αντιληπτό. Ο κβαντικός αριθμός θα είναι: $E=nhf \rightarrow n = \frac{20J}{132,6 \cdot 10^{-34}J} \rightarrow n=15 \cdot 10^{32}$.

Μιλάμε για ένα τεράστιο αριθμό.

Παράδειγμα 1.3: Μια εντυπωσιακή εφαρμογή του νόμου Wien είναι ο υπολογισμός της επιφανειακής θερμοκρασίας του Ήλιου μας, με την βοήθεια ... της δαρβινικής εξέλιξης. Το εύρος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που ανήκει στο ορατό φάσμα εκτείνεται σε μήκη κύματος περίπου από 400nm έως 700nm με μέσο όρο 550nm. Τα μάτια των ανθρώπων (και άλλων ζώων) προσαρμόστηκαν να βλέπουν καλύτερα σ' εκείνο το μήκος κύματος της ηλιακής ακτινοβολίας στο οποίο αντιστοιχεί η μέγιστη ποσότητα της ηλιακής ακτινοβολίας που φτάνει στη Γη, δηλαδή σε μήκος κύματος γύρω στα 530nm=5,3·10⁻⁷m. Θέτοντας στο νόμο του Wien $\lambda_{\max}=5,3 \cdot 10^{-7}m$, παίρνουμε

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2,9 \cdot 10^{-3}m \cdot K \rightarrow 5,3 \cdot 10^{-7}m \cdot T = 2,9 \cdot 10^{-3}m \cdot K \rightarrow T = 5.470K$$

πολύ κοντά στην πραγματική τιμή 5778K για την επιφανειακή θερμοκρασία του Ήλιου.

Παράδειγμα 1. 4 Υπάρχουν λαμπτήρες Led με «θερμό» και «ψυχρό» φωτισμό. Οι λάμπες με το θερμό βγάζουν λευκό φως με μια απόχρωση «κιτρινιάρικη» όπου κυριαρχούν κάποια μεγάλα μήκη κύματος, προς το ερυθρό. Αυτοί οι λαμπτήρες έχουν θερμοκρασιακή ένδειξη από 2700K έως 3200K. Αντιθέτως οι άλλοι με τον «ψυχρό» βγάζουν λευκό φως με μια κυανή απόχρωση δηλαδή εδώ κυριαρχούν μικρότερα μήκη κύματος. Οι αντίστοιχες ενδείξεις είναι από 5000K-6500K. Οι θερμοκρασίες αυτές αντιστοιχούν στα χρώματα που βγάζει ένα μέταλλο όταν θερμαίνεται σε αυτές τις τιμές. Προφανώς δεν επικρατούν τέτοιες θερμοκρασίες στις λάμπες. Μια αντιστοίχιση είναι που επιβεβαιώνει το νόμο μετατόπισης του Wien. Και στις λάμπες.

Παράδειγμα 1.5 Παρατηρώντας μία νύχτα τον ουρανό με ένα τηλεσκόπιο πώς μπορούμε να ξεχωρίζουμε τα άστρα που έχουν επιφανειακή θερμοκρασία μικρότερη από αυτήν του Ήλιου; Αν αναλύσουμε με ένα φασματοσκόπιο το φως του αστέρα που παρατηρούμε με το τηλεσκόπιο θα διαπιστώσουμε ότι, εάν είναι ψυχρότερος από τον Ήλιο, το μήκος κύματος στο οποίο εκπέμπεται το μέγιστο της έντασης της ακτινοβολίας του είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο του Ήλιου. Κάτι που φαίνεται ερυθρό έχει μικρότερη επιφανειακή θερμοκρασία από κάτι που φαίνεται κυανό. Κάτι όπως ο ήλιος που φαίνεται κίτρινο έχει μεγαλύτερη επιφανειακή θερμοκρασία από κάτι που φαίνεται ερυθρό.

•Το φάσμα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε μήκη κύματος

Ραδιοκύματα : $10^5m - 10^{-2}m$ (τηλεπικοινωνίες)

Μικροκύματα : $10^{-2}m - 10^{-3}m$ (ραντάρ, φούρνοι)

Υπέρυθρο : $10^{-3}m - 7 \cdot 10^{-7}m$ (θέρμανση)

Ορατό φως: $7 \cdot 10^{-7}m - 4 \cdot 10^{-7}m$ (χρώματα)

Υπεριώδες: $4 \cdot 10^{-7}m - 6 \cdot 10^{-8}m$ (μαύρισμα, χημικές επιδράσεις)

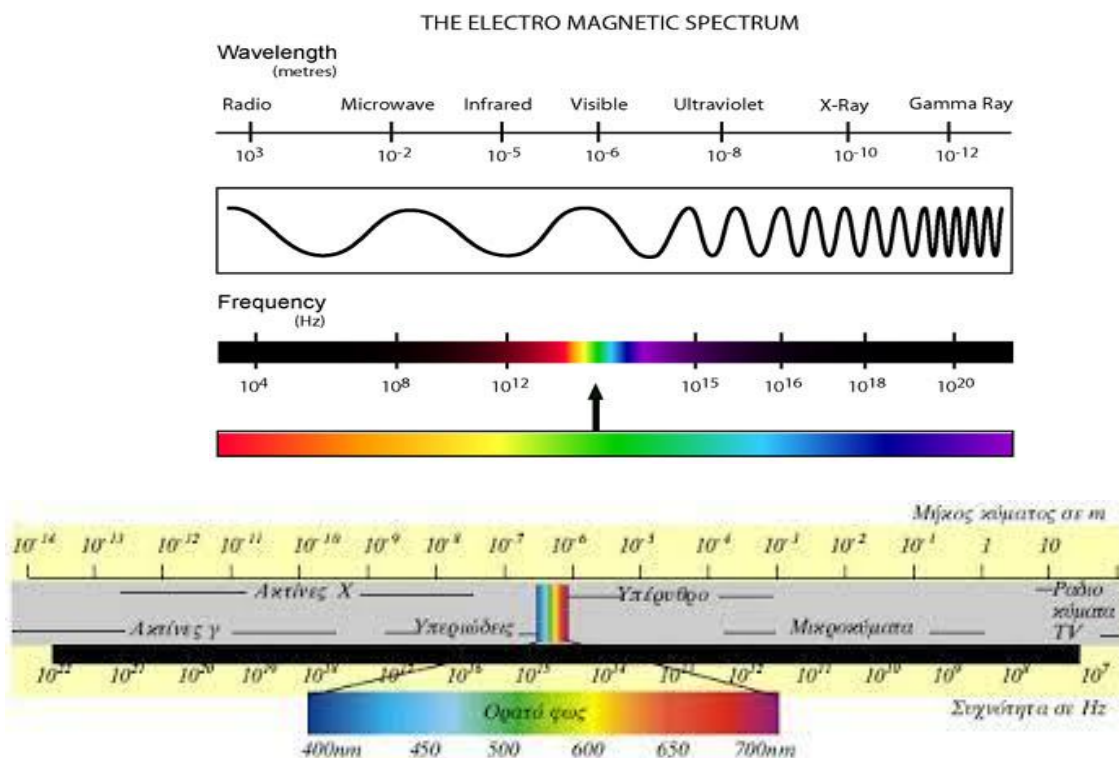
Ακτίνες X: $10^{-8}m - 10^{-11}m$ (ακτινοδιαγνωστική)

Ακτίνες γ: $10^{-10}m - 10^{-14}m$ (ραδιενέργεια)

•Το φάσμα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε μήκη κύματος και συχνότητες

Συνολικό Ηλεκτρομαγνητικό φάσμα

f(Hz)	λ (m)	Όνομα	$E=h \cdot f$ (eV)	Πηγή ακτίνων	Χ ρήση
10^5	10^3	Μακρά	10^{-9}	ηλεκτρονικά	radio TV
10^6	10^2	Μεσαία	10^{-8}	//	//
10^7	10^1	Βραχεία	10^{-7}	//	//
10^8	10^0	Υπερβραχεία	10^{-6}	//	//
10^9	10^{-1}	Μικροκύματα	10^{-5}	//	Radar και
10^{10}	10^{-2}	Μικροκύματα	10^{-4}	//	Τηλ/νίες
10^{11}	10^{-3}	Μικροκύματα	10^{-3}	//	//
10^{12}	10^{-4}	Υπέρυθρο	10^{-2}	μόρια &	βιομηχανία
10^{13}	10^{-5}	Υπέρυθρο	10^{-1}	θερμά	ιατρική
10^{14}	10^{-6}	Υπέρυθρο	10^0	σώματα	αστρονομία
10^{15}	10^{-7}	Ορατό φως	10^1	μόρια-άτομα	όραση
10^{16}	10^{-8}	Υπεριώδες	10^2	Ατομα, ηλιακό φως	Ιατρική &
10^{17}	10^{-9}	Ακτίνες X	10^3	Πέδηση ηλεκτρον.	αποστείρωση
10^{18}	10^{-10}	Ακτίνες X & γ	10^4	διέγερση ατομων	Ιατρική &
10^{19}	10^{-11}	Ακτίνες X & γ	10^5		βιομηχανία
10^{20}	10^{-12}	Ακτίνες γ	10^6	Πυρηνική σχάση	Ιατρική &
10^{21}	10^{-13}	Ακτίνες γ	10^7	//	Βιομηχανία
10^{22}	10^{-14}	Ακτίνες γ	10^8	//	Έρευνα
10^{23}	10^{-15}	Κοσμική ακτ.	10^9	Αστρικός χώρος	Έρευνα



2. Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

► Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι το φαινόμενο κατά το οποίο μια μεταλλική επιφάνεια απελευθερώνει ηλεκτρόνια στο περιβάλλον όταν πάνω της προσπίπτει φως.

• Βασικές παραδοχές

1. Εκπομπή φωτοηλεκτρονίων έχουμε μόνο όταν η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη ή ίση μιας ορισμένης συχνότητας, η οποία είναι χαρακτηριστική για το μέταλλο. Αυτή η οριακή συχνότητα ονομάζεται **συχνότητα κατωφλίου** (f_0).

2. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων που αποσπώνται από το μέταλλο ανά μονάδα χρόνου από ένα δεδομένο μέταλλο και για μια δεδομένη συχνότητα φωτός είναι ανάλογος της έντασης της φωτεινής ακτινοβολίας που προσπίπτει στο μέταλλο.

3. Η κινητική ενέργεια με την οποία εξέρχονται τα ηλεκτρόνια από ένα δεδομένο μέταλλο **δεν** εξαρτάται από την ένταση της φωτεινής ακτινοβολίας αλλά μόνο από **τη συχνότητά** της και αυξάνεται όταν η συχνότητα της ακτινοβολίας μεγαλώνει.

Το φαινόμενο δε μπορεί να εξηγηθεί μόνο από το γεγονός ότι το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Χρειάζεται η άλλη θεωρία περί σωματιδιακής φύσης του φωτός δηλαδή η θεωρία των κβάντα.

Σύμφωνα με την κβαντική θεωρία, το φως αποτελείται από μικρά πακέτα ενέργειας, που ονομάζονται κβάντα φωτός ή φωτόνια. Η ενέργεια κάθε φωτονίου είναι

$$E = h \cdot f = h \frac{c}{\lambda} \quad (2.1)$$

όπου f η συχνότητά, λ το μήκος κύματος, c η ταχύτητα του φωτός στο κενό και $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J/s η σταθερά του Planck. Ως γνωστόν για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα: $c = \lambda \cdot f$.

Ένα ηλεκτρόνιο για να υπερνικήσει τις δυνάμεις που το συγκρατούν στο μέταλλο πρέπει να προσλάβει από το φως ένα ελάχιστο ποσό ενέργειας. Η ενέργεια αυτή ονομάζεται έργο εξαγωγής και συμβολίζεται με ϕ (ή W). Το **έργο εξαγωγής** ποικίλει από μέταλλο σε μέταλλο και είναι χαρακτηριστικό αυτού. Αναφέρεται δε στο πιο χαλαρά συνδεδεμένο ηλεκτρόνιο του μετάλλου (επιφανειακό). Πχ. Για Na(2,7eV), Ni(5,1eV), Cu(4,7eV).

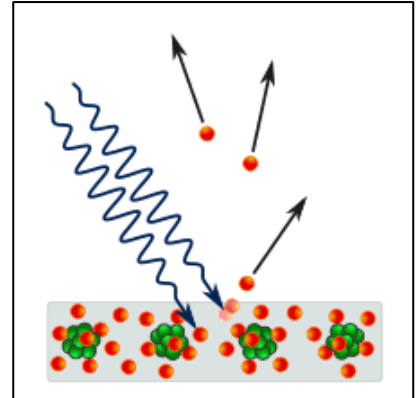
Κατά τον Einstein, κάθε φωτόνιο της δέσμης που φωτίζει την κάθοδο μεταδίδει όλη του την ενέργεια hf σε ένα μόνο από τα ηλεκτρόνια του μετάλλου. Αν η ενέργεια hf του φωτονίου είναι μικρότερη από το έργο εξαγωγής, το ηλεκτρόνιο δε μπορεί να εγκαταλείψει το μέταλλο. Εάν είναι μεγαλύτερη ή ίση με το **έργο εξαγωγής** ϕ το ηλεκτρόνιο εγκαταλείπει το μέταλλο με κινητική ενέργεια που υπολογίζεται σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας από τη σχέση που λέγεται **Φωτοηλεκτρική Εξίσωση του Einstein**

$$K = h \cdot f - \phi \quad (2.2)$$

Η φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein ερμηνεύει όλα τα πειραματικά δεδομένα. Για να εξέλθει ένα ηλεκτρόνιο από το μέταλλο πρέπει: $hf - \phi \geq 0$, δηλαδή η ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου να είναι μεγαλύτερη ή οριακά ίση με το έργο εξαγωγής. Άρα:

$$hf \geq \phi \rightarrow f \geq \frac{\phi}{h} \rightarrow f_0 = \frac{\phi}{h} \quad (2.3)$$

Η ελάχιστη συχνότητα $f_0 = \frac{\phi}{h}$ είναι η **συχνότητα κατωφλίου**.



Αν η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα κατωφλίου η αύξηση της έντασης της προσπίπτουσας ακτινοβολίας συνεπάγεται αύξηση του αριθμού των φωτονίων που πέφτουν στην κάθοδο ανά μονάδα χρόνου και επομένως αύξηση του αριθμού των φωτοηλεκτρονίων που εξέρχονται από το μέταλλο στον ίδιο χρόνο (βλέπε λυμένο πρόβλημα S2.3).

Όπως φαίνεται από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση (2), η (μέγιστη) κινητική ενέργεια με την οποία εξέρχονται τα ηλεκτρόνια από κάποιο μέταλλο εξαρτάται μόνο από τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και φυσικά από το έργο εξαγωγής του μετάλλου και όχι από την ένταση της ακτινοβολίας.

Και λέμε **μέγιστη** διότι άλλα ηλεκτρόνια που βρίσκονται βαθύτερα στο μέταλλο μέχρι να βγουν υπόκεινται σε σκεδάσεις και βγαίνουν με μικρότερες κινητικές ενέργειες. Η μέγιστη κινητική ενέργεια K , αναφέρεται στα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στην υψηλότερη ενεργειακή στάθμη (στάθμη Fermi).

► **Η ορμή των φωτονίων:** Ένα σωματίο με μηδενική μάζα ηρεμίας - τέτοιο είναι το φωτόνιο - έχει ενέργεια

$$E = p \cdot c \quad (2.4)$$

Όμως είδαμε επίσης από σχέση (1) η ενέργεια ενός φωτονίου είναι $E = hf = h \frac{c}{\lambda}$ διότι $c = \lambda \cdot f$.

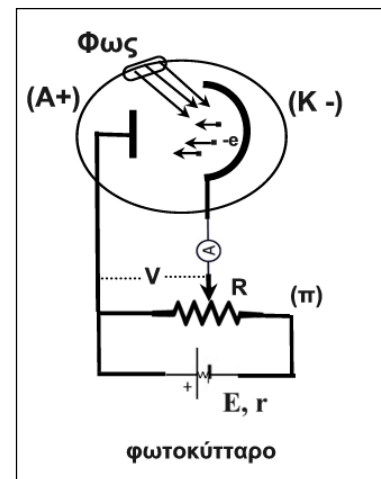
Αρα η ορμή του φωτονίου δίνεται από τη σχέση

$$E = pc \rightarrow h \frac{c}{\lambda} = p \cdot c \rightarrow p = \frac{h}{\lambda} \quad (2.5)$$

Το φως στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο συμπεριφέρεται σαν ένα ρεύμα σωματιδίων (φωτονίων). Σε άλλες περιπτώσεις όμως το φως συμπεριφέρεται σαν κύμα (π.χ. δίνει φαινόμενα συμβολής). Η σχέση (5) είναι ιδιαίτερα σημαντική γιατί φωτίζει τη δυαδική φύση του φωτός. Συνδέει μία καθαρά σωματιδιακή ιδιότητα, όπως η ορμή, με μια καθαρά κυματική ιδιότητα, όπως το μήκος κύματος. Ο σύνδεσμος μεταξύ τους είναι η σταθερά του Planck.

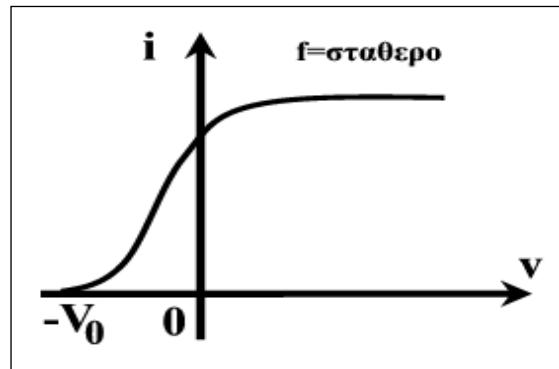
► **Υπολογισμός της κινητικής ενέργειας K των φωτοηλεκτρονίων. Το φωτοκύτταρο:** Για τη μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου θα χρησιμοποιήσουμε τη διάταξη του σχήματος. Μέσα σε ένα σωλήνα υψηλού κενού ($\approx 10^{-7} \text{ atm}$) τοποθετούμε δύο ηλεκτρόδια. Το πρώτο, που χρησιμεύει ως **κάθοδος (K-)**, έχει μεγάλη επιφάνεια, φέρει επίστρωση από ένα αλκαλιμέταλλο (K ή Cs) και όταν φωτίζεται εκπέμπει ηλεκτρόνια. Τα ηλεκτρόνια αυτά συλλέγονται από το δεύτερο ηλεκτρόδιο την **άνοδο (A+)**. Με τη βοήθεια μιας ποτενσιομετρικής διάταξης (Π) μπορούμε να μεταβάλλουμε την τάση V που εφαρμόζεται στα ηλεκτρόδια. Τέλος, με ένα μικροαμπερόμετρο (A) που παρεμβάλλεται στο κύκλωμα μπορούμε να μετρήσουμε την ένταση του ρεύματος που οφείλεται στα ηλεκτρόνια που εκπέμπει η φωτιζόμενη κάθοδος. Όταν η κάθοδος φωτίζεται με φως κατάλληλης συχνότητας εκπέμπει ηλεκτρόνια (φωτοηλεκτρόνια) τα οποία επιταχύνονται από το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των ηλεκτροδίων και καταλήγουν στην άνοδο.

Το διάγραμμα (i - V) που ακολουθεί παριστάνει την ένταση του ρεύματος σε συνάρτηση με την τάση μεταξύ ανόδου-καθόδου, στο κύκλωμα του σχήματος για σταθερή όμως συχνότητα ακτινοβολίας, f .



i) Για τάση $V=0$. Παρατηρούμε ότι το αμπερόμετρο γράφει ρεύμα. Αυτό σημαίνει ότι τα φωτοηλεκτρόνια εξέρχονται από την κάθοδο με κινητική ενέργεια που τους επιτρέπει να κινηθούν μέχρι την άνοδο.

ii) Αν η τάση $V>0$ έχει θετική τιμή δηλαδή δίνει στην άνοδο (A) θετικό δυναμικό, που είναι υψηλότερο της αρνητικής καθόδου K. Τότε τα φωτοηλεκτρόνια αποκτούν πρόσθετη ενέργεια από το ηλεκτρικό πεδίο και επιταχύνονται προς την άνοδο. Το φωτοηλεκτρόνιο που αρχικώς δημιουργήθηκε από την πρόσπτωση ενός φωτονίου, εγκαταλείπει την επιφάνεια της καθόδου και κινούμενο προς την άνοδο επιταχύνεται, κάτω από την επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί η εφαρμοζόμενη τάση. Στην διαδρομή του έχει αποκτήσει κινητική ενέργεια, η οποία είναι ικανή να ιονίσει, μέσω αλληπάλληλων κρούσεων, τα μόρια του αερίου που θα συναντήσει, με αποτέλεσμα δευτερογενώς να παράγονται περισσότερα ηλεκτρόνια. Μ' αυτόν τον τρόπο, από ένα αρχικό φωτοηλεκτρόνιο παράγονται καταιγιστικά πλείστα ηλεκτρόνια. Αυτός είναι ένας μηχανισμός ενίσχυσης του φαινομένου. Ενόσω η δημιουργία του πρωτογενούς φωτοηλεκτρονίου εξαρτάται από την ενέργεια του φωτονίου, ο αριθμός των δευτερογενώς παραγόμενων ηλεκτρονίων εξαρτάται από την διαφορά δυναμικού στα άκρα ανάμεσα στην άνοδο και στην κάθοδο. Όσο μεγαλύτερη η τιμή της τάσης τόσο περισσότερα ηλεκτρόνια δημιουργούνται, με αποτέλεσμα να διαρρέεται η αντίσταση από περισσότερο ανοδικό ρεύμα. Το φαινόμενο αυτό της ενίσχυσης παρουσιάζει κάμψη μετά από κάποια τιμή της τάσης και πέρα. Έτσι εμφανίζονται συνθήκες κορεσμού, όπου όσο και εάν αυξηθεί η τάση τροφοδοσίας, το ανοδικό ρεύμα να παραμένει σταθερό.



iii) Αν η τάση $V<0$, έχει τιμή λίγο μικρότερη από το μηδέν. Παρατηρούμε τότε ότι έχουμε ρεύμα και για τάσεις λίγο μικρότερες από το μηδέν. Τάση αρνητική, εδώ, σημαίνει ότι η άνοδος έχει μικρότερο δυναμικό από την κάθοδο. Στην περίπτωση αυτή το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ ανόδου - καθόδου παρεμποδίζει τα ηλεκτρόνια που εξέρχονται από την κάθοδο να φτάσουν στην άνοδο. Εφόσον για κάποιες αρνητικές τιμές της τάσης έχουμε ρεύμα, η κινητική ενέργεια ορισμένων ηλεκτρονίων, όταν εξέρχονται από την κάθοδο, είναι αρκετά μεγάλη ώστε να υπερνικήσουν το αντιτιθέμενο ηλεκτρικό πεδίο και να φτάσουν στην άνοδο. Η τάση (V_0) στην οποία διακόπτεται το ρεύμα ονομάζεται **τάση αποκοπής**.

Αν είναι K η μέγιστη κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων που βγαίνουν από την κάθοδο τότε η ελάχιστη αντίθετη τάση για να σταματήσουν και να μην φτάσουν στην άνοδο, δηλαδή για να μηδενίζεται το ρεύμα i , θα είναι

$$\Theta\text{ΜΚΕ: } W=K_{\tau}-K_{\alpha} \rightarrow -e \cdot |V_0|=0-K \rightarrow |V_0|e=K \rightarrow$$

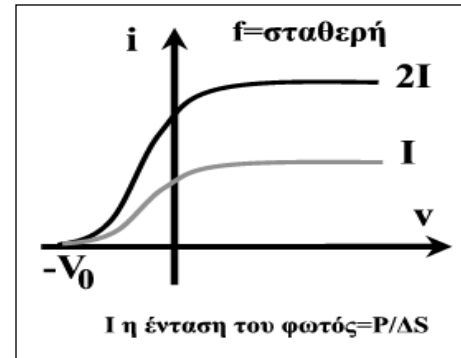
$$|V_0|=\frac{K}{e} \rightarrow K=|V_0| \cdot e \quad (2.6)$$

Και επειδή η K είναι η μέγιστη κινητική ενέργεια με την οποία βγαίνουν τα φωτοηλεκτρόνια από το μέταλλο από την ΑΔΕ ισχύει $hf=K+\phi \rightarrow K=hf-\phi$

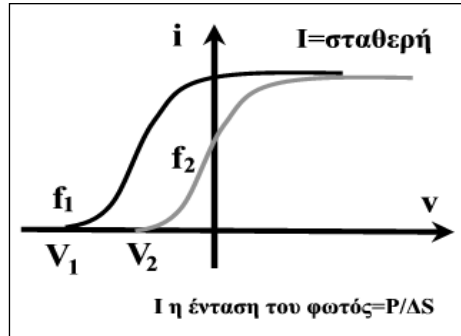
$$\text{Άρα: } |V_0|=\frac{K}{e}=\frac{hf-\phi}{e} \rightarrow |V_0|=\frac{h(f-f_0)}{e} \quad (2.7)$$

Συμπεράσματα:

- Η ένταση του ρεύματος i των φωτοηλεκτρονίων είναι ανάλογη της έντασης I της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Και αυτό φαίνεται στη γραφική παράσταση (i - V) για δύο διαφορετικές εντάσεις ακτινοβολίας (φωτός) I και $2I$, αλλά ίδιας συχνότητας f . Φυσικά λόγω της ίδιας συχνότητας έχουμε την ίδια τάση αποκοπής V_0 . Αλλά οι διαφορετικές εντάσεις ακτινοβολίας προκαλούν και ανάλογα διαφορετικές μέγιστες τιμές στην ένταση του ρεύματος, αφού εξάγονται περισσότερα ηλεκτρόνια όταν η ένταση του φωτός αυξάνεται.



- Ακόμα μπορούμε να δούμε στη διπλανή γραφική παράσταση ότι για την ίδια ένταση ακτινοβολίας I και για δύο διαφορετικές συχνότητες f_1, f_2 με $f_1 > f_2$ έχουμε: Διαφορετικές τάσεις αποκοπής $V_1 > V_2$, αλλά ίδιο ρεύμα κόρου i . Διότι εξάγεται ο ίδιος αριθμός ηλεκτρονίων στην μονάδα του χρόνου.



► Υπολογισμός του έργου εξαγωγής μετάλλου και της σταθεράς του Planck

Με τη βοήθεια του φωτοηλεκτρικού φαινομένου μπορούμε να υπολογίσουμε τα ϕ και h . Κάνουμε τη γραφική παράσταση της V_0 σε σχέση με τη συχνότητα f της ακτινοβολίας.

Από τη σχέση (2.7) $V_0 = \frac{h}{e}f - \frac{\phi}{e}$

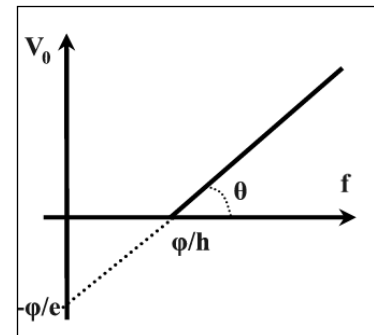
Για $V_0=0 \xrightarrow{(2.7)} hf=\phi \rightarrow f=\frac{\phi}{h}$ η συχνότητα κατωφλίου

Και για $f=0 \rightarrow V_0 = -\frac{\phi}{e}$

Άρα κάνουμε το πείραμα για διαφορετικές συχνότητες και υπολογίζουμε κάθε φορά την τάση αποκοπής εύκολα αφού μέσω αυτής μηδενίζεται το ρεύμα στο αμπερόμετρο. Κατασκευάζουμε τη γραφική (V_0 - f).

Από το σημείο που η ευθεία τέμνει τον άξονα των τάσεων υπολογίζουμε το έργο εξαγωγής

$V_0 = -\frac{\phi}{e} \rightarrow \phi = |V_0| \cdot e$. και στη συνέχεια και την συχνότητα κατωφλίου $f_0 = \frac{\phi}{h}$.

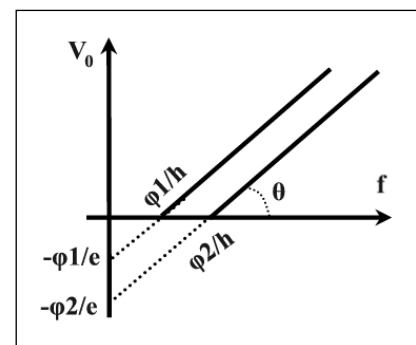


Από την κλίση βρίσκουμε τη σταθερά h : $e\phi\theta = \frac{\phi/e}{f/h} \rightarrow e\phi\theta = h/e \rightarrow h = e \cdot e\phi\theta$

- Για δύο διαφορετικά μέταλλα με διαφορετικά έργα εξαγωγής ϕ_1, ϕ_2 με $\phi_2 > \phi_1$ οι γραφικές παραστάσεις της τάσης αποκοπής V_0 σε σχέση με τη συχνότητα f θα έχουν την ίδια κλίση αφού η κλίση αφού αυτή είναι $e\phi\theta = h/e$ και είναι σταθερή. Ωστόσο οι συχνότητες κατωφλίου θα είναι διαφορετικές αφού

$f_{01} = \phi_1/h$ και $f_{0,2} = \phi_2/h$ οπότε με $\phi_2 > \phi_1$ θα είναι $f_{02} > f_{01}$

Αυτά φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα.



• Γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας συναρτήσει της συχνότητας f .

Η συνάρτηση της K ως προς τη συχνότητα f προκύπτει από την φωτοηλεκτρική εξίσωση άρα

$$K = h \cdot f - \phi.$$

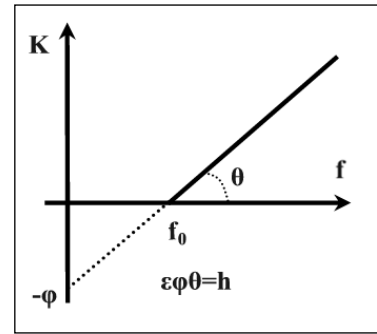
Για $f=f_0=\phi/h$ έχουμε $K=0$ και

για $f=0$ έχουμε $K=-\phi$

Η ευθεία ($K-f$) φαίνεται στο διπλανό σχήμα

Η κλίση της ευθείας είναι πάντα η ίδια αφού είναι η σταθερά του Planck. Ιδού:

$$\text{Η κλίση: } \epsilon\phi\theta = \frac{\phi}{f_0} = \frac{h \cdot f_0}{f_0} = h$$



Ερώτηση 2.1: Ποιες από τις ιδιότητες του φωτοηλεκτρικού φαινομένου **δεν** εξηγούνται με την κλασσική φυσική.

Απάντηση

1. Αν η συχνότητα του φωτός είναι κάτω από τη συχνότητα κατωφλίου f_0 δεν παρατηρείται ρεύμα συνεπώς δεν υπάρχει έξοδος φωτοηλεκτρονίων από το μέταλλο. Η τιμή της είναι $f_0=\phi/h$. Η κλασσική φυσική δεν βάζει τέτοιο περιορισμό, δηλαδή προβλέπει εκπομπή φωτοηλεκτρονίων για οποιαδήποτε συχνότητα του προσπίπτοντος φωτός εφόσον η έντασή του είναι αρκετή. Με την κβαντική θεωρία για να εξαχθεί ηλεκτρόνιο πρέπει το φωτόνιο να του μεταφέρει ενέργεια μεγαλύτερη ή ίση με το έργο εξαγωγής, $hf \geq \phi$. Άρα για κάθε μέταλλο υπάρχει μια χαρακτηριστική συχνότητα κατωφλίου κάτω από την οποία δεν εξέρχονται ηλεκτρόνια.

2. Η μέγιστη κινητική ενέργεια, K των φωτοηλεκτρονίων δεν εξαρτάται από την ένταση του προσπίπτοντος φωτός. Μεγαλύτερη ένταση φωτός σημαίνει περισσότερα εξερχόμενα ηλεκτρόνια αλλά η κινητική τους ενέργεια εξαρτάται από το έργο εξαγωγής ϕ και τη συχνότητα του προσπίπτοντος φωτός, σύμφωνα με τη σχέση $K=hf-\phi$. Και μάλιστα η K αυξάνεται καθώς αυξάνεται η συχνότητα f του φωτός. Αυτό είναι ανεξήγητο με την κλασσική θεωρία.

3. Ακόμα και αν η ένταση του φωτός είναι πολύ χαμηλή εκπέμπονται φωτοηλεκτρόνια σχεδόν αμέσως από την επιφάνεια (χρόνος $10^{-9}s$). Σύμφωνα με την κβαντική θεωρία αυτό είναι εφικτό διότι η ενέργεια του φωτός είναι συγκεντρωμένη σε μικρά ενεργειακά πακέτα (κβάντα) και κάθε ένα κβάντο μεταφέρει την ενέργεια και την ορμή του σε ένα ηλεκτρόνιο ώστε αυτό να μπορέσει να βγει από το μέταλλο.

S2. Λυμένα θέματα

S2.1 Σε ένα φωτοηλεκτρικό πείραμα με νάτριο βρέθηκε ότι η τάση αποκοπής είναι $V_1=1,85V$ για μήκος κύματος φωτός $\lambda_1=300nm$ και $V_2=0,82V$ για $\lambda_2=400nm$. Να υπολογιστούν

- A. Η σταθερά του Planck
 B. Το έργο εξαγωγής του νατρίου
 Γ. Η συχνότητα κατωφλίου.
 Δίνεται $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Λύση

A. Από την φωτοηλεκτρική εξίσωση Einstein για τις δυο συχνότητες με το ίδιο υλικό έχουμε :

$$K_1=hf_1-\phi \quad (1) \quad \text{και} \quad K_2=hf_2-\phi \quad (2)$$

Η κινητική ενέργεια συνδέεται με την τάση αποκοπής $K=eV$ (3) και $f=\frac{c}{\lambda}$. Άρα οι (1) και (2)

γίνονται :

$$eV_1=h\frac{c}{\lambda_1}-\phi \quad (3) \quad \text{και} \quad eV_2=h\frac{c}{\lambda_2}-\phi \quad (4)$$

$$\text{Από (3)(4)} \rightarrow (V_1-V_2) \cdot e = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \rightarrow h = 4,12 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot s$$

B. Από την εξίσωση: $K_1=hf_1-\phi \rightarrow \phi = h \cdot f_1 - eV_1 = h\frac{c}{\lambda_1} - eV_1 \rightarrow \phi = 2,27 \text{ eV}$

Γ. Η συχνότητα κατωφλίου αναφέρεται στην περίπτωση που τα ηλεκτρόνια εξέρχονται του μετάλλου με $K=0$. Τότε και πάλι από τη σχετική εξίσωση

$$K=hf-\phi \rightarrow hf_0=\phi \rightarrow f_0 = \frac{\phi}{h} \rightarrow f_0 = 0,55 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

S2.2 Φωτόνια με μήκος κύματος $\lambda=663 \text{ nm}$ προσκρούουν κάθετα σε μια απόλυτα ανακλαστική και ακλόνητη επιφάνεια κάνοντας κρούση μετωπικά και ελαστική. Δίνεται $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$. Για να ασκήσουν σ' αυτή δύναμη μέτρου $1N$ ποιος πρέπει ο αριθμός των ηλεκτρονίων ανά μονάδα χρόνου;

Λύση

Υπολογίζω την ορμή του φωτονίου:

$$E=m \cdot c^2 = m \cdot c \cdot c = p \cdot c \quad (1) \quad \text{Από (1)(2)} \rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

$$E=h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \quad (2)$$

Η κρούση του κάθε φωτοηλεκτρονίου με την ακλόνητη επιφάνεια είναι μετωπική και ελαστική συνεπώς το μέτρο μεταβολής της ορμής είναι $|\Delta p| = p - (-p) = 2p = 2\frac{h}{\lambda}$. Για N όμοια ηλεκτρόνια θα είναι

$$|\Delta p_N| = N \cdot 2\frac{h}{\lambda}$$

$$\text{Άρα η δύναμη είναι } |F| = \frac{|\Delta p_N|}{\Delta t} \rightarrow |F| = \frac{2N \cdot h}{\Delta t \cdot \lambda} \rightarrow \frac{N}{\Delta t} = \frac{|F| \lambda}{2h} \rightarrow \frac{N}{\Delta t} = 5 \cdot 10^{26} \text{ ηλ/s}$$

S2.3 Μια δέσμη φωτός μήκους κύματος $\lambda=124\text{nm}$ και ισχύος $P=2,5\text{W}$ προσπίπτει σε μεταλλική επιφάνεια. Παρατηρούμε ότι η κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων είναι $K=4,16\text{eV}$. Υποθέτουμε ότι κάθε φωτόνιο προκαλεί την έξοδο ενός ηλεκτρονίου από το μέταλλο. Να υπολογιστούν

A. Το έργο εξαγωγής σε eV

B. Ο αριθμός των φωτοηλεκτρονίων ανά sec.

Γ. Αν η ισχύς της δέσμης μειωθεί στο μισό χωρίς να αλλάξει το λ ποιος είναι ο νέος αριθμός φωτοηλεκτρονίων ανά sec;

Δ. Αν το μήκος κύματος μειωθεί στο μισό χωρίς να αλλάξει η ισχύς ποιος είναι ο νέος αριθμός φωτοηλεκτρονίων ανά sec;

Δίνονται $h = 6,63 \cdot 10^{-34}\text{Js}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $1\text{eV}=1,6 \cdot 10^{-19}\text{J}$

Λύση

A. Από την φωτοηλεκτρική εξίσωση:

$$K=h\frac{c}{\lambda}-\varphi \rightarrow \varphi=h\frac{c}{\lambda}-K \rightarrow \varphi=\frac{6,63 \cdot 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s} \cdot 3 \cdot 10^8\text{m/s}}{124 \cdot 10^{-9}\text{m}}-1,6 \cdot 10^{-19}\text{J/eV} - 4,16\text{eV} \rightarrow \varphi=10\text{eV}-4,16\text{eV} \rightarrow \varphi=5,84\text{eV}$$

B. Από την ισχύ: $P=\frac{E_N}{\Delta t}=\frac{N \cdot h \cdot f}{\Delta t} \rightarrow \frac{N}{\Delta t}=\frac{P}{h \cdot f} \rightarrow \frac{N}{\Delta t}=\frac{P \cdot \lambda}{h \cdot c} \rightarrow \frac{N}{\Delta t}=15,6 \cdot 10^{17}\text{ηλ/s}$

Γ. Αν η ισχύς της φωτεινής δέσμης μειωθεί στο μισό, δηλαδή αν γίνει μισή η ένταση του φωτός, τότε όπως φαίνεται από τη σχέση $\frac{N}{\Delta t}=\frac{P \cdot \lambda}{h \cdot c}$, ο αριθμός των φωτοηλεκτρονίων ανά μονάδα χρόνου θα μειωθεί στο μισό δηλαδή θα γίνει $7,8 \cdot 10^{17}\text{ηλ/s}$. Και φυσικά και η ένταση του ρεύματος στο αμπερόμετρο της συσκευής θα είναι η μισή.

Δ. Αν μειώσουμε στο μισό το μήκος κύματος λ του φωτός που πέφτει στην κάθοδο βλέπουμε και πάλι από τη σχέση $\frac{N}{\Delta t}=\frac{P \cdot \lambda}{h \cdot c}$ ότι τώρα ο ρυθμός των παραγομένων φωτοηλεκτρονίων υποδιπλασιάζεται δηλαδή γίνεται $7,8 \cdot 10^{17}\text{ηλ/s}$

S2.4 Μια πηγή φωτός φωτίζει ένα μέταλλο με φως μήκους κύματος λ και προκαλεί έξοδο φωτοηλεκτρονίων με μέγιστη κινητική ενέργεια 1eV . Μια δεύτερη πηγή φωτός φωτίζει το ίδιο μέταλλο με φως μήκους κύματος $\lambda/2$ και προκαλεί εκπομπή φωτοηλεκτρονίων αντίστοιχης ενέργειας 4eV . Πόσο είναι το έργο εξαγωγής του μετάλλου;

Λύση:

Γράφω την φωτοηλεκτρική εξίσωση για τις δύο πηγές φωτός:

$$K_1=hf_1-\varphi \rightarrow K_1=h\frac{c}{\lambda}-\varphi \rightarrow K_1+\varphi=h\frac{c}{\lambda} \quad (1)$$

$$K_2=hf_2-\varphi \rightarrow K_2=h\frac{c}{\lambda/2}-\varphi \rightarrow K_2+\varphi=2h\frac{c}{\lambda} \quad (2)$$

$$\text{Από (1)+(2)} \rightarrow K_2+\varphi=2(K_1+\varphi) \rightarrow K_2-2K_1=\varphi \rightarrow \varphi=K_2-2K_1 \rightarrow \varphi=2\text{eV}$$

S2.5 Μεταλλική επιφάνεια φωτοκυττάρου όταν φωτιστεί με φως μήκους κύματος $\lambda_1=660\text{nm}$ εκπέμπει ηλεκτρόνια για τα οποία η τάση αποκοπής είναι $V_1=0,2\text{V}$.

A. Να υπολογιστεί το έργο εξαγωγής του μετάλλου.

B. Αν φωτιστεί με φως μήκους κύματος $\lambda_2=300\text{nm}$ πόση θα γίνει η κινητική ενέργεια εξόδου των ηλεκτρονίων ;

Γ. Αν το μήκος κύματος της ακτινοβολίας είναι το $\lambda_1=660\text{nm}$ και η ισχύς της φωτεινής δέσμης είναι $P=0,03\text{W}$ και υποθέσουμε ότι κάθε φωτόνιο εξάγει και ένα ηλεκτρόνιο τότε να υπολογιστεί το μέγιστο ρεύμα στο σωλήνα.

Δίνονται $h = 6,6 \cdot 10^{-34}\text{Js}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $e=1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$, $1\text{eV}=1,6 \cdot 10^{-19}\text{J}$

Λύση:

A. Η τάση αποκοπής σχετίζεται με την κινητική ενέργεια εξόδου των ηλεκτρονίων: $K_1=eV_1$

Από την φωτ. Εξίσωση: $K_1=hf_1-\phi \rightarrow K_1 = h\frac{c}{\lambda_1} - \phi \rightarrow \phi = h\frac{c}{\lambda_1} - eV_1 \rightarrow$

$$\rightarrow \phi = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s} \cdot 3 \cdot 10^8\text{m/s}}{660 \cdot 10^{-9}\text{m}} - 1,6 \cdot 10^{-19}\text{J/eV} - 0,2\text{eV} = 1,875\text{eV} - 0,2\text{eV} \rightarrow \phi = \mathbf{1,675\text{eV}}$$

B. Ομοίως: $K_2=hf_2-\phi \rightarrow K_2 = h\frac{c}{\lambda_2} - \phi \rightarrow K_2 = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s} \cdot 3 \cdot 10^8\text{m/s}}{300 \cdot 10^{-9}\text{m}} - 1,675\text{eV} \rightarrow$

$$K_2 = 4,125\text{eV} - 1,675\text{eV} \rightarrow \mathbf{K_2=2,45\text{eV}}$$

Γ. Από τη φωτεινή ισχύ βρίσκω το ρυθμό των φωτονίων που είναι ίδιος με το ρυθμό των παραγομένων ηλεκτρονίων εφόσον υποθέτουμε ότι κάθε φωτόνιο παράγει και ένα φωτοηλεκτρόνιο:

$$P = \frac{E_N}{\Delta t} = \frac{N \cdot h \cdot f}{\Delta t} \rightarrow \frac{N}{\Delta t} = \frac{P}{h \cdot f} \rightarrow \frac{N}{\Delta t} = \frac{P \cdot \lambda}{h \cdot c}$$

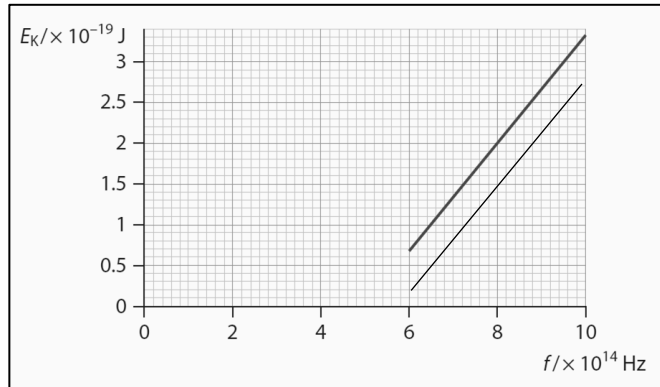
Η ένταση, i του ρεύματος είναι:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{N \cdot e}{\Delta t} = \frac{P \cdot \lambda \cdot e}{h \cdot c} = \frac{0,03\text{J/s} \cdot 660 \cdot 10^{-9}\text{m} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}}{6,6 \cdot 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s} \cdot 3 \cdot 10^8\text{m/s}} \rightarrow i = 16 \cdot 10^{-3}\text{A} \text{ ή } \mathbf{i=16\text{mA}}$$

*Να προσέξουμε ότι αν το h είναι σε $\text{eV}\cdot\text{s}$, δηλαδή, $h=4,14 \cdot 10^{-15}\text{eV}\cdot\text{s}$ αυτό βολεύει. Αν όμως είναι σε $\text{J}\cdot\text{s}$ τότε χρειάζεται μετατροπή δηλαδή:

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34}\text{Js} \text{ με } 1\text{eV}=1,6 \cdot 10^{-19}\text{J} \text{ οπότε: } h = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\text{Js}}{1,6 \cdot 10^{-19}\text{J/eV}} = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$$

S2.6 Το διπλανό διάγραμμα δείχνει πώς μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου με τη συχνότητα του φωτός που πέφτει σε μία φωτοευαίσθητη επιφάνεια (έντονη γραμμή).



A. Πόση είναι η συχνότητα κατωφλίου και πόσο το έργο εξαγωγής από την επιφάνεια αυτή;

B. Πόση είναι η κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου και πόση η τάση αποκοπής όταν η επιφάνεια φωτίζεται με φως μήκους κύματος $\lambda = \frac{3}{8} \cdot 10^{-6} \text{m}$;

Γ. Πόση είναι η κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου όταν η ίδια επιφάνεια φωτίζεται με φως μήκους κύματος $\lambda_1 = 0,15 \cdot 10^{-6} \text{m}$.

Δ. Μια δεύτερη φωτοευαίσθητη επιφάνεια έχει συχνότητα κατωφλίου $6 \cdot 10^{14} \text{Hz}$. Να συμπληρώσετε στο παραπάνω διάγραμμα την αντίστοιχη καμπύλη για τη δεύτερη επιφάνεια.

Δίνονται $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{Js}$, ή $4,14 \cdot 10^{-15} \text{eV}\cdot\text{s}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$, $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$, $1 \text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{J}$.

Λύση

A. Από το διάγραμμα αντλώ την ασφαλή πληροφορία ότι όταν η συχνότητα είναι $f = 6 \cdot 10^{14} \text{Hz}$ η κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων είναι $K = 2 \cdot 10^{-19} \text{J}$.

Αρα από την φωτοηλεκτρική εξίσωση:

$$K = h \cdot f - \phi \rightarrow \phi = h \cdot f - K \rightarrow \phi = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{Js} \cdot 8 \cdot 10^{14} \text{Hz} - 2 \cdot 10^{-19} \text{J} \rightarrow \phi = 3,3 \cdot 10^{-19} \text{J} \rightarrow \phi = \frac{3,3 \cdot 10^{-19} \text{J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{J/eV}} \rightarrow \phi = 2,065 \text{eV}$$

Η συχνότητα κατωφλίου προκύπτει από την ίδια εξίσωση για $K=0$. Άρα :

$$f_0 = \frac{\phi}{h} \rightarrow f_0 = \frac{2,065 \text{eV}}{4,14 \cdot 10^{-15} \text{eV}\cdot\text{s}} \rightarrow f_0 = 5 \cdot 10^{14} \text{Hz}$$

Η συχνότητα αυτή φαίνεται και από το διάγραμμα. Αν προεκτείνω την ευθεία τέμνει τον άξονα των f ακριβώς στο σημείο αυτό.

B. Από την εξίσωση: $f = \frac{c}{\lambda} = 8 \cdot 10^{14} \text{Hz}$

Από την φωτοηλεκτρική εξίσωση: $K = hf - \phi = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{eV}\cdot\text{s} \cdot 8 \cdot 10^{14} \text{Hz} - 2,065 \text{eV} \rightarrow K = 1,25 \text{eV}$

Για την τάση αποκοπής ισχύει: $K = eV \rightarrow V = 1,25 \text{V}$

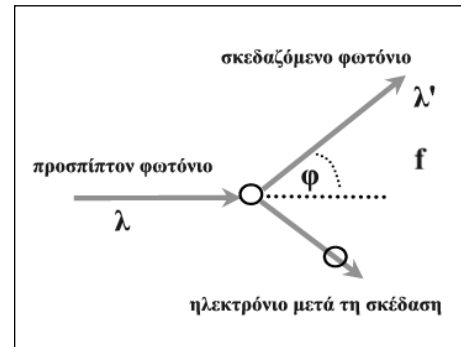
Γ. Στην περίπτωση αυτή η συχνότητα είναι $f = \frac{c}{\lambda_1} = 2 \cdot 10^{14} \text{Hz}$, δηλαδή μικρότερη από τη συχνότητα κατωφλίου και συνεπώς δεν παράγονται φωτοηλεκτρόνια, άρα $K=0$.

Δ. Η δεύτερη επιφάνεια με συχνότητα κατωφλίου f_0 θα έχει ευθεία παράλληλη στην αρχική αλλά θα τέμνει τον άξονα των συχνοτήτων στην τιμή $f_0' = 6 \cdot 10^{14} \text{Hz}$. Οι ευθείες είναι παράλληλες γιατί έχουν την ίδια κλίση που είναι στο διάγραμμα $(K-f)$ ίση με τη σταθερά του Planck, $\epsilon\theta = h$.

3. Φαινόμενο Compton

Το φαινόμενο **Compton** αναφέρεται στη σκέδαση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από φορτισμένα σωματίδια ύλης (συνήθως δέσμια ηλεκτρόνια).

Σύμφωνα με τη σκέδαση Compton, όταν ακτινοβολία μήκους κύματος λ προσπίπτει σε πρακτικά ακίνητο ηλεκτρόνιο τότε το τμήμα της ακτινοβολίας που σκεδάζει έχει μήκος κύματος λ' μεγαλύτερο από το μήκος κύματος λ της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Η μεταβολή του μήκους κύματος εξαρτάται μόνο από τη γωνία ϕ που σχηματίζουν οι δύο δέσμες και ισχύει ότι



$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m \cdot c} (1 - \cos \phi) \quad (3.1)$$

όπου m η μάζα του ηλεκτρονίου και c η ταχύτητα του φωτός, ϕ η γωνία που σχηματίζουν οι δύο δέσμες και h η σταθερά του Planck.

Κατά τη διάρκεια της σκέδασης διατηρούνται η ορμή και η ενέργεια του συστήματος.

Το φωτόνιο έχει πριν τη σκέδαση ενέργεια $E = hf = hc/\lambda$ και μετά τη σκέδαση $E' = hf' = hc/\lambda'$. Σύμφωνα με την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας ισχύει:

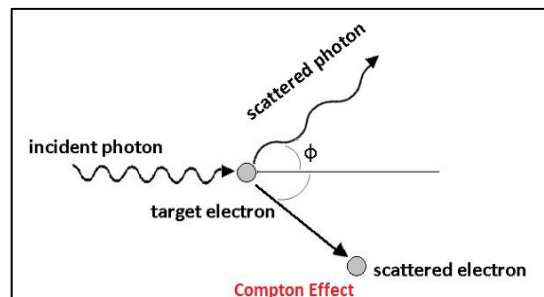
$$E = E' + K_e \rightarrow \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K_e \quad (3.2)$$

όπου K_e η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά την κρούση.

- Ο Arthur H. Compton (1924) χρησιμοποίησε ακτίνες X (φωτόνια υψηλής συχνότητας) που σκεδάζουν σε γραφίτη (άνθρακα). Για να είναι μετρήσιμη η μεταβολή του μήκους κύματος θα πρέπει το φωτόνιο να έχει σχετικά μεγάλη ορμή και ενέργεια για να μεταφέρει και μεγάλη ενέργεια και ορμή στο ηλεκτρόνιο. Η ορμή του φωτονίου είναι $p = h/\lambda$ και η ενέργεια $E = hc/\lambda$ συνεπώς ακτινοβολία όπως οι ακτίνες X με πολύ μεγάλη συχνότητα και πολύ μικρό λ της τάξης από 10^{-9}m έως 10^{-12}m είναι κατάλληλη.

• Η κβαντική ερμηνεία:

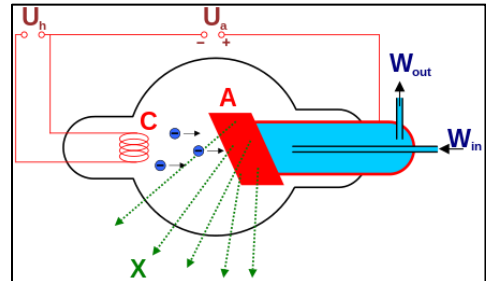
Ας δούμε την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ως ρεύμα φωτονίων, δηλαδή σωματίων με μηδενική μάζα ηρεμίας που μεταφέρουν ενέργεια και ορμή. Αφού το $\lambda' > \lambda$ συνεπάγεται ότι η συχνότητα της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας f' θα είναι μικρότερη από τη συχνότητα f της προσπίπτουσας, δηλ. $f' < f$. Αν ερμηνεύσουμε το φαινόμενο με τη βοήθεια της **κβαντικής θεωρίας**, τότε αυτό μετατρέπεται σε σύγκρουση ενός φωτονίου, ενέργειας E , συχνότητας f και μήκους κύματος λ με ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο. Μετά την ελαστική κρούση το σκεδαζόμενο φωτόνιο θα έχει ενέργεια $E' < E$, συχνότητα $f' < f$ και μήκος κύματος $\lambda' > \lambda$. Διότι ένα μέρος της ενέργειας του φωτονίου μεταβιβάστηκε στο ηλεκτρόνιο.



- **Γιατί η κλασσική θεωρία δεν μπορεί να εξηγήσει το φαινόμενο Compton;** Σύμφωνα με την κλασσική θεωρία ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα συχνότητας f που προσπίπτει σ' ένα υλικό αναγκάζει

τα ηλεκτρόνια του υλικού να ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα και να παράγουν με τη σειρά τους ηλεκτρομαγνητικό κύμα της ίδιας συχνότητας f . Η κλασική θεωρία, λοιπόν, θα περίμενε η σκεδαζόμενη δέσμη να έχει **την ίδια** συχνότητα και, αντίστοιχα, ίδιο μήκος κύματος με την προσπίπτουσα δέσμη. Ακόμα η συχνότητα της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας θα έπρεπε να εξαρτάται από την ένταση της προσπίπτουσας, αλλά και από το χρόνο έκθεσης του υλικού στην ακτινοβολία, πράγματα που **δεν** επιβεβαιώθηκαν πειραματικά..

●**Δυο λόγια για τις ακτίνες X:** Ο πιο συνηθισμένος τρόπος παραγωγής ακτίνων X είναι μέσω της επιτάχυνσης ηλεκτρονίων από διαφορά δυναμικού δεκάδων χιλιάδων volt και πρόσπτωσή τους σε μεταλλικό στόχο μεγάλου ατομικού αριθμού, όπως βολφράμιο ή μολυβδένιο.. Τα ηλεκτρόνια προσπίπτοντας στο στόχο χάνουν σταδιακά την ενέργειά τους, επειδή επιβραδύνονται από τα άτομα του στόχου. Λόγω αυτής της επιβράδυνσης εκπέμπουν ένα συνεχές φάσμα ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (ακτινοβολία πέδησης). Ταυτόχρονα παράγεται και ένα γραμμικό φάσμα ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, λόγω της κρούσης των ηλεκτρονίων με τα άτομα. Λόγω αυτής διεγείρονται τα ηλεκτρόνια των εσωτερικών στιβάδων των ατόμων και κατά την αποδιέγερση εκπέμπουν το γραμμικό φάσμα. Τα μήκη κύματος των ακτίνων X κυμαίνονται από 10^{-8}m έως 10^{-11}m περίπου.



S3. Λυμένα Θέματα

S3.1 Ακτίνα Χ με μήκος κύματος $\lambda=3h/2mc$ σκεδάζει σε ακίνητο ηλεκτρόνιο με αποτέλεσμα η γωνία σκέδασης να είναι $\varphi=90^\circ$. Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά τη σκέδαση.

Λύση:

Πρώτα υπολογίζουμε το νέο μήκος κύματος, λ' της σκεδαζόμενης ακτίνας για $\sin 90^\circ=1$.

$$\Delta\lambda=\frac{h}{m\cdot c}(1-\sin\varphi)\rightarrow \Delta\lambda=\frac{h}{m\cdot c}(1)\rightarrow \lambda'-\lambda=\frac{h}{m\cdot c}\rightarrow \lambda'=\frac{h}{m\cdot c}+\frac{3h}{2m\cdot c}\rightarrow \lambda'=\frac{5h}{2m\cdot c}$$

Από τη διατήρηση ενέργειας κατά τη σκέδαση του φωτονίου:

$$K=E-E'=\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda'}=\frac{hc}{3h/2mc}-\frac{hc}{5h/2mc}=\frac{2mc^2}{3}-\frac{2mc^2}{5}\rightarrow K=\frac{4mc^2}{15}$$

S3.2 Φωτόνιο με συχνότητα f σκεδάζει σε ακίνητο ηλεκτρόνιο μάζας m . Να αποδείξετε ότι η μέγιστη δυνατή κινητική ενέργεια του ανακρουσμένου ηλεκτρονίου είναι $K_{\max}=\frac{2h^2\cdot f^2}{mc^2+2hf}$

Λύση

Από την ΑΔΕ κατά τη σκέδαση, η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι

$$K=E-E'=h\cdot f-h\cdot f'=\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda'} \quad (1)$$

Άρα για την μέγιστη κινητική ενέργεια πρέπει να βρούμε την μέγιστη δυνατή τιμή του λ' μετά τη σκέδαση, άρα και τη μέγιστη δυνατή αύξηση $\Delta\lambda$. Αυτή προκύπτει για σκέδαση $\varphi=180^\circ$ όπου το $\sin\varphi=-1$.

$$\Delta\lambda=\frac{h}{m\cdot c}(1-\sin\varphi)\rightarrow \Delta\lambda_{\max}=\frac{h}{m\cdot c}[1-(-1)]\rightarrow \Delta\lambda_{\max}=\frac{2h}{m\cdot c}$$

$$\text{Άρα } \lambda'=\lambda+\Delta\lambda\rightarrow \lambda'=\lambda+\frac{2h}{m\cdot c}\rightarrow \lambda'=\frac{c}{f}+\frac{2h}{m\cdot c}\rightarrow \lambda'=\frac{mc^2+2h\cdot f}{f\cdot m\cdot c} \quad (2)$$

$$\text{Από (1)(2)}\rightarrow K_{\max}=hf-\frac{hc}{\frac{mc^2+2h\cdot f}{f\cdot m\cdot c}}\rightarrow \dots\rightarrow K_{\max}=\frac{2h^2\cdot f^2}{mc^2+2hf}$$

S3.3 Ακτίνες Χ με μήκος κύματος $\lambda=10\text{pm}$ σκεδάζονται σε ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο..

Α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας αν η σκέδαση είναι κατά $\varphi=45^\circ$.

Β. Να υπολογίσετε το μέγιστο μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας.

Γ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου

Δίνονται: $\sin 45^\circ=0,7$ και $h/mc=2,4\cdot 10^{-12}\text{m}$.

$h=6,63\times 10^{-34}\text{Js}$, $c=3\times 10^8\text{m/s}$, $m_e=9\times 10^{-31}\text{kg}$, $1\text{eV}=1,6\times 10^{-19}\text{J}$, $1\text{pm}=10^{-12}\text{m}$.

Λύση:

A. Από την εξίσωση: $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m \cdot c}(1 - \cos\phi) \rightarrow \lambda' = \lambda + \frac{h}{m \cdot c}(1 - 0,7) \rightarrow \lambda' = \lambda + 0,3 \frac{h}{m \cdot c} \rightarrow$
 $\lambda' = 10 \cdot 10^{-12} + 0,3 \cdot 2,4 \cdot 10^{-12} \rightarrow \lambda' = 10,72 \cdot 10^{-12} \text{m} \rightarrow \lambda' = \mathbf{10,72 \text{ pm}}$

B. Το μέγιστο μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας προκύπτει για τη μέγιστη μεταβολή

$\Delta\lambda$ η οποία από τη σχέση $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m \cdot c}(1 - \cos\phi)$ προκύπτει για $\phi = 180^\circ$ οπότε $\cos 180^\circ = -1$ και

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m \cdot c} = 4,8 \cdot 10^{-12} \text{m}.$$

Άρα $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda \rightarrow \lambda' = 10 \cdot 10^{-12} + 4,8 \cdot 10^{-12} \text{m} \rightarrow \lambda'_{\max} = \mathbf{14,8 \text{ pm}}$

Γ. Η μέγιστη κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου προκύπτει από την διατήρηση ενέργειας κατά τη σκέδαση. Από την επόμενη σχέση φαίνεται ότι η $K_e = \max$ όταν είναι και το λ' μέγιστο δηλαδή όταν η γωνία $\phi = 180^\circ$.

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K_e \rightarrow K_e = hc \cdot \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \rightarrow K_{e\max} = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'_{\max}} \right) \rightarrow \mathbf{K_{e.\max} \approx 40,2 \text{ keV}}$$

4. Η κυματική φύση της ύλης

Ο **κυματοσωματιδιακός δυϊσμός** είναι το κυριότερο χαρακτηριστικό της κβαντικής θεωρίας και μία ειδοποιός διαφορά της σε σχέση με την κλασική θεώρηση της φύσης. Συνίσταται στο γεγονός ότι οι θεμελιώδεις οντότητες της φύσης παρουσιάζουν **και** κυματική **και** σωματιδιακή συμπεριφορά. Όλα τα φυσικά σωματίδια έχουν και κυματική συμπεριφορά παράλληλα με την σωματιδιακή, όχι ταυτόχρονα. Η ενέργεια και η ορμή όπως ήδη έχουμε δει συνδέονται με κυματικά μεγέθη όπως τη συχνότητα και το μήκος κύματος.

$$E=h \cdot f \rightarrow f=\frac{E}{h} \quad (4.1)$$

$$\text{και} \quad p=\frac{h}{\lambda} \rightarrow \lambda=\frac{h}{p} \quad (4.2)$$

Όπου η ορμή $p=m \cdot v$ για σωματίδια των οποίων οι ταχύτητες είναι πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός. Οι εξισώσεις (4.1), (4.2) είναι δηλαδή οι ίδιες με εκείνες που ισχύουν για το φως. Τα σωματίδια (ηλεκτρόνιο, πρωτόνιο, νετρόνιο κ.α.) στην κλασική Φυσική θεωρούνται ως "τμήματα ύλης", παρόμοια με τα μακροσκοπικά αντικείμενα. Το κύριο χαρακτηριστικό τους είναι ότι είναι **εντοπισμένα** στο χώρο, δηλαδή μπορούμε με κάποια ακρίβεια να περιγράψουμε τις συντεταγμένες τους με 3 αριθμούς (στον τρισδιάστατο χώρο). Από την άλλη μεριά, το κύμα είναι μία διαταραχή ενός ελαστικού μέσου, ή ενός πεδίου, που διαδίδεται με κάποια ταχύτητα. Το πεδίο "απλώνεται" στο χώρο και για να το περιγράψουμε απαιτείται ένα ορισμένο πλήθος αριθμών (*βαθμοί ελευθερίας*) για **κάθε** σημείο του χώρου. Οι δύο εικόνες, αν κριθούν με βάση τις αισθήσεις μας, είναι τελείως ασύμβατες: το κύμα και το κομμάτι ύλης που λέμε σωματίδιο φαίνονται διαφορετικά πράγματα.

Στα 1924, ο Γάλλος **Louis de Broglie** (Λουί ντε Μπρολί) πιστεύοντας στη **συμμετρία της φύσης** έθεσε το αξίωμα ότι οποιοδήποτε σωματίο ορμής p είναι συνδεδεμένο με ένα κύμα μήκους κύματος λ που δίνεται από τη σχέση $\lambda=h/p$. Η υπόθεση de Broglie δεν άργησε να επαληθευθεί. Το 1927, στην Αμερική, οι Davisson και Germer διαπίστωσαν ότι μία δέσμη ηλεκτρονίων που κινούνται με μεγάλη ταχύτητα περιθλάται με τρόπο ανάλογο με αυτόν που περιθλάται μια δέσμη ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, μια δέσμη ακτίνων X για παράδειγμα. Σύντομα, νέα πειράματα έδειξαν ότι κυματική συμπεριφορά παρουσιάζουν και δέσμες σωματιδίων α και δέσμες νετρονίων. Τα αποτελέσματα ήταν τέτοια που δεν άφηναν κανένα περιθώριο να αμφισβητηθεί ότι τα σωματίδια έχουν και κυματική φύση. Τα σωματίδια έχουν και κυματικές ιδιότητες παρουσιάζουν κυματική συμπεριφορά, για παράδειγμα συμβολή και περίθλαση). Έχουν όμως και σωματιδιακές, συμπεριφέρονται σαν ρεύμα σωματιδίων, ιδίως κατά την εκπομπή και την απορρόφησή τους. Σε κάποια φαινόμενα εκδηλώνεται η κυματική φύση ενός σωματιδίου, όπως στη διάδοση του φωτός ενώ σε κάποια άλλα εκδηλώνεται η σωματιδιακή του φύση όπως στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Η διαφορά με την κλασική θεώρηση του κύματος, στην περίπτωση που ένα σωματίδιο εκδηλώνει την κυματική του φύση, είναι ότι δεν πρόκειται για υλικό κύμα (όπως ο ήχος) αλλά για κύμα πιθανότητας. Οι δύο φύσεις αυτές είναι συμπληρωματικές. **Η μία δεν αναιρεί την άλλη.** Το ποια συμπεριφορά θα επικρατήσει εξαρτάται από το πόσο καλά συγκρίνεται το μήκος κύματος De Broglie με τις διαστάσεις του σωματιδίου που μελετάμε αλλά και εκείνου με το οποίο αυτό αλληλεπιδρά. (βλέπε ερωτήσεις 4.1, 4.2)

Σύμφωνα με τον φυσικό **Max Born** (1926) μπορούμε να πούμε ότι οι δύο περιγραφές, η σωματιδιακή και η κυματική μπορούν να θεωρηθούν ως δύο συμπληρωματικοί τρόποι θεώρησης της ίδιας αντικειμενικής διεργασίας, μιας διεργασίας που μόνο σε οριακές περιπτώσεις επιτρέπει πλήρη εικονιστική ερμηνεία.

Ερώτηση 4.1: Πόσο είναι το μήκος κύματος για ένα φωτόνιο ενέργειας 20 keV.

Δίνονται $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ Js}$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, $1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$,

Απάντηση

$$E = h \cdot f \rightarrow E = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{E} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{20 \cdot 10^3 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} \rightarrow \lambda = 6,22 \cdot 10^{-11} \text{ m} \rightarrow \lambda = 62,2 \text{ pm}$$

Το μήκος κύματος είναι μικρό αλλά υπαρκτό στη φύση μιας και βρίσκεται στην περιοχή των ακτίνων Χ. Συνεπώς μπορούμε να βρούμε κυματικές ιδιότητες στη συμπεριφορά του.

Ερώτηση 4.2: Γιατί δεν μπορούμε να ανιχνεύσουμε το μήκος κύματος μίας μπάλας του μπάσκετ, μάζας 1 kg, που κινείται με ταχύτητα 3m/s;

Η μπάλα έχει ορμή $p = m \cdot v = 3 \text{ kgm/s}$. Άρα το μήκος κύματος θα είναι:

$$\lambda = \frac{h}{p} \rightarrow \lambda = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{3 \text{ kgm/s}} = 2,21 \cdot 10^{-34} \text{ m}$$

Ένα τόσο μικρό μήκος κύματος δεν ανιχνεύεται, δεν «υπάρχει». Η υπόθεση του de Broglie για την κυματική φύση της ύλης έχει ουσιαστικά εφαρμογή μόνο για σωματίδια ατομικής και υποατομικής κλίμακας. Συνεπώς στη μπάλα δεν μπορούμε να βρούμε κυματικές ιδιότητες στη συμπεριφορά της.

Ερώτηση 4.3: Πως αποδεικνύεται η σχέση $\lambda = \frac{h}{p}$ για ένα φωτόνιο;

Υπάρχει στη θεωρία της σχετικότητας μια σχέση που συνδέει την ενέργεια, E με τη σχετικιστική ορμή ενός σωματιδίου (είναι εκτός ύλης)

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$$

Το φωτόνιο δεν έχει μάζα ηρεμίας ($m_0 = 0$) συνεπώς η σχέση παίρνει τη μορφή:
Αλλά σύμφωνα με την κβαντική θεωρία η ενέργεια ενός φωτονίου είναι:

$$E = p \cdot c \quad (\text{i})$$

$$E = h \cdot f \quad (\text{ii})$$

$$\text{Από (i)(ii)} \rightarrow p \cdot c = h \cdot f \rightarrow p \cdot c = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$$

S4. Λυμένα θέματα

S4.1 Α. Πόσο είναι το μήκος κύματος για ένα ηλεκτρόνιο ενέργειας $K=1\text{eV}$ και ένα άλλο ενέργειας $K=10^3\text{eV}$;

Δίνονται $h = 6,63 \times 10^{-34}\text{Js}$, $m=9,1 \cdot 10^{-31}\text{kg}$, $1\text{eV}=1,6 \times 10^{-19}\text{J}$,

Β. Γιατί ένα ηλεκτρονικό μικροσκόπιο που λειτουργεί με ηλεκτρόνια ενέργειας 1keV θα έχει μεγαλύτερη διακριτική ικανότητα από ένα κλασσικό οπτικό μικροσκόπιο;

Απάντηση:

Η ορμή είναι

$$p = \frac{h}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h}{p} \quad (\text{i})$$

Υπολογίζω την ορμή από την κινητική ενέργεια σύμφωνα με τη σχέση:

$$K = \frac{p^2}{2m} \rightarrow p = \sqrt{2Km} \quad (\text{ii})$$

$$\text{Από (i)(ii)} \rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2Km}} \quad (\text{iii})$$

$$\text{Για ηλεκτρόνιο } 1\text{eV: το } \mu, \kappa \text{ είναι } \lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{2 \cdot 1\text{eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\text{J/eV} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}\text{kg}}} \rightarrow \lambda = 1,22 \cdot 10^{-9}\text{m}$$

$$\text{Για ηλεκτρόνιο } 10^3\text{eV είναι: } \lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{2 \cdot 10^3\text{eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\text{J/eV} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}\text{kg}}} \rightarrow \lambda = 3,92 \cdot 10^{-11}\text{m}$$

β) Το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο σάρωσης είναι ένα όργανο που λειτουργεί όπως περίπου και ένα οπτικό μικροσκόπιο μόνο που χρησιμοποιεί δέσμη ηλεκτρονίων υψηλής ενέργειας αντί για φως, για να εξετάσει αντικείμενα σε λεπτομερή κλίμακα. Τα ηλεκτρόνια λόγω της κυματικής τους φύσης μπορούν να εστιαστούν όπως και τα φωτεινά κύματα αλλά σε πολύ μικρότερη επιφάνεια (π.χ. κόκκος υλικού). Διότι έχουν πολύ μικρό μήκος κύματος, όπως είδαμε της τάξης του 10^{-11}m δηλαδή δέκα χιλιάδες φορές μικρότερα από τα μήκη κύματος του ορατού φωτός (10^{-7}m). Η δέσμη ηλεκτρονίων σαρώνει την επιφάνεια του δείγματος με το οποίον αλληλεπιδρά. Από την αλληλεπίδραση αυτή προκύπτουν πληροφορίες σε σχέση με τα άτομα των στοιχείων που απαρτίζουν το εξεταζόμενο υλικό.

S4.2 Σε πόση διαφορά δυναμικού πρέπει να επιταχυνθεί μια δέσμη ηλεκτρονίων ώστε να αποκτήσει μήκος κύματος de Broglie, $\lambda=1\text{nm}=10^{-9}\text{m}$.

Δίνονται $h = 6,63 \times 10^{-34}\text{Js}$, $m_e = 9,1 \times 10^{-31}\text{kg}$, $1\text{e}=1,6 \times 10^{-19}\text{C}$,

Η δέσμη ηλεκτρονίων που επιταχύνεται σε διαφορά δυναμικού V . Εφαρμόζω ΘΜΚΕ και έχω

$$W = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \rightarrow |e| \cdot V = K \quad (\text{i})$$

Η ορμή είναι $p=h/\lambda$. Άρα η κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{p^2}{2m} \rightarrow K = \frac{(h/\lambda)^2}{2m} \rightarrow K = \frac{h^2}{2 \cdot \lambda^2 m} \quad (\text{ii})$$

$$\text{Από (i)(ii)} \rightarrow |e| \cdot V = \frac{h^2}{2 \cdot \lambda^2 m} \rightarrow V = \frac{h^2}{2 \cdot \lambda^2 m |e|} \rightarrow V = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34}\text{Js})^2}{2 \cdot (10^{-9})^2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}\text{kg} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}} \rightarrow V = 1,5\text{V}$$

5. Η αρχή της αβεβαιότητας

Είδαμε ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα συμπεριφέρονται άλλοτε σαν κύματα και άλλοτε σαν δέσμες σωματίων. Επίσης δέσμες κλασικών σωματιδίων, όπως τα ηλεκτρόνια, έχουν και κυματική συμπεριφορά. Μπορούμε να πούμε ότι η ύλη, με την ευρύτερη έννοια (συμπεριλαμβάνοντας και την ενέργεια), έχει διπλή οντότητα -σωματιδιακή και κυματική. Πρόκειται για ένα συμπέρασμα πολύ καλά θεμελιωμένο πειραματικά.

Κάτω από μια τέτοια θεώρηση προκύπτει ένα σημαντικό πρόβλημα. Ένα σωματίδιο, όπως το αντιλαμβάνονται οι κλασικοί φυσικοί, είναι κάτι του οποίου η θέση στο χώρο ήταν αυστηρά προσδιορισμένη. Αντίθετα, ένα κύμα εκτείνεται στο χώρο. Ένα σωματίδιο με κυματική συμπεριφορά πού βρίσκεται; Η απάντηση της κβαντικής θεωρίας, όσο κι αν μας σοκάρει, είναι: **"δεν μπορούμε να γνωρίζουμε πού ακριβώς βρίσκεται."**

Μια θεμελιώδης αρχή που απορρέει από τον κυματικό χαρακτήρα των σωματιδίων είναι η **"Αρχή της αβεβαιότητας (ή απροσδιοριστίας)" του Heisenberg (1927)**. Σύμφωνα με την αρχή αυτή είναι **αδύνατον να μετρήσουμε ταυτόχρονα τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου με απόλυτη ακρίβεια**. Συγκεκριμένα,

"Το γινόμενο των αβεβαιότητων θέσης και ορμής είναι μεγαλύτερο από $h/2\pi$ ", δηλαδή

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} \quad (5.1)$$

Τα σύμβολα Δx και Δp_x δε σημαίνουν τη μεταβολή των μεγεθών αλλά το εύρος της αβεβαιότητας με την οποία γνωρίζουμε τα μεγέθη. Η ίδια σχέση ισχύει και στις άλλες διευθύνσεις, δηλαδή

$$\Delta p_y \cdot \Delta y \geq \frac{h}{2\pi} \quad \text{και} \quad \Delta p_z \cdot \Delta z \geq \frac{h}{2\pi}$$

Με άλλα λόγια, όσο πιο αυστηρά καθορισμένη είναι η θέση ενός σωματιδίου, τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα στην ορμή του. Η αδυναμία μας να προσδιορίσουμε επακριβώς ταυτόχρονα τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου δεν οφείλεται σε πειραματικές ατέλειες. Είναι σύμφυτη με την ίδια την κβαντική δομή της ύλης. Μία άλλη διατύπωση της αρχής της αβεβαιότητας του Heisenberg είναι η

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi} \quad (5.2)$$

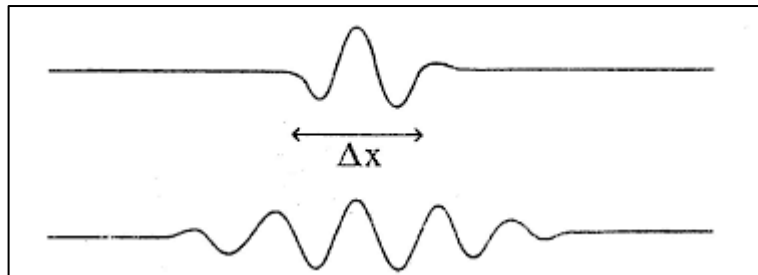
Η αβεβαιότητα στη μέτρηση της ενέργειας μιας κατάστασης ενός συστήματος είναι αντίστροφα ανάλογη με τον χρόνο που το σύστημα παραμένει σ' αυτή την κατάσταση.

Δηλαδή όλες οι μετρήσεις ενέργειας περιέχουν μια αβεβαιότητα, εκτός αν διαθέτουμε για τη μέτρηση άπειρο χρόνο.

Το κυματοπακέτο: Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που έχει κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή ορμή p παράλληλη στον άξονα των x . Σύμφωνα με την υπόθεση de Broglie και τη σχέση $\lambda = h/p$, εάν γνωρίζουμε επακριβώς την ορμή του σωματιδίου αυτό θα συνδέεται και με ένα κύμα με επακριβώς ορισμένο μήκος κύματος λ . Η εξίσωση που περιγράφει το στιγμιότυπο ενός τέτοιου κύματος στο χώρο είναι $\psi = A \sin(2\pi/T - 2\pi x/\lambda)$ και η γραφική της παράσταση είναι αυτή του σχήματος που ακολουθεί. Το στιγμιότυπο εκτείνεται από το $-\infty$ στο $+\infty$. Πού βρίσκεται το σωματίδιο που είναι συνδεδεμένο με αυτό το κύμα; Μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε.

Για να μη καταστρέψουμε εντελώς τη σωματιδιακή εικόνα χρειαζόμαστε κύματα περιορισμένα στο χώρο. Τα κύματα αυτά θα τα ονομάζουμε **κυματοπακέτα**.

Μπορούμε να φτιάξουμε και να περιγράψουμε με μαθηματικά οποιαδήποτε κυματομορφή με τη μέθοδο της υπέρθεσης συνδυάζοντας κατάλληλα διάφορα κύματα με επιλεγμένα μήκη κύματος πλάτη και φάσεις. Υπάρχει όμως κάποιος περιορισμός. Όσο πιο εντοπισμένο στο χώρο (πιο σωματιδιακό) θέλουμε να είναι το κυματοπακέτο τόσο περισσότερα και πιο διασκορπισμένα μήκη κύματος πρέπει να χρησιμοποιήσουμε. Πληρώνουμε δηλαδή τον εντοπισμό της θέσης του σωματιδίου-κύματος με απροσδιοριστία στο μήκος κύματος που του αντιστοιχίζουμε και - κατ' επέκταση - στην ορμή του ($p = h/\lambda$). Δηλαδή. Στο στενό πακέτο De Broglie, που βλέπουμε στην 1^η εικόνα, η θέση του σωματιδίου μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια αντίθετα από το μήκος κύματος και την ορμή του.



Στη 2^η εικόνα που έχουμε ένα ευρύ πακέτο κυμάτων, προσδιορίζεται με ακρίβεια το μήκος κύματος άρα και η ορμή αλλά όχι η θέση του σωματιδίου. Το εύρος του πακέτου είναι πολύ μεγάλο για να προσδιορίσουμε σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή τη θέση του.

Ερώτηση 5.1 Πως η αρχή της απροσδιοριστίας ερμηνεύει το εύρος των φασματικών γραμμών:

Σε ένα διεγερμένο άτομο ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια βρίσκονται σε κατάσταση μεγαλύτερης ενέργειας από τη θεμελιώδη. Όταν ένα τέτοιο ηλεκτρόνιο μεταπηδήσει στη θεμελιώδη του κατάσταση, εκπέμπει ένα φωτόνιο ενέργειας hf , ίσης με τη διαφορά ενέργειας των δύο καταστάσεων στις οποίες βρέθηκε. Σε κάθε τέτοιο "κβαντικό άλμα" εκπέμπεται ένα φωτόνιο. Η μελέτη των φασμάτων εκπομπής δείχνει ότι οι φασματικές γραμμές δεν είναι αυστηρά καθορισμένες αλλά η κάθε μια εμφανίζει ένα **φυσικό εύρος**. Το εύρος των φασματικών γραμμών μπορεί να εξηγηθεί με την **αρχή της αβεβαιότητας**.

Το διεγερμένο άτομο μπορεί να εκπέμψει ένα φωτόνιο οποιαδήποτε στιγμή στο χρονικό διάστημα από μηδέν μέχρι άπειρο. Ο μέσος χρόνος στον οποίο ένας μεγάλος αριθμός διεγερμένων ατόμων εκπέμπει ακτινοβολία είναι της τάξης του 10^{-8} s.

Από τη σχέση $\Delta E \cdot \Delta t \geq h/2\pi$ και επειδή $\Delta E = h\Delta f$ προκύπτει $h \Delta f \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$ και $\Delta f \geq \frac{1}{2\pi \cdot \Delta t}$

θέτοντας όπου $\Delta t = 10^{-8}$ s έχουμε $\Delta f \geq 1,6 \times 10^7$ Hz, όπου $1,6 \times 10^7$ Hz είναι το ελάχιστο εύρος της φασματικής γραμμής.

Ερώτηση 5.2 Τι είναι η κυματοσυνάρτηση;

Είδαμε ότι ένα υποατομικό σωματίδιο, για παράδειγμα ένα ηλεκτρόνιο, δε μπορεί να περιγραφεί σαν υλικό σημείο, με τρεις συντεταγμένες στο χώρο. Υπό ορισμένες συνθήκες συμπεριφέρεται σαν κύμα. Για την περιγραφή του χρειαζόμαστε μία **κυματοσυνάρτηση** σε αναλογία με την εξίσωση κύματος που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή ενός μηχανικού ή ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Την κυματοσυνάρτηση αυτή θα τη συμβολίζουμε με Ψ .

Η κυματοσυνάρτηση είναι μία συνάρτηση της θέσης και του χρόνου $\Psi = \Psi(x,y,z,t)$.

Στα μηχανικά κύματα η εξίσωση κύματος μάς δίνει για κάθε χρονική στιγμή τη θέση κάθε σημείου του υλικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα. Στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα οι εξισώσεις κύματος που τα περιγράφουν μας δίνουν για κάθε χρονική στιγμή την τιμή της έντασης του

ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου στον οποίο διαδίδεται το κύμα. Η κυματοσυνάρτηση Ψ όμως που περιγράφει ένα σωματίδιο-κύμα δεν σχετίζεται με κάποιο μέσον διάδοσης ούτε με κάποιες ιδιότητες του χώρου. Είναι δύσκολο να της αποδώσουμε κάποια φυσική σημασία. Μπορούμε μόνο να περιγράψουμε πώς σχετίζεται με τα φυσικά παρατηρούμενα φαινόμενα.

Για κάποιο συγκεκριμένο σημείο, ορισμένη χρονική στιγμή η κυματοσυνάρτηση θα έχει μια συγκεκριμένη τιμή. Ο Max Born (1926) πρότεινε να ερμηνεύσουμε το τετράγωνο του μέτρου της κυματοσυνάρτησης σαν την πιθανότητα θέσης ανά μονάδα όγκου. Δηλαδή, αν ορίσουμε έναν στοιχειώδη όγκο dV γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο (x,y,z) **το γινόμενο $|\Psi|^2 dV$ δίνει την πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο μέσα στον όγκο dV στη δεδομένη χρονική στιγμή.**

Αν χωρίσουμε το σύνολο του χώρου σε στοιχειώδεις όγκους dV και σε κάθε σημείο του χώρου βρούμε την τιμή της Ψ για κάποια χρονική στιγμή το άθροισμα των $|\Psi|^2 dV$ πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα.

$$\Sigma |\Psi|^2 \cdot dV = 1$$

Δηλαδή η πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο κάπου στο χώρο είναι ίση με τη μονάδα. Με απλά λόγια κάθε χρονική στιγμή το σωματίδιο σίγουρα βρίσκεται κάπου. Η παραπάνω σχέση προκύπτει από την διάσταση που έδωσε ο Born στο $|\Psi|^2$ και ονομάζεται **συνθήκη κανονικοποίησης**. Εάν η κυματοσυνάρτηση είναι σωστή πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη κανονικοποίησης.

Αυτό που θεωρούμε ως κύμα δεν είναι το ίδιο το σωματίδιο αλλά η πιθανότητα να το βρούμε στη μια ή την άλλη περιοχή του χώρου.

S5. Λυμένα θέματα

S5.1 Ένα σωματίδιο κινείται σε ευθεία, $x\hat{x}$ με ταχύτητα πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός. Αν η αβεβαιότητα Δx της θέσης του είναι ίση με το μήκος κύματος που έχει κατά de Broglie, τότε δείξτε ότι η αβεβαιότητα της ταχύτητας του είναι $\Delta u_x \geq \frac{u_x}{2\pi}$

Λύση:

Με δεδομένο ότι η ορμή είναι $p_x = m \cdot u_x$ και $p_x = \frac{h}{\lambda}$

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} \rightarrow \Delta p_x \cdot \lambda \geq \frac{h}{2\pi} \rightarrow \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi \lambda} \rightarrow \Delta p_x \geq \frac{p_x}{2\pi} \rightarrow m \Delta u_x \geq \frac{m u_x}{2\pi} \rightarrow \Delta u_x \geq \frac{u_x}{2\pi}$$

S5.2 Ένα ηλεκτρόνιο κινείται με ταχύτητα $u = 5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ μετρημένη με περιθώριο σφάλματος 0,003%. Με ποια ακρίβεια μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση του; Θα μπορέσει το ηλεκτρόνιο να περάσει σίγουρα από μια οπή που έχει διάμετρο διπλάσια από την ακτίνα του, δηλαδή $2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$;

Λύση:

Η ορμή του ηλεκτρονίου είναι $p = m \cdot u = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 4,55 \cdot 10^{-27} \text{ kgm/s}$

Η αβεβαιότητα στην ορμή είναι $\Delta p = 0,003\% p = 3 \cdot 10^{-5} \cdot 4,55 \cdot 10^{-27} \text{ kgm/s} = 13,65 \cdot 10^{-32} \text{ kgm/s}$

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} \rightarrow \Delta x \geq \frac{h}{2\pi \Delta p} \rightarrow \Delta x \geq 0,78 \cdot 10^{-3} = 0,78 \text{ mm}$$

Παρατηρούμε ότι η αβεβαιότητα θέσης είναι της τάξης του δεκάκις χιλιοστού. Με δεδομένο ότι η ακτίνα του ηλεκτρονίου είναι της τάξης του 10^{-15} m , και η οπή $2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, η αβεβαιότητα της θέσης είναι τεράστια και δεν είναι καθόλου σίγουρο ότι θα περάσει.

S5.3 Αν είχαμε μια μπάλα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ που κινείται με ταχύτητα $u = 10 \text{ m/s}$ και η αβεβαιότητα στην ορμή ήταν και πάλι 0,003%, πόση θα ήταν η αβεβαιότητα της θέσης; Θα μπορέσει η μπάλα να περάσει σίγουρα από μια οπή που έχει διάμετρο διπλάσια από την ακτίνα της, δηλαδή 40 cm ;

Λύση:

Τότε η μπάλα θα είχε ορμή $p = m u = 10 \text{ kgm/s}$ και η αβεβαιότητα ορμής θα ήταν $\Delta p = 0,003\% p = 3 \cdot 10^{-5} \cdot 10 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ kgm/s}$.

Για την αβεβαιότητα της θέσης Δx έχουμε

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} \rightarrow \Delta x \geq \frac{h}{2\pi \Delta p} \rightarrow \Delta x \geq \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{6,28 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} \rightarrow \Delta x \approx 0,35 \cdot 10^{-30} \text{ m}$$

Όπως βλέπουμε η απροσδιοριστία στη θέση είναι πάρα πολύ μικρή και αδύνατον να μετρηθεί κάτι που το καταλαβαίνουμε από την εμπειρία μας. Η μπάλα έχει κάθε στιγμή μια πολύ καθορισμένη θέση σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων. Συνεπώς με τόσο μικρή αβεβαιότητα είναι σίγουρο ότι θα περάσει από την οπή.

S5.4 Πρωτόνιο έχει κινητική ενέργεια $K=10\text{keV}$. Αν η ορμή του μετρείται με αβεβαιότητα 5%, τότε πόση θα είναι η αβεβαιότητα της θέσης του;

Δίνονται $h = 6,63 \times 10^{-34}\text{Js}$, $1\text{eV}=1,6 \times 10^{-19}\text{J}$, $m_p = 1,67 \times 10^{-27}\text{kg}$,

Λύση:

Υπολογίζω την ορμή από την κινητική ενέργεια. $K = \frac{p^2}{2m} \rightarrow p = \sqrt{2Km} \rightarrow$
 $\rightarrow p = \sqrt{2 \cdot 10^4 \text{eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{J/eV} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{kg}} \rightarrow p = 2,31 \cdot 10^{-21} \text{kgm/s}$

Η αβεβαιότητα της ορμής είναι $\Delta p = 5 \cdot 10^{-2} p \rightarrow \Delta p = 1,155 \cdot 10^{-23} \text{kgm/s}$

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq h/2\pi \rightarrow \Delta x \geq \frac{h}{2\pi \Delta p} \rightarrow \Delta x \geq 9 \cdot 10^{-14} \text{m} \rightarrow \Delta x_{\min} = 9 \cdot 10^{-13} \text{m}$$

S5.5 Το ηλεκτρόνιο ενός ατόμου του υδρογόνου παραμένει στην κατάσταση $n=2$ πριν μεταπέσει στην κατάσταση $n=1$ επί 10^{-8}s . Δίνονται $h = 6,63 \times 10^{-34}\text{Js}$, $1\text{eV}=1,6 \times 10^{-19}\text{J}$

A. Πόση είναι η αβεβαιότητα στην ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου;

B. Αν στη κατάσταση $n=2$ η ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι $E_2 = -3,4\text{eV}$ και στη $n=1$, $E_1 = -13,6\text{eV}$, πόσο είναι το ποσοστό της αβεβαιότητας της ενέργειας ;

Γ. Πόσο είναι το μήκος κύματος του εκπεμπόμενου φωτονίου;

Λύση

A. Η αβεβαιότητα για το χρόνο εκπομπής του φωτονίου είναι $\Delta t = 10^{-8}\text{s}$.

Από τη σχέση $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi} \rightarrow \Delta E \geq \frac{h}{2\pi \Delta t} \rightarrow \Delta E \geq 0,66 \cdot 10^{-7} \text{eV}$

B. Κατά την αποδιέγερση του ηλεκτρονίου η εκπομπή ενέργειας υπό μορφή φωτονίου είναι $E = E_2 - E_1 = 10,2\text{eV}$. Άρα το ποσοστό της αβεβαιότητας της ενέργειας είναι

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{0,66 \cdot 10^{-7} \text{eV}}{10,2 \text{eV}} \rightarrow \frac{\Delta E}{E} = 6 \cdot 10^{-9}$$

Γ. Για το μήκος κύματος του φωτονίου: $E = hf \rightarrow E = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{E} \rightarrow \lambda = 121,8 \text{nm}$

S5.6 Το ηλεκτρόνιο ενός ατόμου μεταπίπτει από μια διεγερμένη κατάσταση σε μια χαμηλότερης ενέργειας δε χρόνο $\Delta t = 10^{-8}\text{s}$. Δίνονται $h = 6,63 \times 10^{-34}\text{Js}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$

A. Χρησιμοποιείστε την αρχή της αβεβαιότητας για να υπολογίσετε το εύρος της φασματικής γραμμής Δf που οφείλεται σ'αυτόν τον χρόνο.

B. Αν το μήκος κύματος αυτής της φασματικής γραμμής είναι τα 500nm να βρείτε τη σχετική διεύρυνση $\Delta f/f$.

Λύση

A. Από την σχέση: $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi} \rightarrow h \Delta f \Delta t \geq \frac{h}{2\pi} \rightarrow \Delta f \geq 1,6 \cdot 10^{14} \text{Hz} \rightarrow \Delta f = 1,6 \cdot 10^{14} \text{Hz}$

B. Η μέση συχνότητα αυτής της φασματικής γραμμής είναι $f = c/\lambda \rightarrow f = 6 \cdot 10^{14} \text{Hz}$

$$\text{Άρα: } \frac{\Delta f}{f} = 2,7 \cdot 10^{-8}$$

S5.6 Ένας πυρήνας έχει ακτίνα περίπου ίση με $5 \cdot 10^{-15} \text{m}$. Κάνοντας χρήση της αρχής αβεβαιότητας βρείτε το κατώτερο όριο ενέργειας που πρέπει να έχει ένα ηλεκτρόνιο για να βρίσκεται μέσα στον πυρήνα.

Δίνονται $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{Js}$, $1 \text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{J}$, $m_e = 9 \cdot 10^{-31} \text{kg}$

Λύση

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq h/2\pi \text{ με } \Delta x = 5 \cdot 10^{-15} \text{m. Άρα: } \Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} \rightarrow \Delta p \geq \frac{h}{2\pi \cdot \Delta x} \rightarrow \Delta p \geq 2 \cdot 10^{-20} \text{kgm/s}$$

$$K = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \quad (1) \quad \text{όπου } \lambda = \frac{h}{p} \quad (2)$$

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow K = p \cdot c \rightarrow K \geq 2 \cdot 10^{-20} \text{kgm/s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{m/s} \rightarrow K \geq 6 \cdot 10^{-12} \text{J} \rightarrow K \geq 3,75 \cdot 10^7 \text{eV} \rightarrow K \geq 37,5 \text{MeV}$$

αφού δίνεται ότι $1 \text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{J}$

Τέτοια όμως μεγάλη ενέργεια δεν κυκλοφορεί σε ατομικά ηλεκτρόνια και συνεπώς είναι αδύνατον να υπάρξει ηλεκτρόνιο μέσα στον πυρήνα.