ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ι. Βασικές Σχέσεις Διανυσμάτων

Α) Ανάλυση Διανύσματος

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$
- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

Β) Μέσο ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ

- $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$

Γ) Συνευθειακά σημεία

- Α, Β, Γ συνευθειακά, αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \Re$: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.

Δ) Παραλληλόγραμμο

- Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο αν και μόνο αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

ΙΙ. Συντεταγμένες Διανυσμάτων

Α) Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$ και $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}})$

- Το μέσον Μ του ΑΒ έχει συντεταγμένες: $x_M = \dfrac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2}$, $y_M = \dfrac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2}$
- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})$
- $(\mathrm{AB}) = \sqrt{(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})^2}$

Β) Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$

- Συντελεστής Διεύθυνσης: $\lambda = \dfrac{y}{x}$, αν $x \neq 0$.
- Μέτρο: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

ΙΙΙ. Εσωτερικό Γινόμενο

Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$

Α) Τύποι Εσωτερικού Γινομένου

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$
- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

Β) Τύποι Γωνίας

- $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$
- $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

Γ) Ιδιότητα Προβολής

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}} \vec{\beta}$

ΙV. Παραλληλία Διανυσμάτων

- Έστω $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$
- $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$
- $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ (αν ορίζονται οι συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2)
- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$, για κάποιο $\lambda > 0$.
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$, για κάποιο $\lambda < 0$.

V. Καθετότητα Διανυσμάτων

- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

2. ΕΥΘΕΙΕΣ

- **Κλίση** ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$ και $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}})$: $\lambda = \dfrac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}}$
- **Εξίσωση** ευθείας που διέρχεται από το $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ και έχει κλίση λ: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$
- **Εξίσωση** κατακόρυφης ευθείας: $x = x_0$
- **Παράλληλες ευθείες** : $\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$,
- **Κάθετες ευθείες**: $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$,
  (αν ορίζονται οι συντελεστές λ)
- **Γενική Εξίσωση ευθείας**
  $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, με $\mathrm{A} \neq 0$ ή $\mathrm{B} \neq 0$
- **Κάθετο διάνυσμα:** $\vec{\eta} = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$
- **Παράλληλο διάνυσμα**: $\vec{\delta} = (\mathrm{B}, -\mathrm{A})$
- **Απόσταση Σημείου** $\mathrm{M}(x_0, y_0)$ από την ευθεία: $d(\mathrm{M}_0, \varepsilon) = \dfrac{\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \Gamma}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$,
- **Εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ**: $(\mathrm{AB\Gamma}) = \dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}})\right|$
- **Απόσταση ευθειών**: $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \dfrac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$

Παντελής Μπουμπούλης, M.Sc., Ph.D. math-gr.blogspot.com, bouboulis.mysch.gr

3. ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

I. ΚΥΚΛΟΣ

Ορισμός: Ο Γ.Τ. των σημείων που ισαπέχουν από το κέντρο Ο.

Α) Εξίσωση Κύκλου

- Με κέντρο το Ο: $x^2 + y^2 = \rho^2$.
- Με κέντρο το $\mathrm{K}(x_0, y_0)$: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$

Β) Εξίσωση Εφαπτομένης του κύκλου με κέντρο το Ο

- Σε σημείο $\mathrm{K}(x_1, y_1)$: $xx_1 + yy_1 = \rho^2$

Γ) Γενική εξίσωση κύκλου

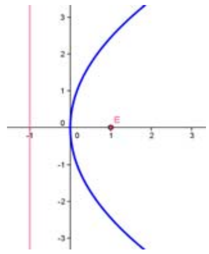
$x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, αν $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma > 0$.

- **Κέντρο**: $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2}, -\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$
- **Ακτίνα**: $\rho = \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}}{2}$

II. ΠΑΡΑΒΟΛΗ

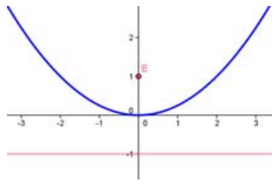
Ορισμός: Ο Γ.Τ. των σημείων που ισαπέχουν από την εστία Ε και την διευθετούσα ευθεία δ.

Α) ΜΟΡΦΗ $y^2 = 2px$.



- **Εστία:** $\mathrm{E}\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- **Διευθετούσα:** $x = -\frac{p}{2}$
- **Εξίσωση εφαπτομένης στο** $\mathrm{M}(x_1, y_1)$: $yy_1 = p(x + x_1)$

Β) ΜΟΡΦΗ $x^2 = 2py$.

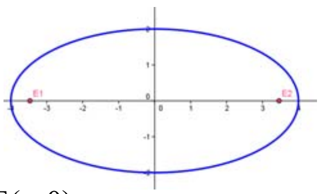


- **Εστία:** $\mathrm{E}\left(0, \frac{p}{2}\right)$
- **Διευθετούσα:** $y = -\frac{p}{2}$
- **Εξίσωση εφαπτομένης στο** $\mathrm{M}(x_1, y_1)$:

  $xx_1 = p(y + y_1)$

III. ΈΛΛΕΙΨΗ $(\alpha > \beta)$

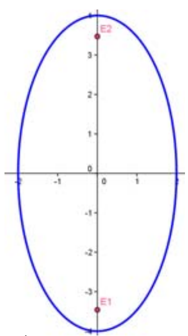
Ορισμός: Ο Γ.Τ. των σημείων που το άθροισμα των αποστάσεών τους από τις δύο εστίες είναι σταθερό.



Α) ΜΟΡΦΗ $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

- **Σταθερό άθροισμα:** *2α.*
- **Εστίες:** $\mathrm{E}'(-\gamma, 0)$ **και** $\mathrm{E}(\gamma, 0)$.
- $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$
- **Εξίσωση εφαπτομένης στο** $\mathrm{M}(x_1, y_1)$:

  $$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$



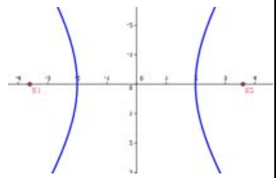
Β) ΜΟΡΦΗ $\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1$.

- **Σταθερό άθροισμα:** *2α.*
- **Εστίες:** $\mathrm{E}'(0, -\gamma)$ **και** $\mathrm{E}'(\gamma, 0)$.
- $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$
- **Εξίσωση εφαπτομένης στο** $\mathrm{M}(x_1, y_1)$:

  $$\frac{yy_1}{\alpha^2} + \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$$

IV. ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Ορισμός: Ο Γ.Τ. των σημείων που η διαφορά των αποστάσεών τους από τις δύο εστίες είναι σταθερή.

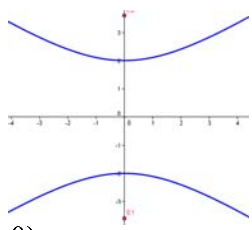


Α) ΜΟΡΦΗ $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

- **Σταθερή διαφορά:** *2α.*
- **Εστίες:** $\mathrm{E}'(-\gamma, 0)$ **και** $\mathrm{E}(\gamma, 0)$.
- $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$
- **Εξίσωση εφαπτομένης στο** $\mathrm{M}(x_1, y_1)$:

  $$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

- **Ασύμπτωτες:** $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ **και** $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$.



Β) ΜΟΡΦΗ $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$.

- **Σταθερή διαφορά:** *2α.*
- **Εστίες:** $\mathrm{E}'(0, -\gamma)$ **και** $\mathrm{E}'(\gamma, 0)$.
- $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$
- **Εξίσωση εφαπτομένης στο** $\mathrm{M}(x_1, y_1)$:

  $$\frac{yy_1}{\alpha^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$$

- **Ασύμπτωτες:** $y = \frac{\alpha}{\beta}x$ **και** $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$