

Κεφάλαιο 1

Ταλαντώσεις

1.1 Απλή Αρμονική Ταλάντωση

1.1.1 Περιοδικά Φαινόμενα

Ονομάζονται τα φαινόμενα που επαναλαμβάνονται κατά τον ίδιο τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα. Τέτοια φαινόμενα είναι η κυκλική ομαλή κίνηση, η κίνηση του εκκρεμούς κ.ά. Κάθε περιοδικό φαινόμενο χαρακτηρίζεται από την **Περίοδο** (T), τη **Συχνότητα** (f) και την **γωνιακή συχνότητα** (ω)

- **Περίοδος (T)** ενός περιοδικού φαινομένου είναι ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη επανάληψη του φαινομένου. Αν σε χρόνο t γίνονται N επαναλήψεις του φαινομένου, τότε η περίοδος είναι ίση με το πηλίκο:

$$T = \frac{t}{N} \quad (1.1)$$

Μονάδα μέτρησης της περιόδου είναι το 1 s.

- **Συχνότητα (f)** ενός περιοδικού φαινομένου είναι το πηλίκο του αριθμού N των επαναλήψεων του φαινομένου σε ορισμένο χρόνο t , προς το χρόνο t . Δηλαδή:

$$f = \frac{N}{t} \quad (1.2)$$

Μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι το 1 Hz ή 1 s⁻¹

Από τον ορισμό τους, τα μεγέθη περίοδος και συχνότητα είναι αντίστροφα και συνδέονται με την σχέση:

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.3)$$

- Η **γωνιακή συχνότητα (ω)** είναι ένα μέγεθος που αναφέρεται σε όλα τα περιοδικά φαινόμενα και δίνεται από την σχέση:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (1.4)$$

Η γωνιακή συχνότητα είναι ίση με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας στην ομαλή κυκλική κίνηση και εκφράζει τον αριθμό των επαναλήψεων ενός φαινομένου σε χρόνο $2\pi \text{ sec}$.

Μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι το 1 rad/sec.

1.1.2 Οι εξισώσεις της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης

Ταλάντωση ονομάζεται μια παλινδρομική περιοδική κίνηση. **Γραμμική ταλάντωση** ονομάζεται η ταλάντωση που εξελίσσεται πάνω σε ευθεία τροχιά. Μια ειδική περίπτωση γραμμικής ταλάντωσης είναι η **απλή αρμονική ταλάντωση (α.α.τ.)**.

Έστω ένα σώμα που κινείται παλινδρομικά πάνω σε ένα άξονα γύρω από την αρχή Ο του άξονα, που είναι το μέσον της τροχιάς του. Αν η απομάκρυνση x του σώματος από το σημείο Ο είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου t , δηλαδή δίνεται από την σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad (1.5)$$

τότε η κίνηση του σώματος λέγεται *απλή αρμονική ταλάντωση*. Το **A** είναι η μέγιστη απομάκρυνση, δηλαδή η μέγιστη απόσταση από το σημείο Ο στην οποία φτάνει το σώμα και ονομάζεται **Πλάτος** της ταλάντωσης. Η γωνία $\phi = \omega t + \phi_0$ που η τιμή της καθορίζει και την τιμή της απομάκρυνσης x του σώματος την χρονική στιγμή t ονομάζεται **φάση της ταλάντωσης**. Το σημείο Ο είναι η **θέση ισορροπίας** της ταλάντωσης.

Η φάση αυξάνεται συνεχώς με τον χρόνο και σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T$ αντιστοιχεί σε αύξηση της φάσης κατά $\Delta\phi = 2\pi \text{ rad}$

Η ποσότητα ϕ_0 είναι η φάση της ταλάντωσης για την χρονική στιγμή $t = 0$ και γι'αυτό ονομάζεται **αρχική φάση**. Ουσιαστικά η αρχική φάση καθορίζεται από τις "αρχικές συνθήκες" της απλής αρμονικής ταλάντωσης (θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση). Για την αρχική φάση ισχύει:

$$0 \leq \phi_0 < 2\pi$$

Η **ταχύτητα** του σώματος κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την σχέση:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \quad (1.6)$$

όπου $v_{\max} = \omega A$ η μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας του σώματος. Το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα, όταν διέρχεται από την θέση ισορροπίας Ο ($x = 0$).

Η **επιτάχυνση** του σώματος κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την σχέση:

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = -\alpha_{\max} \eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad (1.7)$$

όπου $\alpha_{\max} = \omega^2 A$ η μέγιστη τιμή του μέτρου της επιτάχυνσης του σώματος. Το σώμα έχει μέγιστη επιτάχυνση, όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσης της ταλάντωσης ($x = \pm A$).

Οι χρονικές εξισώσεις (1.5), (1.6), (1.7) απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι η "ταυτότητα" της κάθε κίνησης στην μηχανική και συγκροτούν την **Κινηματική προσέγγιση** του προβλήματος. Για την περίπτωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης οι εξισώσεις αυτές είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου

Σχέση στιγμιαίας επιτάχυνσης-απομάκρυνσης Η σχέση (1.7) με την βοήθεια της (1.5) γράφεται:

$$\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu(\omega t) = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t) = -\omega^2 x \quad (1.8)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η επιτάχυνση α και η απομάκρυνση x του σώματος έχουν πάντα αντίθετη φορά, ή με άλλα λόγια, ότι η επιτάχυνση έχει πάντοτε φορά προς την θέση ισορροπίας Ο.

Σχέση στιγμιαίας ταχύτητας-απομάκρυνση Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας σε μια τυχαία χρονική στιγμή και της απομάκρυνσης την ίδια χρονική στιγμή συνδέονται με την σχέση:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad (1.9)$$

η απόδειξη της σχέσης προκύπτει με δύο τρόπους παραθέτω τον πρώτο παρακάτω

$$x = A\eta\mu(\omega t) \Rightarrow \frac{x}{A} = \eta\mu(\omega t) \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} = \eta\mu^2(\omega t)$$

και

$$v = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow \frac{v}{\omega A} = \sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = \sigma\upsilon\nu^2(\omega t)$$

προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = \eta\mu^2(\omega t) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t) = 1 \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

1.1.3 Γραφικές παραστάσεις

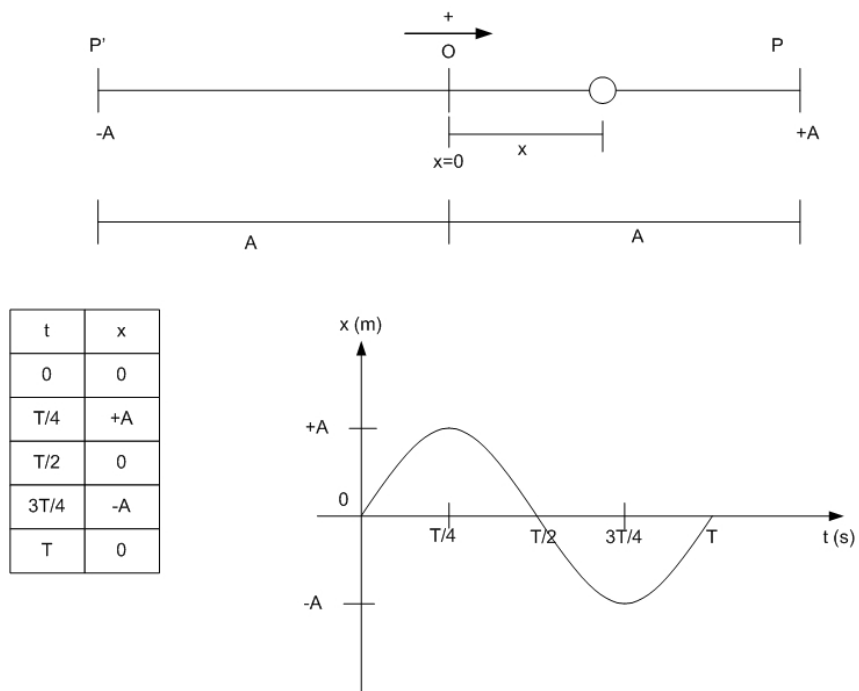
Στα διαγράμματα των παραπάνω σχημάτων αποδίδεται η μεταβολή της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $\phi_0 = 0$.

Τι πληροφορίες μπορούμε να πάρουμε από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις:

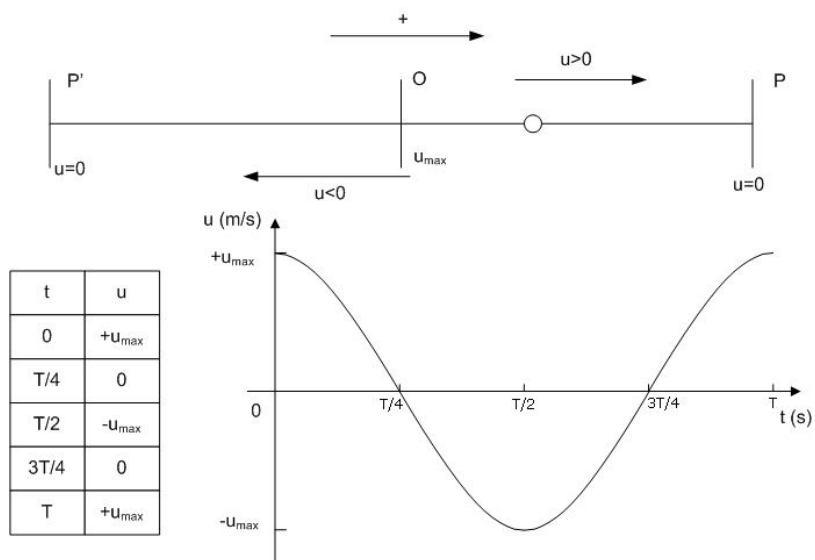
α) Η χρονική στιγμή $t = 0$ μας δίνει την αρχική φάση ϕ_0 .

β) Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται στις ακραίες θέσεις, ενώ μεγιστοποιείται όταν το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας.

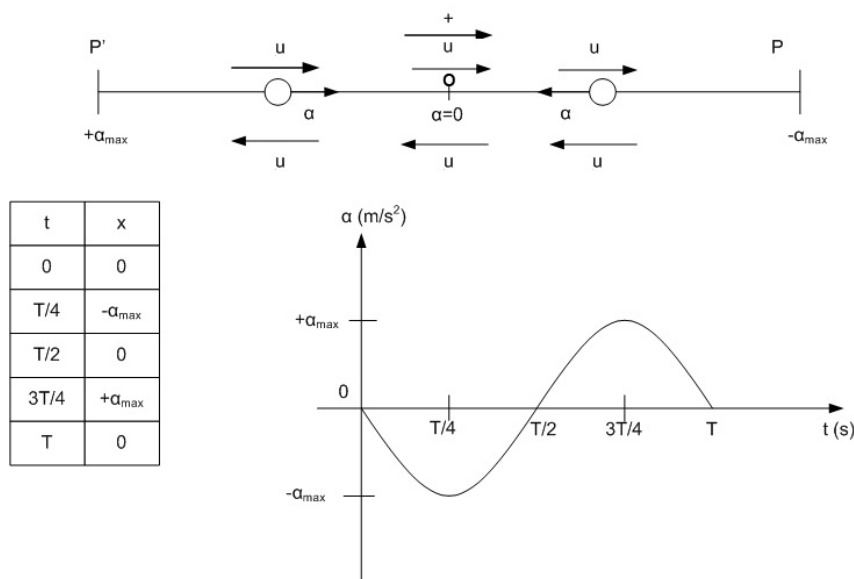
γ) Η επιτάχυνση του σώματος μηδενίζεται όταν το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας του, ενώ μεγιστοποιείται όταν το σώμα φτάνει σε ακραία θέση.



Σχήμα 1.1: Διάγραμμα Απομάκρυνσης - χρόνου



Σχήμα 1.2: Διάγραμμα Ταχύτητας - χρόνου



Σχήμα 1.3: Διάγραμμα Επιτάχυνσης - χρόνου

δ) Τα διανύσματα της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης έχουν:

- Θετική αλγεβρική τιμή όταν έχουν φορά προς τα πάνω ή προς τα δεξιά.
- Αρνητική αλγεβρική τιμή όταν έχουν φορά προς τα κάτω ή αριστερά.

Πολλές φορές η εκφώνηση της άσκησης καθορίζει την θετική φορά

δ) Όταν το σώμα απομακρύνεται από την θέση ισορροπίας, η ταχύτητα του ελαττώνεται κατά μέτρο(άρα επιτάχυνση αντίθετη στην ταχύτητα) , ενώ όταν το σώμα πλησιάζει προς την θέση ισορροπίας, η ταχύτητα του αυξάνεται κατά μέτρο(άρα επιτάχυνση και ταχύτητα στην ίδια φορά)

1.1.4 Παραδείγματα Υπολογισμού Αρχικής φάσης

π.χ.1 Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην ακραία θετική θέση ($x = +A$). Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Λύση Αφού εκτελεί α.α.τ. $\Rightarrow x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ την χρονική στιγμή $t = 0 \Rightarrow +A = A\eta\mu(\phi_0) \Rightarrow \eta\mu(\phi_0) = +1 \Rightarrow \phi_0 = 2k\pi + \pi/2 \Rightarrow \phi_0 = \pi/2\text{rad}$

π.χ.2 Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ξεκινά την χρονική στιγμή $t = 0$ από την θέση ισορροπίας και κινείται με φορά προς την ακραία αρνητική θέση. Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Λύση Αφού εκτελεί α.α.τ. $\Rightarrow x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην θέση $x = 0 \Rightarrow 0 = A\eta\mu(\phi_0) \Rightarrow \eta\mu(\phi_0) = 0 \Rightarrow \phi_0 = 2k\pi$ ή $\phi_0 = 2k\pi + \pi$. Ταυτόχρονα όμως για $t = 0, v = -v_{max} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\phi_0) = -1 \Rightarrow \phi_0 = \pi rad$

π.χ.3 Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση βρίσκεται την χρονική στιγμή $t = 0$ στη θέση $x = +A/2$ και κινείται προς την θέση ισορροπίας. Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Λύση Αφού εκτελεί α.α.τ. $\Rightarrow x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην θέση $x = +A/2 \Rightarrow A/2 = A\eta\mu(\phi_0) \Rightarrow \eta\mu(\phi_0) = 1/2 \Rightarrow \phi_0 = 2k\pi + \pi/6$ ή $\phi_0 = 2k\pi + \pi - \pi/6$.

Ταυτόχρονα όμως για $t = 0, v < 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\phi_0) < 0 \Rightarrow \phi_0 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6 rad$ (2ο τεταρτημόριο) * Αν για την στιγμή $t = 0$ κινούνταν προς την ακραία θετική θέση τότε $v > 0 \Rightarrow \phi_0 = \pi/6 rad$

1.1.5 Η Δύναμη στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Όταν ένα σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, τότε σε μια τυχαία θέση της τροχιάς του έχει επιτάχυνση α , ανεξάρτητα από την κατεύθυνση της κίνησης του. Η συνολική δύναμη που δέχεται το σώμα και είναι υπεύθυνη για την επιτάχυνση του δίνεται από τον θεμελιώδη Νόμο της μηχανικής:

$$\Sigma F = m\alpha \quad (1.10)$$

όμως λόγω της σχέσης (1.8) προκύπτει

$$\Sigma F = -m\omega^2 x \quad (1.11)$$

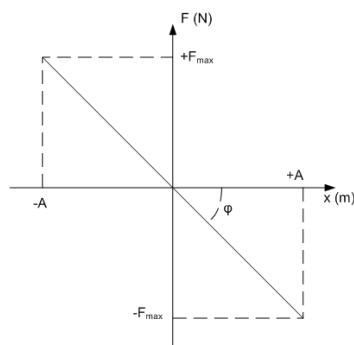
Αν συμβολίσουμε $D = m\omega^2$, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\Sigma F = -Dx \quad (1.12)$$

Η σταθερά αναλογίας D λέγεται **σταθερά επαναφοράς** της ταλάντωσης και η τιμή της εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του ταλαντούμενου συστήματος. Από την σχέση (1.12) φαίνεται ότι όταν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η συνολική δύναμη που δέχεται:

- έχει ως φορέα την ευθεία πάνω στην οποία γίνεται η ταλάντωση του σώματος,
- είναι ανάλογη με την απομάκρυνση του σώματος από την Θέση Ισορροπίας O ,
- έχει αντίθετη φορά από την απομάκρυνση του σώματος και πάντοτε προς την θέση ισορροπίας
- στην θέση ισορροπίας $\Sigma F = 0$

Η σχέση (1.12) ονομάζεται και **Δύναμη Επαναφοράς**, αφού δρα έτσι ώστε να επιταχύνει το σώμα πάντα προς την θέση ισορροπίας και παριστάνεται γραφικά στο διάγραμμα 1.4 **Παρατήρηση:** Η σχέση (1.12) αποτελεί **ικανή και αναγκαία συν-**



Σχήμα 1.4: Διάγραμμα Δύναμης- Απομάκρυνσης

θήκη, ώστε ένα σώμα να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αυτό σημαίνει πως όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η γραμμική ταλάντωση που εκτελεί ένα σώμα είναι και αρμονική, μπορούμε να αποδείξουμε ότι σε κάθε θέση απομάκρυνσης x από την θέση ισορροπίας η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή. Φυσικά ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, τότε η συνισταμένη δύναμη που δέχεται σε κάθε θέση απομάκρυνσης x από την θέση ισορροπίας ικανοποιεί την σχέση (1.12).

Σχέση Περιόδου- σταθεράς επαναφοράς

Από την σχέση $D = m\omega^2$ προκύπτει: $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$
από τον ορισμό της γωνιακής συχνότητας $\omega = \frac{2\pi}{T}$ προκύπτει:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad (1.13)$$

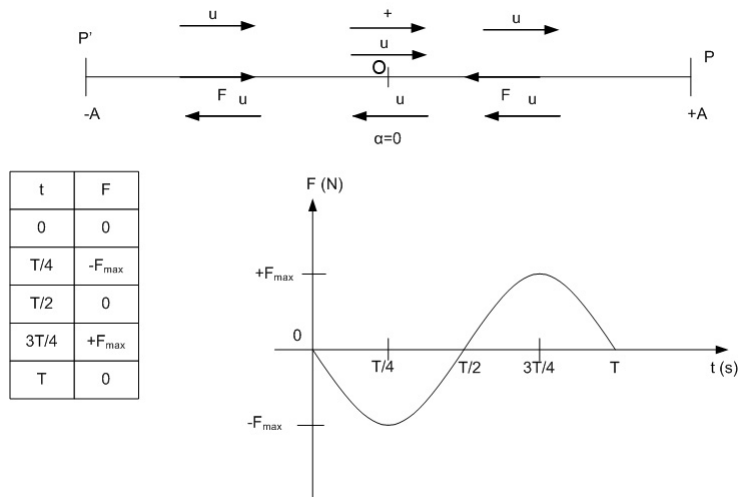
Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι **η περίοδος T δεν εξαρτάται από το πλάτος A της ταλάντωσης.**

Η δύναμη επαναφοράς ως συνάρτηση του χρόνου

Από τις σχέσεις (1.12),(1.5) προκύπτει:

$$\Sigma F = F_{max}\eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad (1.14)$$

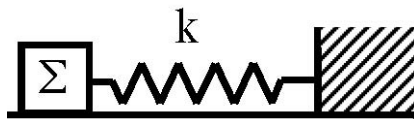
,με την μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης $F_{max} = DA$



Σχήμα 1.5: Διάγραμμα Δύναμης - Χρόνου

1.2 Το σύστημα “Μάζας - Ελατηρίου”

Το πιο χαρακτηριστικό πρόβλημα που θα αντιμετωπίσουμε στις μηχανικές ταλαντώσεις είναι το πρόβλημα της μάζας που είναι στερεωμένη στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου.



Ιδανικό ελατήριο είναι κάθε ελατήριο που μπορεί να θεωρηθεί ως αβαρές και υπακούει στον **Νόμο του Hooke** $F_{ελ} = k\Delta l$ όπου k είναι η σταθερά του ελατηρίου (εξαρτάται από το υλικό του ελατηρίου) και Δl είναι η επιμήκυνση ή συμπίεση του ελατηρίου από την **Θέση Φυσικού μήκους** του. Η δύναμη $F_{ελ}$ έχει τέτοια φορά ώστε να επαναφέρει το ελατήριο στην αρχική του κατάσταση φυσικού μήκους (l_0)

Η Δύναμη Ελατηρίου ($F_{ελ}$) συμπίπτει με την δύναμη επαναφοράς μόνο στην περίπτωση του οριζοντίου ελατηρίου, όπου η θέση ισορροπίας και η θέση φυσικού μήκους συμπίπτουν, αντίθετα στην περίπτωση του κατακόρυφου ή κεκλιμένου συστήματος η θέση ισορροπίας και η θέση φυσικού μήκους είναι διαφορετικές, άρα δεν συμπίπτουν οι δύο δυνάμεις μεταξύ τους.

Πώς αποδεικνύουμε ότι ένα σώμα το οποίο είναι δεμένο σε ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, αν το διεγείρουμε από την κατάσταση ισορροπίας του;

Βήματα - μεθοδολογία σε προβλήματα οριζοντίων και κατακόρυφων ελατηρίων που στο άκρο τους έχουν σώμα μάζας m

- 1ο** : Σχεδιάζουμε το ελατήριο στο φυσικό του μήκος, το σώμα στην θέση ισορροπίας και το σώμα σε μια τυχαία θέση που απέχει x από την θέση ισορροπίας
- 2ο** : Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στην μάζα στην θέση ισορροπίας. Από την συνθήκη ισορροπίας ($\Sigma F = 0$) βρίσκουμε μια σχέση
- 3ο** : Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στην τυχαία θέση και υπολογίζουμε την ΣF . Προσέχουμε στον υπολογισμό της συνισταμένης δύναμης, από τις δυνάμεις που έχουν την ίδια φορά με την απομάκρυνση x να αφαιρούμε εκείνες που έχουν αντίθετη φορά.
- 4ο** : Αφού καταλήξω σε σχέση της μορφής $\Sigma F = -Dx$, με D θετική σταθερά το σώμα θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς D .
- 5ο** : Το πλάτος A της ταλάντωσης είναι ίσο με την αρχική απομάκρυνση του σώματος από την Θέση Ισορροπίας. Η περίοδος υπολογίζεται από την σχέση (1.13) και η εξίσωση της απομάκρυνσης δίνεται από την (1.5) με την κατάλληλη αρχική φάση ϕ_0

1.2.1 Η ενέργεια στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Η ενέργεια της ταλάντωσης E ενός συστήματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ισούται με την ενέργεια που προσφέραμε αρχικά στο σύστημα για να το θέσουμε σε ταλάντωση. Η ενέργεια της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο:

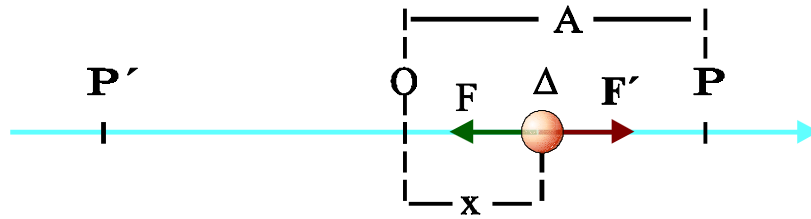
$$E = \frac{1}{2}DA^2 \quad (1.15)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι το πλάτος A καθορίζεται από την ενέργεια της ταλάντωσης, δηλαδή από την ενέργεια που προσφέραμε αρχικά στο σύστημα ώστε να αρχίσει να ταλαντώνεται. Σε όλη την διάρκεια της ταλάντωσης η ενέργεια παραμένει σταθερή. Άρα: **Η ενέργεια μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι σταθερή και ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους της.**

Δυναμική & Κινητική Ενέργεια Ταλάντωσης Στην διάρκεια της ταλάντωσης η ενέργεια εμφανίζεται ως δυναμική ενέργεια ταλάντωσης και ως κινητική ενέργεια ταλάντωσης. Η κινητική και η Δυναμική ενέργεια υπολογίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.16)$$

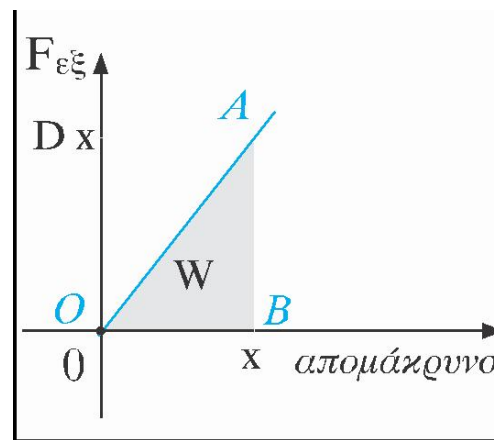
$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \quad (1.17)$$



Απόδειξη της σχέσης $U = \frac{1}{2}Dx^2$: Αν το σώμα βρίσκεται ακίνητο στην θέση ισορροπίας O, για να μετακινηθεί σε μια άλλη θέση πρέπει να του ασκηθεί κατάλληλη εξωτερική δύναμη $F_{εξ}$. Κατά την μετακίνηση αυτή θα ασκείται στο σώμα και η δύναμη επαναφοράς. Για να μετακινηθεί το σώμα στην ακραία θέση (x) χωρίς ταχύτητα θα πρέπει το μέτρο της εξωτερικής δύναμης να είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης επαναφοράς και να έχει αντίθετη φορά, σε κάθε χρονική στιγμή. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει:

$$F_{εξ} = -\Sigma F = -(-Dx) = Dx$$

Το έργο της εξωτερικής δύναμης είναι ίσο και με την προσφερόμενη ενέργεια για να απομακρύνουμε το σώμα κατά x από την θέση ισορροπίας. Επειδή η δύναμη είναι μεταβλητού μέτρου το έργο της υπολογίζεται από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης $F_{εξ} = f(x)$.



Από το εμβαδόν προκύπτει η ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα και αποθηκεύεται σ' αυτό ως Δυναμική Ενέργεια:

$$W_{F_{εξ}} = E = \frac{1}{2}Dx^2 \quad (1.18)$$

K, U ως συναρτήσεις του χρόνου: Αντικαθιστώντας στις σχέσεις 1.16 και 1.17 της χρονικές εξισώσεις για την στιγμιαία απομάκρυνση και στην στιγμιαία ταχύτητα

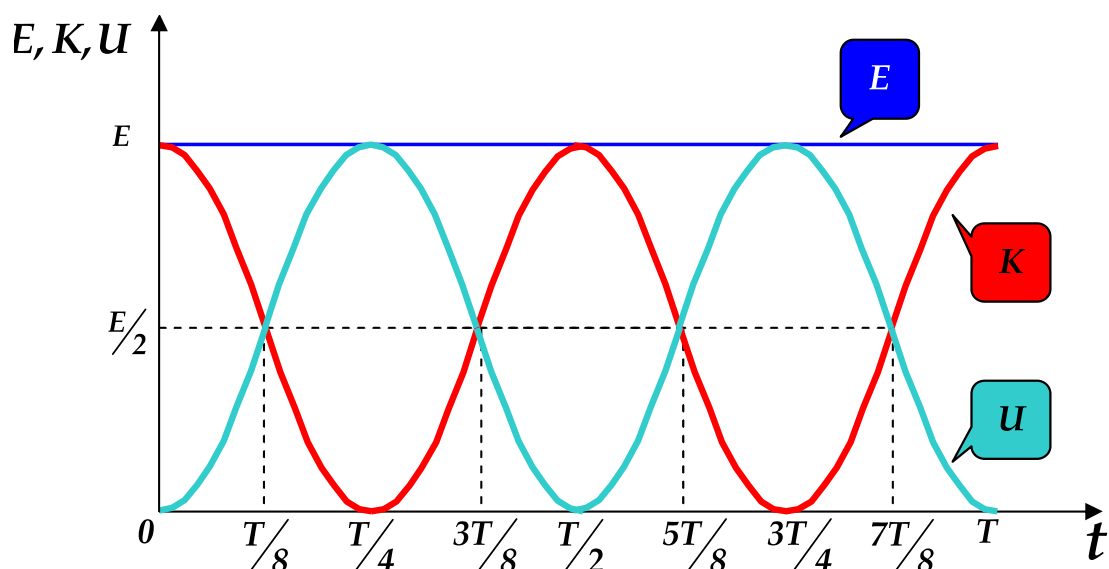
μπορούμε να οδηγηθούμε στις παρακάτω σχέσεις:

$$K = \frac{1}{2}m(v_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t))^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t)$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}DA^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t) = E\sigma\upsilon\nu^2(\omega t) \quad (1.19)$$

$$U = \frac{1}{2}D(A\eta\mu(\omega t))^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}DA^2\eta\mu^2(\omega t) = E\eta\mu^2(\omega t) \quad (1.20)$$

Από τις σχέσεις 1.20 και 1.19 προκύπτει ότι η κινητική και η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μεταβάλλονται περιοδικά με τον χρόνο. Οι γραφικές παραστάσεις της Κινητικής, της Δυναμικής και της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο φαίνονται στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 1.6: E, K, U σε συνάρτηση με τον χρόνο

Διατήρησης της Ενέργειας: Η ολική ενέργεια E στην απλή αρμονική ταλάντωση παραμένει σταθερή και είναι κάθε στιγμή ίση με το άθροισμα της Δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης και της κινητικής ενέργειας. Δηλαδή:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = E$$

,όπου βέβαια E =σταθερή και δίνεται από την σχέση 1.15

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι:

- (α) **Στην θέση ισορροπίας** ($x = 0$) η Δυναμική Ενέργεια είναι μηδέν, ενώ η Κινητική Ενέργεια είναι μέγιστη και ίση με την Ενέργεια ταλάντωσης. $E = K_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$
- (β) **Στις ακραίες θέσεις** ($x = \pm A$) η Κινητική Ενέργεια είναι μηδέν, ενώ η Δυναμική Ενέργεια είναι μέγιστη και ίση με την ενέργεια της ταλάντωσης $E = U_{max} = \frac{1}{2}DA^2$
- (γ) **Σε οποιαδήποτε ενδιάμεση θέση** (εκτός από την Θ.Ι.) το σύστημα έχει και Κινητική και Δυναμική Ενέργεια και σε κάθε χρονική στιγμή ισχύει η **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας**

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \quad (1.21)$$

Γνωρίζοντας την Δυναμική και την Κινητική Ενέργεια κατά την διάρκεια της απλής αρμονικής ταλάντωσης μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση του σώματος, χωρίς να χρειάζεται απαραίτητα ο χρόνος. Αυτή η προσέγγιση είναι η **Ενεργειακή προσέγγιση** της κίνησης, που σε πολλές περιπτώσεις είναι χρησιμότερη από την Κινητική προσέγγιση που απαιτεί γνώση του χρόνου.

Παρακάτω παρουσιάζω δύο βασικές αποδείξεις:

Απόδειξη της σχέσης $v_{max} = \omega A$:

$$E = K_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Rightarrow A^2 = \frac{m}{D}v_{max}^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{D}}v_{max}$$

όμως η σταθερά επαναφοράς είναι $D = m\omega^2 \Rightarrow v_{max} = \omega A$

Απόδειξη της σχέσης $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow mv^2 = D(A^2 - x^2) \Rightarrow v \pm \sqrt{\frac{D}{m}(A^2 - x^2)}$$

όμως η σταθερά επαναφοράς είναι $D = m\omega^2 \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

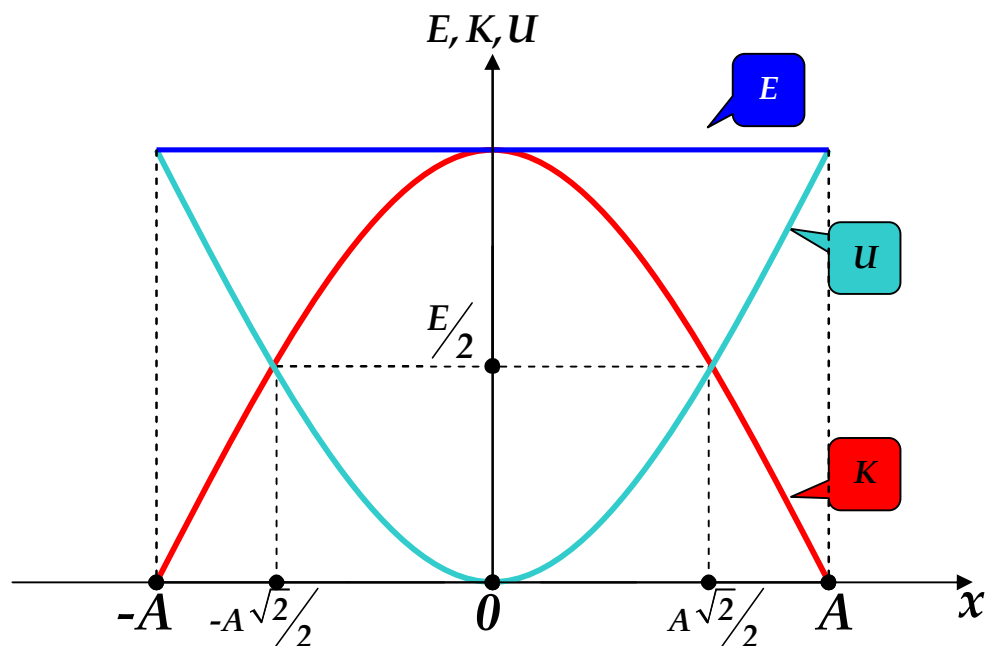
Τα διαγράμματα $U = f(x)$, $K = f(x)$ **στην απλή αρμονική ταλάντωση** Η δυναμική Ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση:

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \quad \mu\epsilon -A \leq x \leq +A$$

Η κινητική Ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση:

$$E = K + U \Rightarrow K = E - \frac{1}{2}Dx^2 \quad \mu\epsilon -A \leq x \leq +A \quad (1.22)$$

Άρα η γραφική παράσταση της Δυναμικής Ενέργειας και της Κινητικής Ενέργειας σε κοινό διάγραμμα σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την Θ.Ι. παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.7:



Σχήμα 1.7: Διάγραμμα E, K, U με την απομάκρυνση

Τα διαγράμματα $U = f(v), K = f(v)$ στην απλή αρμονική ταλάντωση Η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \mu\epsilon -v_{max} \leq v \leq +v_{max}$$

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση :

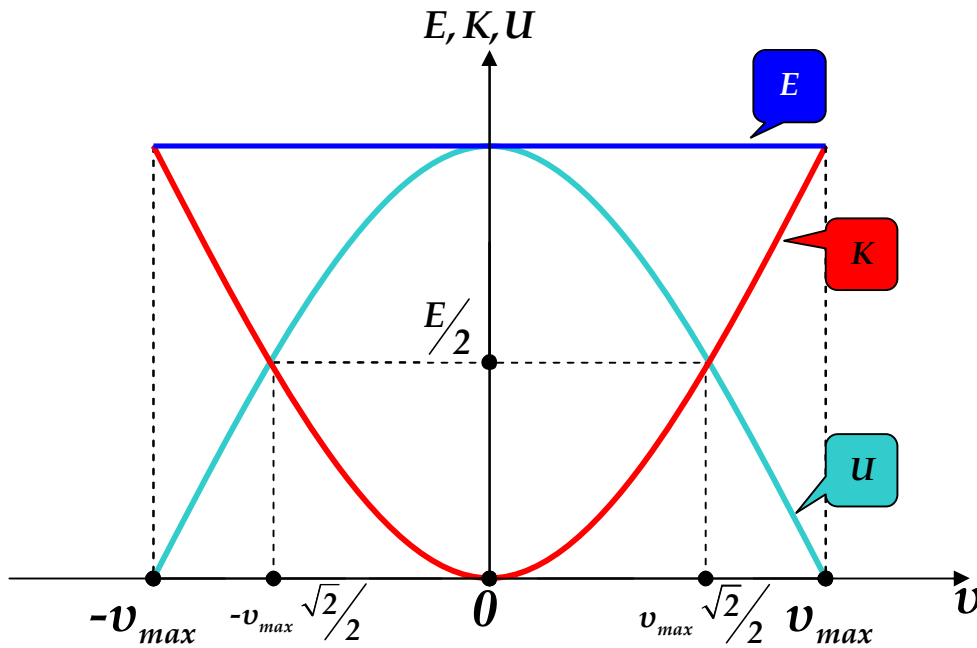
$$E = K + U \Rightarrow U = E - \frac{1}{2}mv^2 \quad \mu\epsilon -v_{max} \leq v \leq +v_{max} \quad (1.23)$$

Άρα η γραφική παράσταση της Δυναμικής Ενέργειας και της Κινητικής Ενέργειας σε κοινό διάγραμμα σε συνάρτηση με την απο την ταχύτητα παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.8:

Η ενέργεια στο Ιδανικό Ελατήριο: Στην περίπτωση του ιδανικού ελατηρίου που αναλύσαμε παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε την Δυναμική Ενέργεια του ελατηρίου, η οποία χαρακτηρίζεται ως δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης. Υπολογίζεται από την σχέση :

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \quad (1.24)$$

, όπου βέβαια k η σταθερά του ελατηρίου και Δl η επιμήκυνση ή συμπίεση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος. Προσοχή η Δυναμική Ενέργεια Ταλάντωσης

Σχήμα 1.8: Διάγραμμα E, K, U με την ταχύτητα

συμπίπτει με την Ενέργεια του Ελατηρίου μόνο στην περίπτωση του οριζοντίου ελατηρίου.

Το έργο της Δύναμης του Ελατηρίου μπορεί να υπολογιστεί από την παρακάτω σχέση:

$$W_{F_{ελ}} = U_{ελ}^{(αρχ)} - U_{ελ}^{(τελ)} \quad (1.25)$$

Αντίστοιχα το έργο της δύναμης επαναφοράς μπορεί να υπολογιστεί με τον ίδιο τρόπο, αν στην θέση της Δυναμικής Ενέργειας Ελατηρίου, βάλουμε την Δυναμική Ενέργεια Ταλάντωσης.

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 1.1 - 1.108, 2.1 - 2.60, 1.131 - 1.146, 1.149 - 1.156, 1.160, 1.161, 1.172, 1.174, 1.176, 1.178, 1.179, 1.180, 1.183, 1.184, 1.186, 1.187, 1.188, 1.190

1.2.2 Ρυθμοί μεταβολής στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ο Ρυθμός μεταβολής είναι από τις βασικές έννοιες στην Φυσική καθώς μπορούν να μας δώσουν πληροφορίες για την συμπεριφορά μιας φυσικής ποσότητας. Στα μαθηματικά Γ Λυκείου θα μάθουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης είναι η παράγωγος συνάρτησης. Παρακάτω παρουσιάζω ρυθμούς μεταβολής βασικών μεγεθών στην απλή αρμονική ταλάντωση.

- **Ρυθμός μεταβολής της απομάκρυνσης** $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = v = \omega A \sigma \nu \nu(\omega t) \quad (1.26)$$

- **Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας** $\frac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = \alpha = -\omega^2 A \eta \mu(\omega t) \quad (1.27)$$

- **Ρυθμός μεταβολής της ορμης** $\frac{dP}{dt}$

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -D A \eta \mu(\omega t) \quad (1.28)$$

- **Ρυθμός μεταβολής της Κινητικής - Δυναμικής Ενέργειας** $\frac{dK}{dt}, \frac{dU}{dt}$

Γνωρίζουμε ότι $K + U = E \Rightarrow d(K + U) = 0$, αφού $E = \text{σταθερή}$, $\Rightarrow dK = -dU$

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt} \quad (1.29)$$

επίσης

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} = \Sigma F \cdot v \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -D \cdot x \cdot v \quad (1.30)$$

και σε συνάρτηση με τον χρόνο, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.5), (1.6) προκύπτει:

$$\frac{dK}{dt} = -D A \eta \mu(\omega t) \omega A \sigma \nu \nu(\omega t) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -\frac{D A \omega^2}{2} \eta \mu(2\omega t) \quad (1.31)$$

άρα

$$\frac{dU}{dt} = +\frac{D A \omega^2}{2} \eta \mu(2\omega t) \quad (1.32)$$

1.2.3 Η Διαφορά φάσης στην απλή αρμονική ταλάντωση

Διαφορά Φάσης $\Delta\phi$ δύο αρμονικά μεταβαλλόμενων μεγεθών λέγεται η διαφορά των φάσεων τους. Όταν τα δύο μεγέθη έχουν την ίδια γωνιακή συχνότητα ω , τότε η διαφορά φάσης είναι χρονικά σταθερή. Για να βρούμε την διαφορά φάσης δύο μεγεθών, πρέπει τα μεγέθη να εκφράζονται με τον ίδιο τριγωνομετρικό αριθμό.

Στην περίπτωση της **απομάκρυνσης και της ταχύτητας** μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης έχουμε:

$$x = A \eta \mu(\omega t) \text{ και } v = v_{\max} \sigma \nu \nu(\omega t) \Rightarrow v = v_{\max} \eta \mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Άρα η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο μεγεθών είναι $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ και προηγείται η ταχύτητα.

Η φυσική σημασία αυτής της διαφοράς φάσης είναι ότι όταν κάποια χρονική στιγμή η ταχύτητα έχει μια ορισμένη τιμή, η απομάκρυνση θα πάρει την αντίστοιχη τιμή μετά από χρόνο Δt που αντιστοιχεί σε γωνία $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή μετά από χρόνο που θα δίνεται από την σχέση:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{4}$$

Άρα αν για παράδειγμα η ταχύτητα πάρει την τιμή $v = +v_{max}$, τότε η απομάκρυνση θα πάρει την τιμή $+A$ σε χρόνο $\frac{T}{4}$.

Στην περίπτωση της **απομάκρυνσης και της επιτάχυνσης** μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης έχουμε:

$$x = A\eta\mu(\omega t) \text{ και } a = -\alpha_{max}\eta\mu(\omega t) \Rightarrow a = \alpha_{max}\eta\mu(\omega t + \pi)$$

Άρα η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο μεγεθών είναι $\Delta\phi = \pi$ και προηγείται η επιτάχυνση.

Η φυσική σημασία αυτής της διαφοράς φάσης είναι ότι όταν κάποια χρονική στιγμή η επιτάχυνση έχει μια ορισμένη τιμή, η απομάκρυνση θα πάρει την αντίστοιχη τιμή μετά από χρόνο Δt που αντιστοιχεί σε γωνία $\Delta\phi = \pi$, δηλαδή μετά από χρόνο που θα δίνεται από την σχέση:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2}$$

Άρα αν για παράδειγμα η ταχύτητα πάρει την τιμή $a = +\alpha_{max}/2$, τότε η απομάκρυνση θα πάρει την τιμή $+A/2$ σε χρόνο $\frac{T}{2}$.

Γενικά λέμε ότι δύο αρμονικά μεταβαλλόμενα μεγέθη δεν έχουν διαφορά φάσης όταν παίρνουν ταυτόχρονα τις μέγιστες και τις ελάχιστες τιμές τους.

1.2.4 Η αναπαράσταση του περιστρεφόμενου διανύσματος

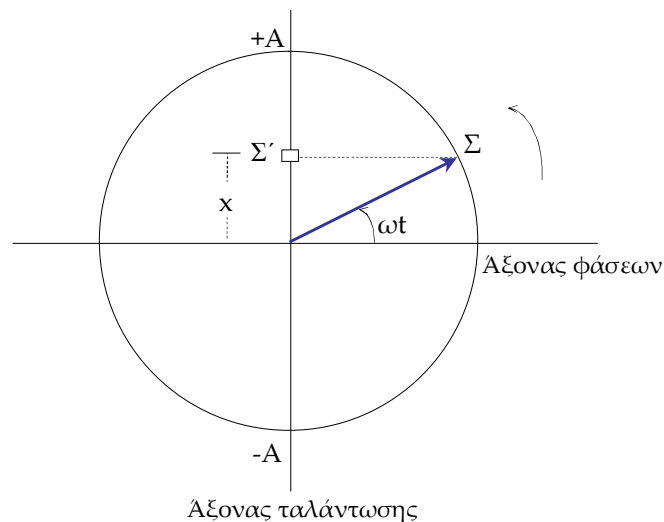
Μια ακόμα έξυπνη μέθοδος για την επίλυση ασκήσεων στην απλή αρμονική ταλάντωση. Θα αποδείξουμε την φράση: **Όταν ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση τότε η προβολή του πάνω σε μια διάμετρο της κίνησης εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.**

Από το σχήμα (1.9) έχουμε ότι:

$$(OS') = (OS) \eta\mu(\phi) \Rightarrow x = \eta\mu(\omega t)$$

αφού βέβαια ισχύει ότι $\phi = \omega t$ για το σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ω την γωνιακή ταχύτητα του.

Άρα για κάθε σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα μήκος A και γωνιακής ταχύτητας ω . Παράλληλα σε κάθε τεταρτημόριο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε και την ταχύτητα του σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με βάση το πρόσημο του $\sin(\phi)$. Η μέθοδος του περιστρεφόμενου διανύσματος είναι αρκετά χρήσιμη στον υπολογισμό της αρχικής φάσης ϕ_0 .



Σχήμα 1.9: η αναπαράσταση του περιστρεφόμενου διανύσματος

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 1.162 - 1.165, 1.169, 1.191, 1.192, 1.194, 1.196, 1.197, 1.198, 1.200, 1.203, 1.33 - 1.70, 1.83 - 1.98, 1.101 - 1.108

1.2.5 Κρούση και Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Σε πολλά προβλήματα εμφανίζεται το φαινόμενο της Κρούσης ανάμεσα σε σώματα που εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση μετά ή πριν την κρούση. Ας εισάγουμε την βασική ιδέα της Κρούσης για μια γρήγορη εφαρμογή σε προβλήματα Ταλαντώσεων. **Η κρούση θα παρουσιαστεί αναλυτικά στο τελευταίο κεφάλαιο της ύλης, άρα εδώ θα μείνουμε στις κύριες ιδέες.**

Έστω ότι δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ αντίστοιχα. Ταυτόχρονα υποθέτουμε ότι η διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή. Παρατηρούμε δύο βασικές κατηγορίες κρούσεων.

Ανελαστική Κρούση είναι η περίπτωση κρούσης κατά την οποία έχουμε απώλειες ενέργειας, λόγω ανελαστικών δυνάμεων ή δυνάμεων πλαστικής παραμόρφωσης που ασκούνται κατά την διάρκεια της κρούσης. Αν μετά την κρούση οι νέες ταχύτητες των σωμάτων είναι $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$, αντίστοιχα τότε θα ισχύει η **Αρχή Διατήρησης της Ορμής** και της ενέργειας του συστήματος. Δηλαδή:

$$\vec{P}_{ολ(αρχ)} = \vec{P}_{ολ(τελ)} \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \quad (1.33)$$

και

$$E_{ολ(αρχ)} = E_{ολ(τελ)} \Rightarrow K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2 + E_{απωλ} \quad (1.34)$$

όπου $E_{\alpha\pi\omega\lambda}$ οι απώλειες ενέργειας λόγω της ανελαστικής παραμόρφωσης ή της θερμότητας. Σε αυτή την περίπτωση δεν διατηρείται σταθερή η Κινητική Ενέργεια του συστήματος των σωμάτων ($K_{ολ(αρχ)} > K_{ολ(τελ)}$)

Στην περίπτωση ανελαστικής κρούσης που αμέσως μετά την κρούση προκύπτει συσσωμάτωμα η κρούση θα λέγεται **Πλαστική Κρούση** και θα ισχύουν πάλι οι παραπάνω εξισώσεις.

Ελαστική Κρούση είναι η περίπτωση κρούσης κατά την οποία διατηρείται σταθερή η Κινητική Ενέργεια του συστήματος καθώς και η Ορμή του. Αν μετά την κρούση οι νέες ταχύτητες των σωμάτων είναι $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$, αντίστοιχα τότε θα ισχύει η σχέση (1.33) και η διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας του συστήματος:

$$K_{ολ(αρχ)} = K_{ολ(τελ)} \Rightarrow K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2 \quad (1.35)$$

Και στις δύο περιπτώσεις κρούσης ισχύει η Αρχή της Διατήρησης της Ορμής για το σύστημα των σωμάτων. **Για την επίλυση κάθε προβλήματος κρούσης με απλή αρμονική ταλάντωση ακολουθούμε τα ακόλουθα βήματα:**

- 1ο:** Σχεδιάζουμε το σώμα που εκτελεί α.α.τ. στην θέση ισορροπίας του (αν υπάρχει ελατήριο το σχεδιάζουμε στην θέση φυσικού μήκους του)
- 2ο:** Σχεδιάζουμε τις θέσεις των σωμάτων αμέσως πριν την κρούση και αμέσως μετά την κρούση και υπολογίζουμε τις ταχύτητες πριν την κρούση εφόσον δεν μας είναι γνωστές με την χρήση μεθόδων που αναλύσαμε παραπάνω (π.χ. αν γνωρίζουμε την απομάκρυνση x από την θέση ισορροπίας πριν την κρούση βρίσκουμε την ταχύτητα με την βοήθεια της Ενέργειας στην α.α.τ.)
- 3ο:** Λύνουμε το σύστημα που προκύπτει από τις σχέσεις (1.33), (1.35) αν έχουμε ελαστική κρούση και βρίσκουμε την ταχύτητα του ταλαντούμενου σώματος μετά την κρούση. Αν η κρούση είναι πλαστική ή ανελαστική εφαρμόζουμε την (1.33) και βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος.
- 4ο:** Υπολογίζουμε την Ενέργεια του ταλαντούμενου συστήματος μετά την κρούση με την χρήση της Διατήρησης της Ενέργειας μετά την κρούση $E' = K' + U'$.
- 5ο:** Υπολογίζουμε το νέο πλάτος της ταλάντωσης A' από την νέα Ενέργεια E'

Προσοχή γιατί υπάρχουν περιπτώσεις προβλημάτων που αλλάζει η θέση ισορροπίας του ταλαντούμενου συστήματος αμέσως μετά την κρούση με συνέπεια να αλλάζει και το πρόβλημα που μελετούμε. Οι περιπτώσεις αυτές είναι εκείνες της πλαστικής κρούσης σε κατακόρυφο ή κεκλιμένο σύστημα ελατηρίου - μάζας. Στην περίπτωση αυτή σχεδιάζουμε την νέα θέση ισορροπίας μετά την κρούση, για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε στο 4ο και 5ο βήμα.

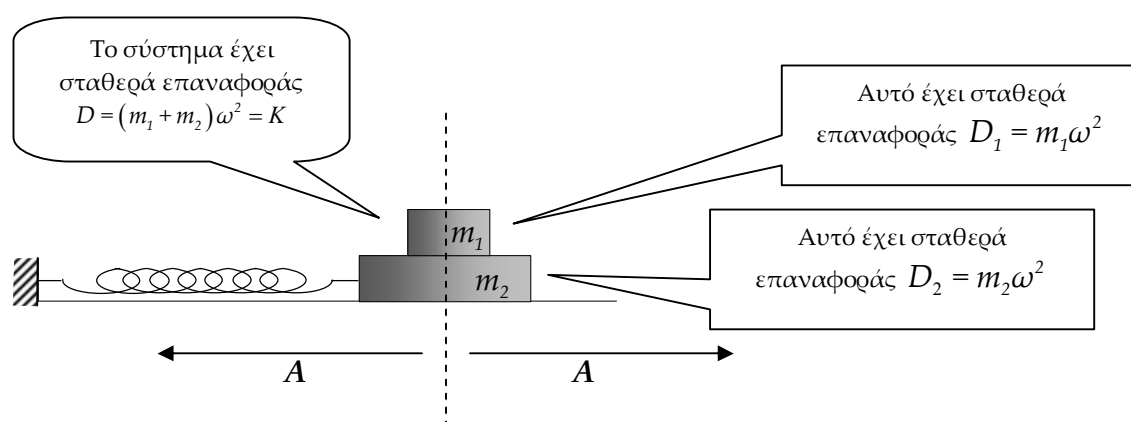
Τέλος στα προβλήματα που μετά την κρούση δημιουργείται συσσωμάτωμα (Πλαστική Κρούση) αλλάζει και η γωνιακή συχνότητα ω , άρα και η περίοδος της ταλάντωσης.

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Α τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 2.136, 2.138, 2.139, 2.140, 2.141, 2.143, 2.145, 2.146, 2.148, 2.149, 2.150, 2.151, 2.153, 2.154, 2.155, 2.156, 2.158, 2.159, 2.160

1.2.6 Σώματα που βρίσκονται σε επαφή και εκτελούν α.α.τ.

Όταν δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 βρίσκονται σε επαφή και εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση ταυτόχρονα, τότε έχουν κοινή γωνιακή συχνότητα $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Η συχνότητα ω υπολογίζεται από την σχέση:

$$D = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{D}{m_1 + m_2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m_1 + m_2}}$$



Το κάθε σώμα έχει την δική του σταθερά επαναφοράς D_1, D_2 που την υπολογίζουμε από τις σχέσεις:

$$D_1 = m_1\omega^2, D_2 = m_2\omega^2$$

Αν το σύστημα που εκτελεί την απλή αρμονική ταλάντωση είναι δεμένο σε ελατήριο, τότε η σταθερά επαναφοράς είναι $D = k$

Όταν ένα σώμα είναι σε επαφή με μια επιφάνεια (ή με ένα άλλο σώμα), δέχεται από την επιφάνεια δύναμη N . **Στην οριακή περίπτωση που $N = 0$ το σώμα χάνει την επαφή με την επιφάνεια.**

1.3 Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

1.3.1 Το κύκλωμα L - C

Διαθέτουμε ένα κύκλωμα που περιλαμβάνει ένα πυκνωτή χωρητικότητας C , ένα ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L και ένα διακόπτη Δ συνδεδεμένα σε σειρά. Αν

1.4 Φθίνουσες Ταλαντώσεις

1.4.1 Μηχανικές Ταλαντώσεις

Οι ταλαντώσεις των οποίων το πλάτος μειώνεται με τον χρόνο και τελικά μηδενίζεται λέγονται **Φθίνουσες ή Αποσβεννύμενες**. Όλες οι ταλαντώσεις στην φύση είναι φθίνουσες, γιατί καμία κίνηση δεν είναι απαλλαγμένη από τριβές και αντιστάσεις. Η απόσβεση (δηλαδή η ελάττωση) του πλάτους μιας ταλάντωσης οφείλεται στις δυνάμεις που αντιτίθενται στην κίνηση του. Επειδή αυτές οι δυνάμεις είναι αντίθετες με την ταχύτητα, παράγουν συνεχώς αρνητικό έργο με αποτέλεσμα να μεταφέρουν συνεχώς ενέργεια από το ταλαντούμενο σύστημα στο περιβάλλον. Έτσι η ολική ενέργεια του συστήματος με την πάροδο του χρόνου ελαττώνεται και το πλάτος της ταλάντωσης, που εξαρτάται από την ολική ενέργεια μειώνεται.

Γενικά οι δυνάμεις που προκαλούν μείωση του πλάτους δεν είναι εύκολο να προσδιοριστούν. Μια περίπτωση με μεγάλο ενδιαφέρον είναι η περίπτωση της δύναμης που είναι ανάλογη και αντίθετη της ταχύτητας.

$$F' = -bv \quad (1.62)$$

Μια τέτοια δύναμη είναι η δύναμη αντίστασης που ασκείται σε μικρά αντικείμενα που κινούνται μέσα στο νερό ή στον αέρα.

Στην περίπτωση αυτή ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα θα έχει την παρακάτω μορφή:

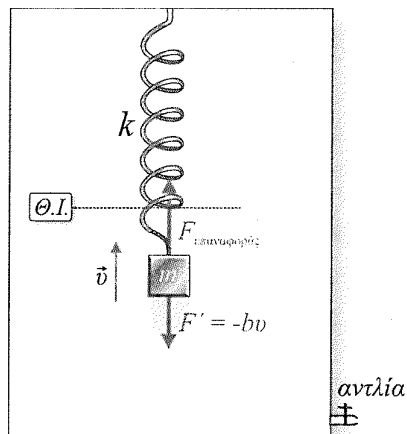
$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow -Dx - bv = m\alpha \quad (1.63)$$

Η σταθερά αναλογίας b είναι μια θετική ποσότητα που ονομάζεται **σταθερά απόσβεσης** και εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου καθώς και από το σχήμα και το μέγεθος του αντικειμένου που κινείται. Η μονάδας μέτρησης στο $S.I.$ είναι το $1kg/s$. Από την μορφή της δύναμης είναι εμφανές ότι ο ρυθμός μείωσης του πλάτους της ταλάντωσης θα εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς b . Όσο μεγαλύτερη είναι, τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η μείωση του πλάτους σε κάθε περίοδο.

Χρησιμοποιώντας την διάταξη του διπλανού σχήματος και για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης, παίρνουμε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις, στις οποίες αποδίδεται η απομάκρυνση x σε συνάρτηση με τον χρόνο για μηδενική, μικρή, μεσαία και μεγάλη απόσβεση.

Τα βασικά συμπεράσματα που προκύπτουν είναι:

- Το πλάτος της ταλάντωσης είναι **φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου**. Το πόσο γρήγορα μειώνεται το πλάτος εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης b . Όταν η



Σχήμα 1.14: Η αύξηση της πυκνότητας αέρα έχει σαν αποτέλεσμα μείωση του πλάτους

σταθερά απόσβεσης μεγαλώνει, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα. **Στις ακραίες περιπτώσεις που η σταθερά b παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, η κίνηση γίνεται απεριοδική**, δηλαδή ο ταλαντωτής επιστρέφει στην θέση ισορροπίας του και μένει εκεί.

- **Η περίοδος** για ορισμένη τιμή της σταθεράς b , διατηρείται σταθερή και ανεξάρτητη από το πλάτος. Όταν η σταθερά b μεγαλώνει, η περίοδος παρουσιάζει μια μικρή αύξηση που, στα πλαίσια του σχολικού βιβλίου θα θεωρούμε αμελητέα.

Η εκθετική μείωση του πλάτους Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \quad (1.64)$$

όπου A_0 είναι το πλάτος της ταλάντωσης την χρονική στιγμή $t = 0$ και $\Lambda = \frac{b}{2m}$ είναι μια θετική σταθερά. Η μονάδα μέτρησης της σταθεράς Λ στο $S.I.$ είναι το s^{-1} .

Χρόνος Υποδιπλασιασμού ή ημισείας ζωής του πλάτους Από την σχέση (1.64) προκύπτει ότι για την μείωση του πλάτους κατά 50% απαιτείτε πάντοτε το ίδιο χρονικό διάστημα $t_{1/2}$ που ονομάζεται χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους.

Αν θέσουμε στην σχέση $A = \frac{A_0}{2}$ τότε βρίσκουμε τον χρόνο $t_{1/2}$:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow 2 = e^{\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow \ln 2 = \Lambda t_{1/2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Lambda} \quad (1.65)$$

Άρα ο χρόνος υποδιπλασιασμού είναι ανεξάρτητος του αρχικού πλάτους της ταλάντωσης, εξαρτάται αποκλειστικά από την σταθερά Λ .

Η εκθετική μείωση της μέγιστης απομάκρυνσης Οι μέγιστες απομακρύνσεις προς την ίδια κατεύθυνση μειώνονται εκθετικά με τον χρόνο. Δηλαδή ισχύει η σχέση:

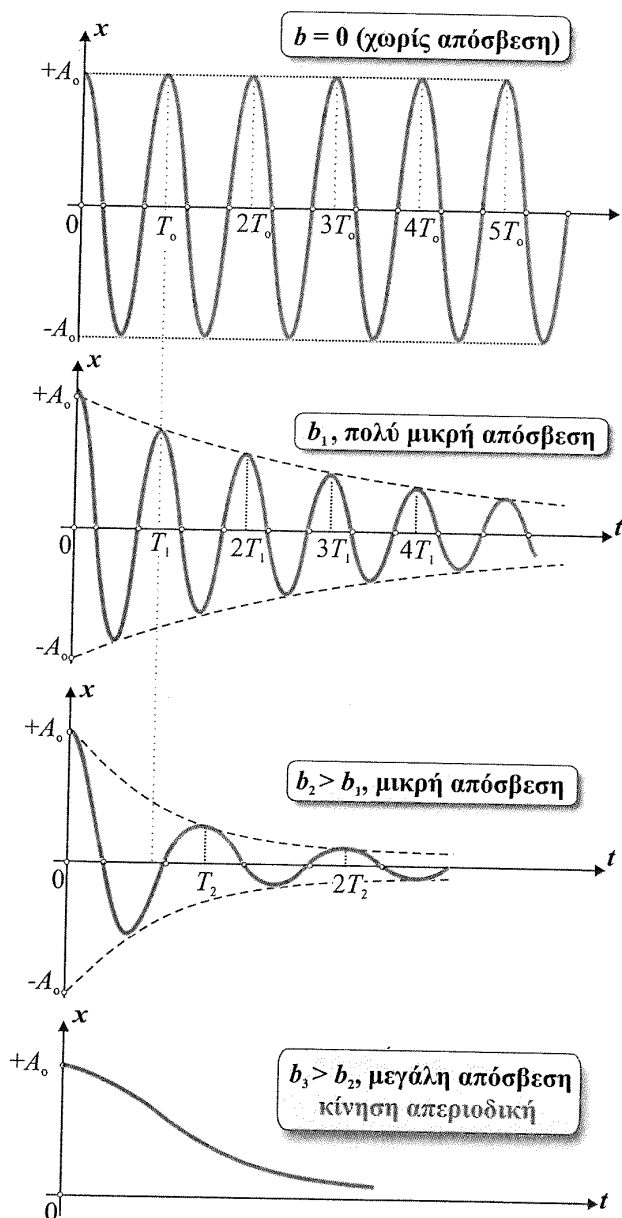
$$A_\kappa = A_0 e^{-\Lambda t}, \quad t = \kappa T, \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο λόγος δύο διαδοχικών μεγίστων απομακρύνσεων, προς την ίδια κατεύθυνση, διατηρείται σταθερός. Δηλαδή, ισχύει:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_\kappa}{A_{\kappa+1}} = \sigma \tau \alpha \theta. \quad (1.66)$$

Απόδειξη: Επιλέγοντας τις χρονικές στιγμές $t_1 = \kappa T$ και $t_2 = (\kappa + 1)T$ βρίσκουμε:

$$\frac{A_\kappa}{A_{\kappa+1}} = \frac{A_0 e^{-\Lambda(\kappa T)}}{A_0 e^{-\Lambda(\kappa T + T)}} = e^{\Lambda T} = \sigma \tau \alpha \theta.$$

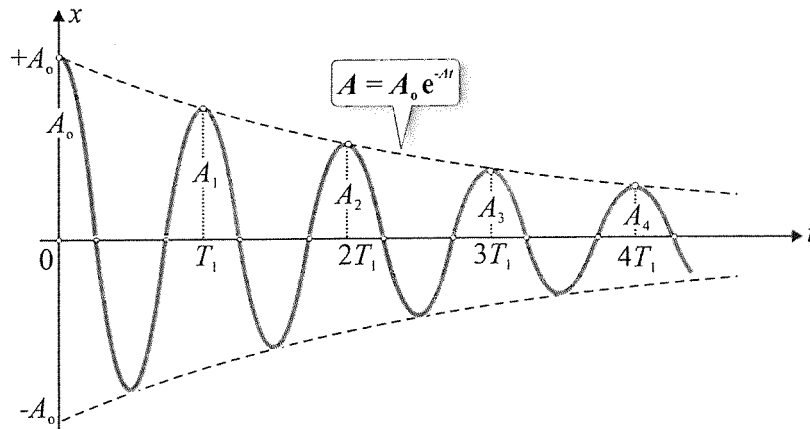


Σχήμα 1.15: Φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις

Η ενέργεια στην φθίνουσα μηχανική ταλάντωση μειώνεται και αυτή εκθετικά με τον χρόνο και θα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}D(A_0e^{-\Lambda t}) \Rightarrow E = \frac{1}{2}DA_0^2e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E = E_0e^{-2\Lambda t} \quad (1.67)$$

Αντίστοιχα με τον λόγο των διαδοχικών πλατών, αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι ισχύει η σχέση:



Σχήμα 1.16: Η εκθετική μείωση του πλάτους και της μέγιστης απομάκρυνσης

$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_2}{E_3} = \dots = \frac{E_{\kappa}}{E_{\kappa+1}} = \sigma \tau \alpha \theta. \quad (1.68)$$

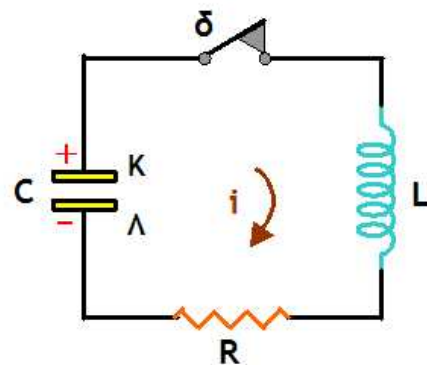
Ο ρυθμός απώλειας Ενέργειας θα δίνεται από την ισχύ της δύναμης απόσβεσης σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\frac{dE}{dt} = F'v = -bv^2 \quad (1.69)$$

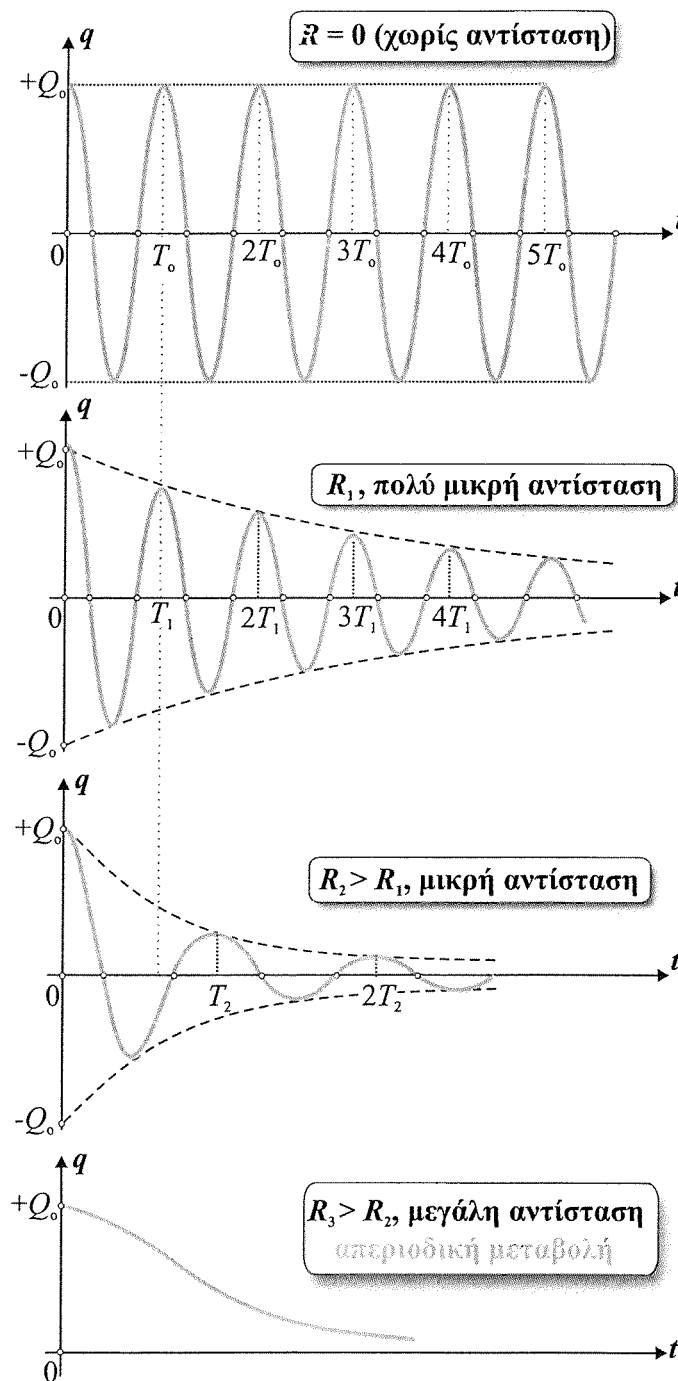
1.4.2 Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

Σε ένα κύκλωμα $L - C$ για να είναι η ηλεκτρική ταλάντωση αμείωτη, δεν πρέπει να υπάρχει απώλεια ενέργειας, κάτι που πρακτικά είναι αδύνατο. Οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις είναι φθίνουσες. Το πλάτος της έντασης του ρεύματος καθώς και το μέγιστο φορτίο στον πυκνωτή διαρκώς μικραίνουν και τελικά το κύκλωμα παύει να ταλαντώνεται.

Στην περίπτωση των ηλεκτρικών ταλαντώσεων, ο κύριος λόγος της απόσβεσης είναι η ωμική αντίσταση R , η οποία παίζει για το κύκλωμα τον ίδιο ακριβώς ρόλο που παίζει για τον αρμονικό ταλαντωτή η σταθερά απόσβεσης b . Μόλις κλείσουμε τον διακόπτη, ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα. Η ωμική αντίσταση μετατρέπει βαθμιαία την ηλεκτρική ενέργεια σε θερμότητα *Joule*, με αποτέλεσμα η ολική ενέργεια και κατά συνέπεια το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή διαρκώς να μειώνεται και τελικά να μηδενίζεται. Μεταβάλλοντας την ωμική αντίσταση R , μπορούμε να λάβουμε



τις γραφικές παραστάσεις του φορτίου q του πυκνωτή σε συνάρτηση με τον χρόνο t για μηδενική, μικρή, μεσαία και πολύ μεγάλη ωμική αντίσταση.



Σχήμα 1.17: Φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις

Τα βασικά συμπεράσματα που προκύπτουν από τις γραφικές είναι:

- Ο ρυθμός μείωσης του μέγιστου φορτίου εξαρτάται από την αντίσταση R και, όταν η αντίσταση μεγαλώνει, το μέγιστο φορτίο μειώνεται πιο γρήγορα.
- **Η περίοδος**, για ορισμένη ποσότητα της αντίστασης, διατηρείται σταθερή και ανεξάρτητη από το μέγιστο φορτίο στον πυκνωτή. Η περίοδος της ταλάντωσης μεγαλώνει όταν μεγαλώνει η αντίσταση. Η αύξηση όμως αυτή μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.
- Αν η τιμή της αντίστασης υπερβεί κάποιο όριο η ταλάντωση γίνεται απεριοδική.

Η εκθετική μείωση του μέγιστου φορτίου του πυκνωτή Αποδεικνύεται ότι η μεταβολή του μέγιστου φορτίου σε συνάρτηση με τον χρόνο θα δίνεται από την σχέση:

$$Q = Q_0 e^{-\Lambda t} \quad (1.70)$$

όπου Q_0 είναι το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή την χρονική στιγμή $t = 0$ και η σταθερά $\Lambda = \frac{R}{2L}$ με R την ωμική αντίσταση του κυκλώματος και L τον συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου. Η παραπάνω σχέση είναι σε πλήρη αντιστοιχία με την σχέση για το πλάτος της μηχανικής ταλάντωσης.

Από την παραπάνω σχέση και σε πλήρη αντιστοιχία με τις φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις, αποδεικνύεται η σχέση:

$$\frac{Q_0}{Q_1} = \frac{Q_1}{Q_2} = \dots = \frac{Q_\kappa}{Q_{\kappa+1}} = \sigma \tau \alpha \theta. \quad (1.71)$$

Η ενέργεια στην φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση μειώνεται και αυτή εκθετικά με τον χρόνο ακριβώς όπως και στην περίπτωση των μηχανικών ταλαντώσεων. Επίσης το ποσό θερμότητας (Q_R) που εκλύεται στον αντιστάτη είναι ίσο με την μείωση της ενέργειας του κυκλώματος και δίνεται:

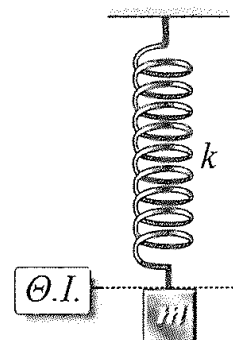
$$Q_R = E_0 - E_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (1.72)$$

Πρόταση Μελέτης: Λύσε από τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 6.1 - 6.38, 6.50, 6.51, 6.52, 6.53, 6.55, 6.56, 6.58, 6.60, 6.61, 6.62, 6.63, 6.65, 6.66, 6.67, 6.68, 6.70

1.5 Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

1.5.1 Μηχανικές Ταλαντώσεις

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα σύστημα ελατηρίου - μάζας. Αν η μάζα απομακρυνθεί από την θέση ισορροπίας της προς τα κάτω κατά A και αφεθεί ελεύθερη, το σύστημα να εκτελέσει κατακόρυφη ταλάντωση. Αν δεν υπάρχουν αντιστάσεις, η ταλάντωση θα είναι αμείωτη, με συχνότητα:



$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.73)$$

Όμως στην πραγματικότητα η ταλάντωση θα είναι φθίνουσα. Η συχνότητα της θα είναι λίγο μικρότερη από την f_0 (στην πράξη μπορεί να θεωρηθεί περίπου ίση με την f_0). Μια τέτοια ταλάντωση ονομάζεται **ελεύθερη ταλάντωση**.

Η συχνότητα f_0 με την οποία πραγματοποιείται μια ελεύθερη ταλάντωση, ονομάζεται **ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης**.

Μια χρήσιμη παρατήρηση (εκτός ύλης) Θεωρητικά η συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης f_ϕ είναι μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_0 και αυτό επιβεβαιώνεται από την σχέση:

$$\omega_\phi = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

η οποία ισχύει όταν στο σύστημα ενεργεί μια δύναμη αντίστασης της μορφής $F' = -bv$. Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση γενικά $\omega_\phi < \omega_0$ ή $f_\phi < f_0$. Στην περίπτωση όμως που η σταθερά b είναι πολύ μικρή (σχολικό βιβλίο) τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $f_\phi = f_0$.

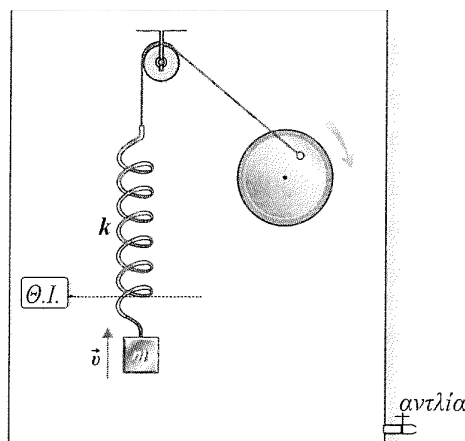
Αν θέλουμε να διατηρείται σταθερό το πλάτος της ταλάντωσης, πρέπει να ασκήσουμε στο σύστημα μια περιοδική εξωτερική δύναμη (π.χ. $F_\delta = F_0 \eta \mu(\omega_\delta t + \phi)$). Αυτή την δύναμη την ονομάζουμε **διεγείρουσα δύναμη**. Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα σε αυτή την περίπτωση θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow -bv - Dx + F_\delta = m\alpha \quad (1.74)$$

Θεωρούμε την διάταξη του διπλανού σχήματος, όπου το ελατήριο είναι δεμένο με σχοινί το άλλο άκρο είναι δεμένο σε ένα τροχό, ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται. Η περιστροφή του τροχού αναγκάζει το σώμα να εκτελεί κατακόρυφη ταλάντωση με συχνότητα η οποία συμπίπτει με την συχνότητα περιστροφής του τροχού. Η ταλάντωση αυτή ονομάζεται **εξαναγκασμένη**. Δηλαδή:

Εξαναγκασμένη Ταλάντωση ονομάζεται η ταλάντωση ενός συστήματος, όταν σε αυτό ασκείται **εξωτερική περιοδική δύναμη**, με αποτέλεσμα το πλάτος της ταλάντωσης να παραμένει σταθερό.

Ο τροχός με την περιοδική δύναμη που ασκεί ονομάζεται διεγέρτης. Η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι ίδια με την συχνότητα του διεγέρτη (f_δ) και όχι



η ιδιοσυχνότητα του συστήματος (f_0). Δηλαδή **στην εξαναγκασμένη ταλάντωση ο διεγέρτης επιβάλλει στην ταλάντωση την συχνότητα του.**

Καμπύλες Συντονισμού

Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης A εξαρτάται από την συχνότητα f_δ του διεγέρτη. Συγκεκριμένα, αν μεταβληθεί η συχνότητα f_δ του διεγέρτη μεταβάλλεται και το πλάτος της εκτελούμενης ταλάντωσης. Οι τιμές του πλάτους είναι γενικά μικρές, εκτός και αν η συχνότητα του διεγέρτη πλησιάζει στην ιδιοσυχνότητα f_0 , οπότε το πλάτος παίρνει μεγάλες τιμές και γίνεται μέγιστο, όταν η συχνότητα f_δ γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα. Τότε λέμε ότι έχουμε **συντονισμό**.

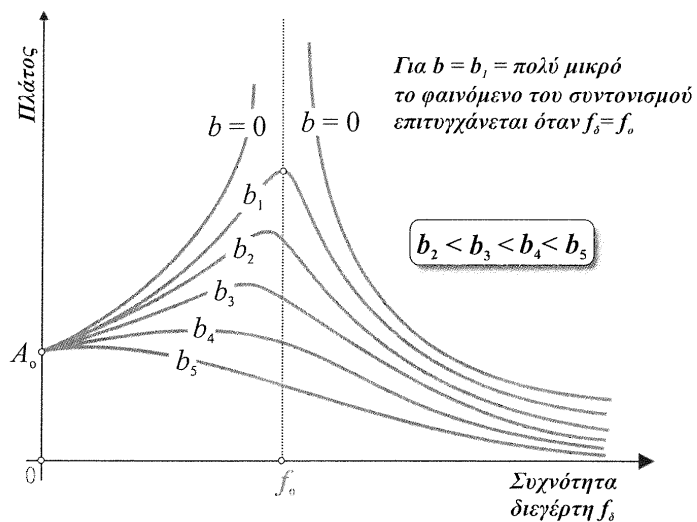
Συντονισμός ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο για μια ορισμένη συχνότητα του διεγέρτη, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ενός συστήματος γίνεται μέγιστο.

Στην περίπτωση που μια ταλάντωση δεν έχει απώλειες ενέργειας ($b = 0$), όταν $f_\delta = f_0$, το πλάτος γίνεται θεωρητικά άπειρο. Στην πράξη όμως αυτό είναι αδύνατο γιατί πάντα υπάρχουν (έστω και μικρές) απώλειες ενέργειας.

Για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης (b), το πλάτος παίρνει μια πεπερασμένη μέγιστη τιμή που εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς απόσβεσης. Ταυτόχρονα ο συντονισμός συμβαίνει όταν η συχνότητα f_δ του διεγέρτη είναι λίγο μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_0 . Οι **Καμπύλες συντονισμού** αποτυπώνουν με τον καλύτερο τρόπο τα παραπάνω.

Ενεργειακή προσέγγιση

Στις ελεύθερες ταλαντώσεις, κατά την διέγερση του συστήματος δίνεται σ' αυτό κάποια μηχανική ενέργεια, η οποία διατηρείται σταθερή, αν η ταλάντωση είναι αμείωτη, ή μετατρέπεται σε θερμότητα αν η ενέργεια είναι φθίνουσα. Στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, στο σύστημα προσφέρεται περιοδικά ενέργεια με συχνότητα F_δ , μέσω της διεγείρουσας δύναμης. Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται η ενέργεια στο σύστημα (Ισχύς της F_δ) αντισταθμίζει τον ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω τριβών και αντιστάσεων (Ισχύς της F') και έτσι το πλάτος παραμένει σταθερό. Ο τρόπος με τον οποίο το ταλαντούμενο σύστημα απορροφά την ενέργεια είναι "εκλεκτικός" και έχει να κάνει με την συχνότητα που του προσφέρεται. Κατά τον συντονισμό, η ενέργεια μεταφέρεται στο σύστημα με βέλτιστο τρόπο, γι' αυτό και το πλάτος



Σχήμα 1.18: Καμπύλες συντονισμού πλάτους

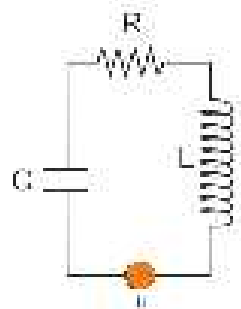
είναι μέγιστο. Λέγοντας βέλτιστο τρόπο, εννοούμε ότι κατά τον συντονισμό η κατεύθυνση της εξωτερικής διεγείρουσας δύναμης ($F_{εξ}$) ταυτίζεται με την κατεύθυνση της ταχύτητας v του συστήματος. Να σημειωθεί ότι στην εξαναγκασμένη ταλάντωση μόνο κατά τον συντονισμό $E = K_{max} = U_{max}$, για μια τυχαία συχνότητα διεγέρτη οι μέγιστες τιμές των ενεργειών διαφέρουν.

1.5.2 Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

Αν ένα κύκλωμα $L - C$ διεγερθεί (π.χ. με φόρτιση του πυκνωτή από πηγή συνεχούς τάσης) εκτελεί **ελεύθερη ηλεκτρική ταλάντωση** με συχνότητα:

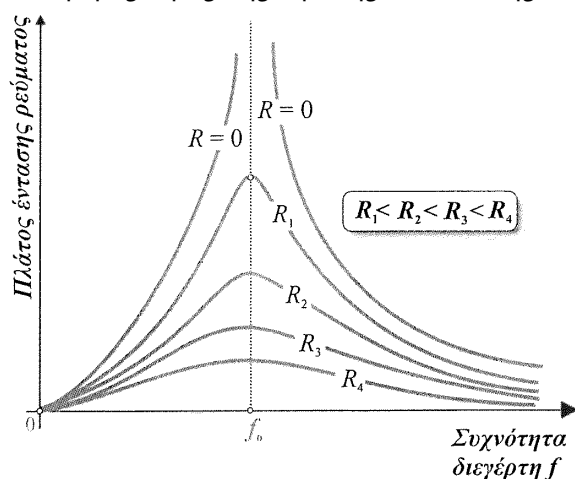
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (1.75)$$

Αν το κύκλωμα δεν παρουσιάζει αντίσταση (ιδανικό κύκλωμα $L - C$), τότε η ταλάντωση είναι αμείωτη. Αν, όμως αντίσταση στο κύκλωμα δεν είναι αμελητέα ($R \neq 0$), η ταλάντωση είναι φθίνουσα με συχνότητα ελαφρώς μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_0 του κυκλώματος (πρακτικά περίπου ίση για το σχολικό βιβλίο). Όπως και στις φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις, έτσι και εδώ το κύκλωμα μπορεί να εκτελέσει εξαναγκασμένη ταλάντωση. Ως διεγέρτης μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια **πηγή εναλλασσόμενης τάσης**, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Τότε, το κύκλωμα διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα με συχνότητα f , ίδια με της εναλλασσόμενης τάσης. Αν μεταβάλουμε την συχνότητα της τάσης, το πλάτος της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος μεταβάλλεται και παίρνει την μέγιστη τιμή του, όταν η συχνότητα f γίνεται ακριβώς ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του κυκλώματος $L - C$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **το κύκλωμα $L - C$ βρίσκεται σε συντονισμό**. Στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος παριστάνεται το πλάτος I της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με την συχνότητα f , για διάφορες τιμές της ωμικής αντίστασης R .

Παρατηρούμε ότι οι **καμπύλες συντονισμού** είναι αντίστοιχες με εκείνες των μηχανικών εξαναγκασμένων ταλαντώσεων. Αυτό όμως που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι καθώς η ωμική αντίσταση R αυξάνεται, το πλάτος της έντασης του ρεύματος I μειώνεται, αλλά η συχνότητα για την οποία συμβαίνει η μεγιστοποίηση του πλάτους της έντασης του ρεύματος δεν μετατοπίζεται προς μικρότερες τιμές, αλλά παραμένει πάντα ίδια με την ιδιοσυχνότητα f_0 του κυκλώματος.



Σχήμα 1.19: Καμπύλες συντονισμού πλάτους ρεύματος

Βασική **εφαρμογή του συντονισμού στις εξαναγκασμένης ηλεκτρικές ταλαντώσεις** είναι το φαινόμενο “πίσω” από την επιλογή ραδιοφωνικού σταθμού στο ραδιόφωνο. Η επιλογή βασίζεται στον συντονισμό του κυκλώματος $L - C$ του ραδιοφώνου με τα ραδιοφωνικά κύματα. Μεταβάλλοντας την συχνότητα στο ραδιόφωνο μας μεταβάλλουμε την χωρητικότητα ενός πυκνωτή στο εσωτερικό του, άρα και την ιδιοσυχνότητα f_0 μέχρι να “συντονιστούμε” με την συχνότητα f του σταθμού και να ακούσουμε καθαρά την ένταση του σήματος.

Πρόταση Μελέτης: Λύσε από τον **Α τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** 7.1 - 7.29, 7.33-7.37, 7.39, 7.40-7.43

1.6 Σύνθεση Ταλαντώσεων

Ένα σώμα μπορεί να εκτελεί ταυτόχρονα δυο αρμονικές ταλαντώσεις, οι οποίες μπορεί να έχουν οποιαδήποτε διεύθυνση. Το αποτέλεσμα είναι, γενικά, μια πολύπλοκη κίνηση, της οποίας η διεύθυνση, η συχνότητα, το πλάτος και η φάση εξαρτώνται από τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά των επιμέρους ταλαντώσεων. Η κίνηση που κάνει το σώμα ονομάζεται **σύνθετη ταλάντωση** και η μελέτη της **Σύνθεση ταλαντώσεων**. Στο παρόν μάθημα θα μελετήσουμε δύο περιπτώσεις σύνθετης ταλάντωσης.

Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια συχνότητα και γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο. Έστω ότι ένα σώμα Σ εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που:

- Εξελίσσονται πάνω στην ίδια ευθεία και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας,
- έχουν την ίδια γωνιακή συχνότητα ω και
- έχουν πλάτη A_1 και A_2 και διαφορά φάσης ϕ .

Οι εξισώσεις των απομακρύνσεων για τις δύο ταλαντώσεις θα είναι αντίστοιχα:

$$x_1 = A_1 \eta \mu(\omega t) \quad x_2 = A_2 \eta \mu(\omega t + \phi)$$

Σύμφωνα με την **Αρχή της Επαλληλίας των κινήσεων**, η απομάκρυνση του σώματος Σ **σε κάθε χρονική στιγμή** θα είναι το άθροισμα των απομακρύνσεων που προκαλεί σε αυτό κάθε ταλάντωση ξεχωριστά. Άρα θα είναι:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \eta \mu(\omega t) + A_2 \eta \mu(\omega t + \phi)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να πάρει την μορφή:

$$x = A \eta \mu(\omega t + \theta) \tag{1.76}$$

όπου

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\phi} \quad (1.77)$$

και

$$\epsilon\phi\theta = \frac{A_2\eta\mu\phi}{A_1 + A_2\cos\phi} \quad (1.78)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η κίνηση του Σώματος Σ είναι επίσης απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από το ίδιο σημείο, της ίδιας διεύθυνσης και της ίδιας συχνότητας με πλάτος A και διαφορά φάσης θ με την ταλάντωση με εξίσωση $x_1 = A_1\eta\mu(\omega t)$.

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν εύκολα να προκύψουν με την χρήση της Αναπαράστασης του περιστρεφόμενου διανύσματος για τις δύο ταλαντώσεις και την σύνθεση τους.

Ειδικές περιπτώσεις

- (α) Όταν είναι $\phi = 0$, τότε οι σχέσεις (1.77), (1.78) γράφονται:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} \\ \Rightarrow A = A_1 + A_2 \quad (1.79)$$

και

$$\epsilon\phi\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0\text{rad}$$

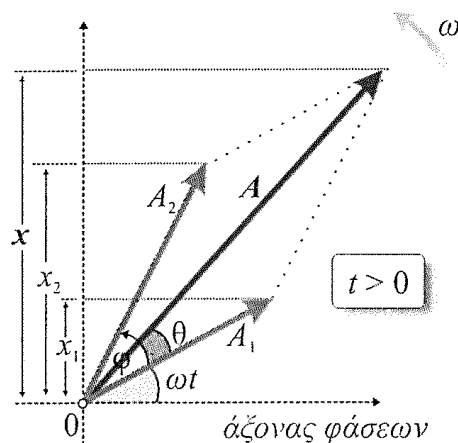
Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή το πλάτος A της ταλάντωσης είναι ίσο με το άθροισμα των πλάτων A_1, A_2 των επιμέρους ταλαντώσεων.

- (β) Όταν $\phi = \pi\text{rad}$, τότε η σχέση (1.77) γράφεται:

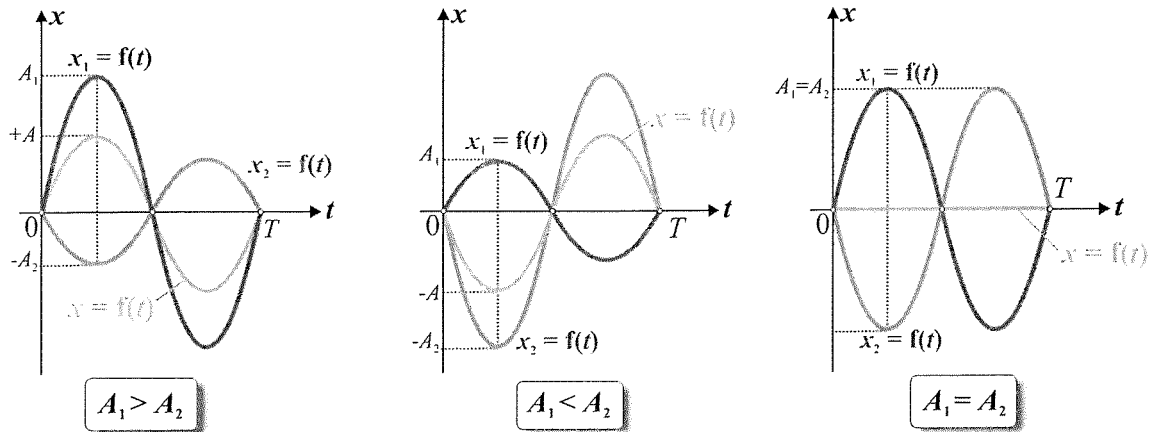
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} \Rightarrow A = |A_1 - A_2|$$

και η σχέση (1.78) δίνει $\theta = 0$ ή $\theta = \pi\text{rad}$.

Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση το πλάτος A της ταλάντωσης είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των επιμέρους πλάτων και η φάση είναι ίση με την φάση της ταλάντωσης που έχει το μεγαλύτερο πλάτος (δηλαδή $\theta = 0$, αν $A_1 > A_2$, και $\theta = \pi$, όταν είναι $A_1 < A_2$).



Σχήμα 1.20: Η σύνθεση με την βοήθεια της αναπαράστασης περιστρεφόμενου διανύσματος



Ενέργεια σύνθετης ταλάντωσης Με βάση τον ορισμό της ενέργειας και την σχέση για το πλάτος 1.77 προκύπτει εύκολα ότι η Ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση :

$$E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos \phi \quad (1.80)$$

όπου E_1, E_2 οι ενέργειες των δυο επιμέρους ταλαντώσεων.

Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που έχουν την ίδια διεύθυνση, γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο, με ίδιο πλάτος και διαφορετική συχνότητα. Έστω ότι ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που :

- Εξελίσσονται πάνω στην ίδια ευθεία και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας,
- έχουν το ίδιο πλάτος A και τους,
- οι γωνιακές συχνότητες τους ω_1 και ω_2 διαφέρουν λίγο μεταξύ τους.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν δύο τέτοιες ταλαντώσεις είναι αντίστοιχα :

$$x_1 = A \eta \mu(\omega_1 t) \quad x_2 = A \eta \mu(\omega_2 t)$$

Σύμφωνα με την **Αρχή της Επαλληλίας των κινήσεων**, η απομάκρυνση του σώματος Σ κάθε χρονική στιγμή θα είναι το άθροισμα των απομακρύνσεων που προκαλεί σε αυτό κάθε ταλάντωση ξεχωριστά. Άρα θα είναι :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \eta \mu(\omega_1 t) + A \eta \mu(\omega_2 t) = A(\eta \mu(\omega_1 t) + \eta \mu(\omega_2 t))$$

και με την χρήση της αντίστοιχης τριγωνομετρικής ταυτότητας προκύπτει ότι :

$$x = 2A \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \eta \mu \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \quad (1.81)$$

Επειδή όμως οι συχνότητες ω_1, ω_2 διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους, από την τελευταία σχέση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι :

- Ο παράγοντας

$$A' = 2A\sigma\nu\nu \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \quad (1.82)$$

μεταβάλλεται με τον χρόνο πολύ αργά σε σχέση με τον δεύτερο παράγοντα $\eta\mu \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right)$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να επιλέξουμε τον παράγοντα αυτό ως πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης, το οποίο μεταβάλλεται με αργό ρυθμό από $|A'| = 0$ μέχρι $|A'| = 2A$.

- Ο παράγοντας $\eta\mu \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right)$ μεταβάλλεται αρμονικά με τον χρόνο με γωνιακή συχνότητα $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \simeq \omega_1 \simeq \omega_2 \quad (1.83)$$

Επομένως η εξίσωση (1.81) γράφεται:

$$x = A' \eta\mu(\bar{\omega} t) \quad (1.84)$$

η παραπάνω σχέση περιγράφει μια **ιδιόμορφη ταλάντωση** που έχει την ίδια περίπου συχνότητα με τις επιμέρους ταλαντώσεις και πλάτος $|A'|$ που μεταβάλλεται, με αργό ρυθμό, από μηδέν μέχρι $2A$. Λέμε ότι η κίνηση του σώματος Σ παρουσιάζει **διακροτήματα**. Δηλαδή:

Διακρότημα ονομάζεται η ιδιόμορφη ταλάντωση που προκύπτει από την σύνθεση δυο αρμονικών ταλαντώσεων που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο και έχουν την ίδια διεύθυνση, το ίδιο πλάτος και οι συχνότητες τους διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους.

Ο χρόνος T_δ ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς (ή δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις) του πλάτους, ονομάζεται **Περίοδος του Διακροτήματος**.

Υπολογισμός της περιόδου του διακροτήματος Από την σχέση (1.82) προκύπτει ότι το πλάτος A' μηδενίζεται όταν:

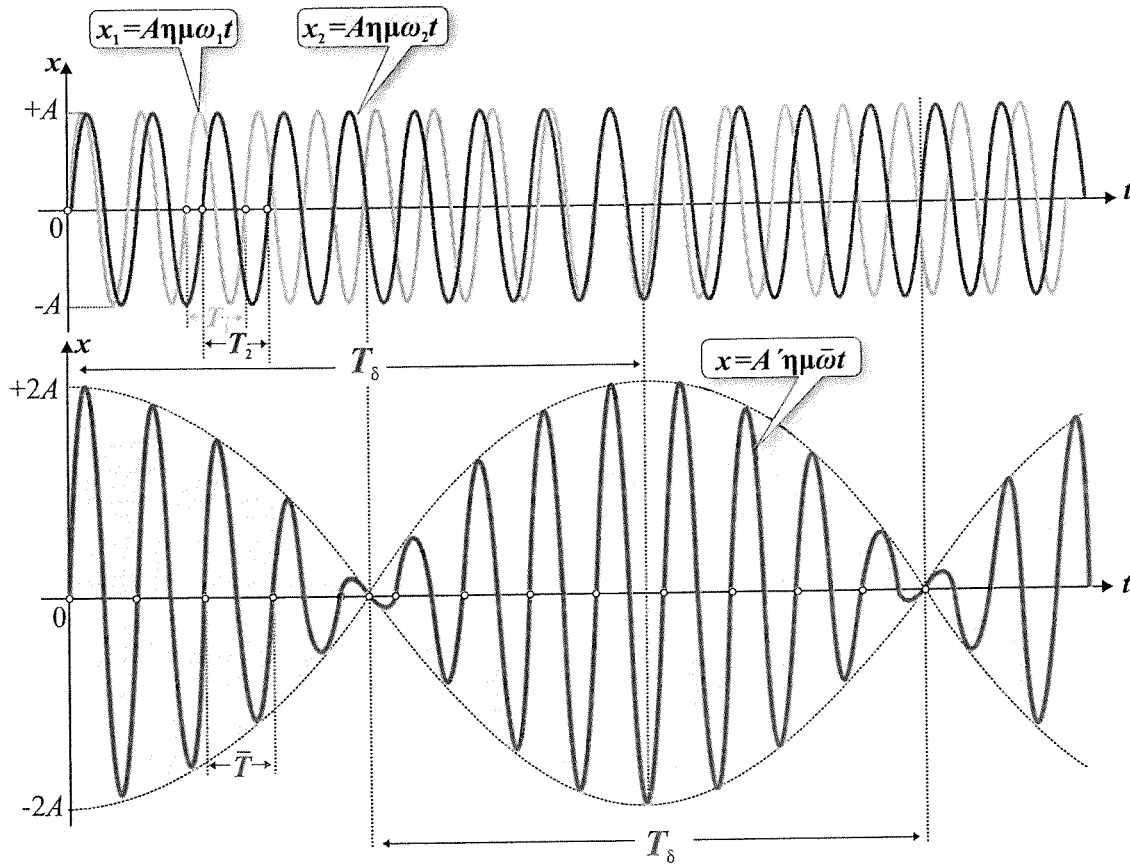
$$2A\sigma\nu\nu \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) = 0$$

$$\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2} t = (2\kappa + 1) \frac{\pi}{2}$$

όπου $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

Θέτοντας $\kappa = 0$ και $\kappa = 1$ στην τελευταία σχέση, μπορούμε να έχουμε δυο χρονικές στιγμές t_1 και t_2 που αντιστοιχούν σε δύο διαδοχικούς χρόνους μηδενισμού του πλάτους A' . Άρα από τον ορισμό της περιόδου διακροτήματος έχουμε:

$$T_\delta = t_2 - t_1 = \frac{3\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} - \frac{\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} \Rightarrow T_\delta = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{2\pi}{2\pi|f_1 - f_2|}$$



Σχήμα 1.21: Η σύνθεση δύο ταλαντώσεων με κοντινές συχνότητες

Άρα η περίοδος δια κροτήματος δίνεται από την σχέση:

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \quad (1.85)$$

και η συχνότητα του δια κροτήματος που εκφράζει τον αριθμό των διακροτημάτων ανά δευτερόλεπτο θα δίνεται από την σχέση:

$$f_\delta = \frac{1}{T_\delta} = |f_1 - f_2| \quad (1.86)$$