

Η Θεωρία των Μαθηματικών  
Προσανατολισμού  
της Γ' Λυκείου



[www.Askisopolis.gr](http://www.Askisopolis.gr)

Σ. Μιχαήλογλου – Δ. Πατσιμάς – Ν. Τούντας

2025 – 2026

## Πρόλογος

Το φυλλάδιο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Γ' Λυκείου, οι οποίοι θα εξεταστούν στα Μαθηματικά στις Πανελλαδικές Εξετάσεις. Σκοπό έχει να προετοιμάσει τους υποψηφίους για την θεωρία των που θα κληθούν να απαντήσουν στο Α θέμα των εξετάσεων. Περιλαμβάνει την θεωρία σε μορφή ερωτήσεων – απαντήσεων στις οποίες είναι σημειωμένες οι χρονιές που έχουν τεθεί στις Πανελλαδικές Εξετάσεις. Πρόκειται για 126 ερωτήσεις θεωρίας που καλύπτουν όλο το φάσμα της ύλης.

Ελπίζουμε το βιβλίο αυτό να φανεί χρήσιμο στους μαθητές στην προετοιμασία τους για τις εξετάσεις.

Οι συγγραφείς

*Το εξώφυλλο είναι έργο του Wassily Kandinsky.*

1ο Κεφάλαιο**ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ****Ορισμοί**

**1. Έστω  $A$  ένα μη κενό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ;**

**2018, 2019****Απάντηση**

Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$  μια διαδικασία (κανόνα)  $f$ , με την οποία κάθε στοιχείο  $x \in A$  αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό  $y$ .

Το  $y$  ονομάζεται τιμή της  $f$  στο  $x$  και συμβολίζεται με  $f(x)$ .

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow f(x)$

**2. Έστω  $A$  ένα μη κενό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  και  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  πραγματική συνάρτηση κατά την οποία  $x \rightarrow y = f(x)$ . Τι ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή και τι εξαρτημένη;**

**Απάντηση**

Το γράμμα  $x$  παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του  $A$  και λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το γράμμα  $y$ , που παριστάνει την τιμή της  $f$  στο  $x$ , λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

**3. Τι ονομάζεται σύνολο τιμών μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το μη κενό σύνολο  $A \subseteq \mathbb{R}$ .**

**Απάντηση**

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της  $f$  σε όλα τα  $x \in A$ , λέγεται σύνολο τιμών της  $f$  και συμβολίζεται με  $f(A)$ . Είναι δηλαδή:  $f(A) = \{y / y = f(x), x \in A\}$

**4. Έστω  $B$  μη κενό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μία συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο σύνολο  $B$ ; Τι ονομάζεται σύνολο τιμών της  $f$  σε κάθε  $x \in B$ ;**

**Απάντηση**

Όταν θα λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο  $B$ , θα εννοούμε ότι το  $B$  είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Στην περίπτωση αυτή με  $f(B)$  θα συμβολίζουμε το σύνολο των τιμών της  $f$  σε κάθε  $x \in B$ . Είναι δηλαδή  $f(B) = \{y / y = f(x), x \in B\}$

**5. Ποια στοιχεία αρκεί να δοθούν για να οριστεί μία συνάρτηση  $f$ ;**

**Απάντηση**

Για να οριστεί μια συνάρτηση,  $f$  αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία: το πεδίο ορισμού της και η τιμή της  $f(x)$ , για κάθε  $x$  του πεδίου ορισμού της.

**6. Όταν αναφερόμαστε σε μία συνάρτηση  $f$  δίνοντας μόνο τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το  $f(x)$ , ποιο θα είναι το πεδίο ορισμού της;**

**Απάντηση**

Όταν αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση  $f$  δίνοντας μόνο τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το  $f(x)$ , τότε θα θεωρούμε συμβατικά ότι το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το σύνολο όλων των

πραγματικών αριθμών  $x$ , για τους οποίους το  $f(x)$  έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Δηλαδή είναι το σύνολο  $A = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$ .

### 7. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης;

#### Απάντηση

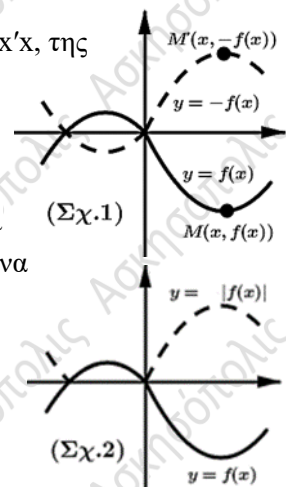
Έστω  $f$  μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού  $A$  και  $Oxy$  ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων  $M(x, y)$  για τα οποία ισχύει  $y = f(x)$ , δηλαδή το σύνολο των σημείων  $M(x, f(x))$ ,  $x \in A$ , λέγεται γραφική παράσταση της  $f$  και συμβολίζεται με  $C_f$ .

### 8. Πως προκύπτει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $-f$ , $|f|$ με βοήθεια της γραφικής παράστασης της $f$ ;

#### Απάντηση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $-f$  είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα  $x'x$ , της γραφικής παράστασης της  $f$ , γιατί αποτελείται από τα σημεία  $M'(x, -f(x))$  που είναι συμμετρικά των  $M(x, f(x))$ , ως προς τον άξονα  $x'x$ . (Σχ.1)

Η γραφική παράσταση της  $|f|$  αποτελείται από τα τμήματα της  $C_f$  που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'x$  ή πάνω σ' αυτόν και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα  $x'x$ , των τμημάτων της  $C_f$  που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ.2)



### 9. Πότε δύο συναρτήσεις $f$ και $g$ είναι ίσες;

2007, 2012, 2016, 2021, 2023

#### Απάντηση

Δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού  $A$  και για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $f(x) = g(x)$ . Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ίσες γράφουμε  $f = g$ .

### 10. Έστω οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν $\Gamma$ υποσύνολο των $A$ και $B$ , τότε θα λέμε ότι οι $f, g$ είναι ίσες στο $\Gamma$ ;

#### Απάντηση

Έστω  $f, g$  δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A, B$  αντιστοίχως και  $\Gamma$  ένα υποσύνολο των  $A$  και  $B$ . Αν για κάθε  $x \in \Gamma$  ισχύει  $f(x) = g(x)$ , τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ίσες στο σύνολο  $\Gamma$ .

### 11. Έστω οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ . Πως ορίζονται οι συναρτήσεις $f + g$ , $f - g$ , $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$ ;

#### Απάντηση

Αν  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζουμε ως:

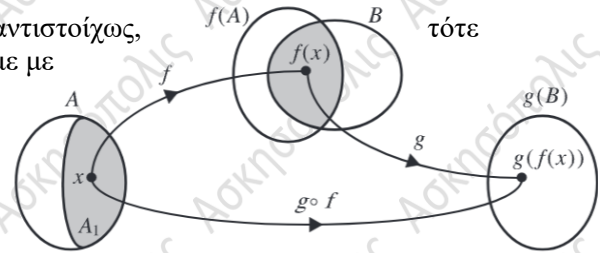
- άθροισμα  $f + g$  την συνάρτηση με πεδίο ορισμού  $A \cap B$  και τύπο  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ .
- διαφορά  $f - g$  την συνάρτηση με πεδίο ορισμού  $A \cap B$  και τύπο  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ .

- γινόμενο  $f \cdot g$  την συνάρτηση με πεδίο ορισμού  $A \cap B$  και τύπο  $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ .
- πηλίκο  $\frac{f}{g}$  την συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A \cap B$ , εξαιρουμένων των τιμών του  $x$  που μηδενίζουν τον παρονομαστή  $g(x)$ , δηλαδή το σύνολο  $\{x \mid x \in A \text{ και } x \in B \text{ με } g(x) \neq 0\}$  και τύπο  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

**12. Έστω οι συναρτήσεις  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ . Τι ονομάζουμε σύνθεση της  $f$  με την  $g$ ; Τι πρέπει να ισχύει για να ορίζεται η σύνθεση της  $f$  με την  $g$ ;**

**Απάντηση**

Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού  $A, B$  αντιστοίχως, ονομάζουμε σύνθεση της  $f$  με την  $g$ , και τη συμβολίζουμε με  $g \circ f$ , τη συνάρτηση με τύπο  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ . Το πεδίο ορισμού της  $g \circ f$  αποτελείται από όλα τα στοιχεία  $x$  του πεδίου ορισμού της  $f$  για τα οποία το  $f(x)$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $g$ .



Δηλαδή είναι το σύνολο  $A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$ .

Είναι φανερό ότι η  $g \circ f$  ορίζεται αν  $A_1 \neq \emptyset$ , δηλαδή αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

**ΣΧΟΛΙΑ:**

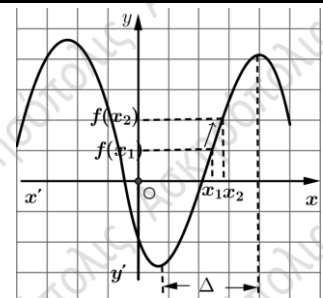
- Γενικά, αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι  $g \circ f$  και  $f \circ g$  τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.
- Αν  $f, g, h$  είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η  $h \circ (g \circ f)$ , τότε ορίζεται και η  $(h \circ g) \circ f$  και ισχύει  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ . Την συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των  $f, g$  και  $h$  και τη συμβολίζουμε με  $h \circ g \circ f$ . Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

**13. Να αναφέρετε πότε μία συνάρτηση λέγεται:**

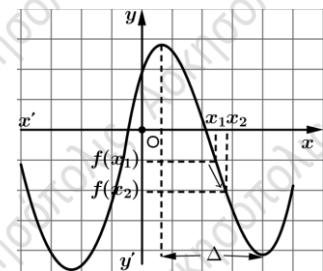
- Γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της. 2024
- Γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της.
- Γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της.

**Απάντηση**

**i)** Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει:  $f(x_1) < f(x_2)$ .  
Συμβολικά γράφουμε:  $f \nearrow \Delta$ .



**ii)** Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει:  $f(x_1) > f(x_2)$ .  
Συμβολικά γράφουμε:  $f \searrow \Delta$ .



**iii)** Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ .

14. Έστω μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει:

α) στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο, το  $f(x_0)$ ;

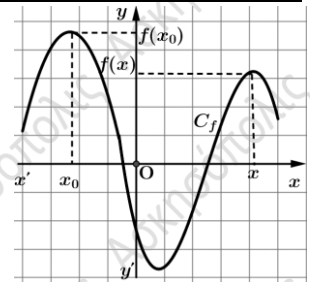
2010, 2014

β) στο  $x_0 \in A$  (ολικό) ελάχιστο, το  $f(x_0)$ ;

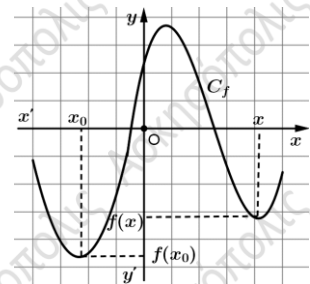
#### Απάντηση

Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  θα λέμε ότι:

α) Παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο, το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) \leq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$ .



β) Παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) ελάχιστο, το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) \geq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$ .



15. Πότε μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται 1-1;

1987, 2005, 2015

#### Απάντηση

Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή:

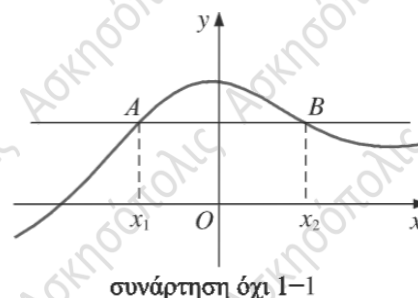
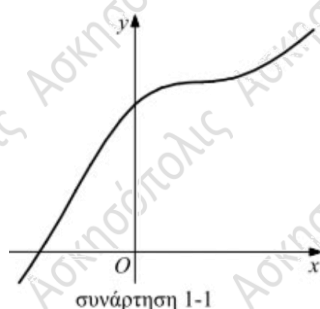
$$\text{Αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2).$$

16. Να αναφέρετε τέσσερα κριτήρια για να είναι μία συνάρτηση 1-1;

#### Απάντηση

- Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή: αν  $f(x_1) = f(x_2)$  τότε  $x_1 = x_2$ .
- Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της  $f$ , η εξίσωση  $f(x) = y$  έχει ακριβώς μια λύση ως προς  $x$ .
- Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  το πολύ σε ένα σημείο.
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση 1-1. **(ΠΡΟΣΟΧΗ! ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ, ΓΙΑ ΑΥΤΟ ΔΕΝ ΓΡΑΦΟΥΜΕ ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟΝ ΑΝ.)**

ΣΧΟΛΙΑ:



**17. Πότε μία συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  έχει αντίστροφη; Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  μιας συνάρτησης  $f$ .**

2019

### Απάντηση

Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1 τότε έχει αντίστροφη.

Αν υποθέσουμε ότι η  $f$  είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών,  $f(A)$ , της  $f$  υπάρχει μοναδικό στοιχείο  $x$  του πεδίου ορισμού της  $A$  για το οποίο ισχύει  $f(x) = y$ . Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση  $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$  με την οποία κάθε  $y \in f(A)$  αντιστοιχίζεται στο μοναδικό  $x \in A$  για το οποίο ισχύει  $f(x) = y$ .

Από τον τρόπο που ορίστηκε η  $g$  προκύπτει ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών  $f(A)$  της  $f$ ,
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού  $A$  της  $f$  και
- ισχύει η ισοδυναμία:  $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$ .

Αυτό σημαίνει ότι, αν η  $f$  αντιστοιχίζει το  $x$  στο  $y$ , τότε η  $g$  αντιστοιχίζει το  $y$  στο  $x$  και αντιστρόφως. Δηλαδή η  $g$  είναι η αντίστροφη διαδικασία της  $f$ . Για το λόγο αυτό η  $g$  λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της  $f$  και συμβολίζεται με  $f^{-1}$ .

Επομένως έχουμε  $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$  οπότε  $f^{-1}(f(x)) = x$  για κάθε  $x \in A$  και  $f(f^{-1}(y)) = y$  για κάθε  $y \in f(A)$ .

### Αποδείξεις

**18. Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .**

### Απάντηση

Επειδή  $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ , αν ένα σημείο  $M(\alpha, \beta)$  ανήκει στη γραφική παράσταση  $C$  της  $f$ , τότε το σημείο  $M'(\beta, \alpha)$  θα ανήκει στη γραφική παράσταση  $C'$  της  $f^{-1}$  και αντιστρόφως. Τα σημεία όμως αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ , δηλαδή την  $y = x$ , για αυτό το λόγο οι δύο γραφικές παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς την  $y = x$ .

## ΟΡΙΑ

### Ορισμοί

**19. Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα σύνολο  $A$ . Να αναφέρετε:**

**α) Τη μορφή του συνόλου  $A$  ώστε να ορίζεται το όριο της  $f$  στο  $x_0$ .**

**β) Τι εννοούμε όταν γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ ;**

### Απάντηση

**α)** Για να ορίζεται το όριο της  $f$  στο  $x_0$ , πρέπει η  $f$  να ορίζεται όσο θέλουμε κοντά στο  $x_0$ , δηλαδή η  $f$  να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  ή  $(\alpha, x_0)$  ή  $(x_0, \beta)$ .

**β)** Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης  $f$  προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό  $\ell$ , καθώς το  $x$  προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό  $x_0$ , τότε γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ .

### ΣΧΟΛΙΑ:

→ Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} c = c$$

**Για τα όρια έχουμε τις εξής ιδιότητες:**

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο  $x_0$ , τότε:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  για κάθε σταθερά  $k \in \mathbb{R}$ .
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ , εφόσον  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$  εφόσον  $f(x) \geq 0$  κοντά στο  $x_0$ .
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$

**20. Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα σύνολο  $A$ . Να αναφέρετε:**

**α) Τη μορφή του συνόλου  $A$  ώστε να ορίζεται το όριο:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$**

**β) Τι εννοούμε όταν γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$  ;**

**Απάντηση**

**α)** Για να ορίζεται το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ , πρέπει η  $f$  να ορίζεται όσο θέλουμε κοντά στο  $x_0$  από μικρότερες τιμές, δηλαδή η  $f$  να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  ή  $(\alpha, x_0)$ .

**β)** Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης  $f$  προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό  $\ell$ , καθώς το  $x$  προσεγγίζει το  $x_0$  από μικρότερες τιμές ( $x < x_0$ ), τότε γράφουμε:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ .

**21. Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα σύνολο  $A$ . Να αναφέρετε:**

**α) Τη μορφή του συνόλου  $A$  ώστε να ορίζεται το όριο:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$**

**β) Τι εννοούμε όταν γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$  ;**

**Απάντηση**

**α)** Για να ορίζεται το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ , πρέπει η  $f$  να ορίζεται όσο θέλουμε κοντά στο  $x_0$  από μεγαλύτερες τιμές, δηλαδή η  $f$  να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  ή  $(x_0, \beta)$ .

β) Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης  $f$  προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό  $\ell$ , καθώς το  $x$  προσεγγίζει το  $x_0$  από μεγαλύτερες τιμές ( $x > x_0$ ), τότε γράφουμε:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ .

**22. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μία συνάρτηση  $f$  έχει κοντά στο  $x_0$  μία ιδιότητα  $P$ ;**

**Απάντηση**

Όταν λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  έχει κοντά στο  $x_0$  μια ιδιότητα  $P$  θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

α) Η  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα  $P$ .

β) Η  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0)$ , έχει σ' αυτό την ιδιότητα  $P$ , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής  $(x_0, \beta)$ .

γ) Η  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(x_0, \beta)$ , έχει σ' αυτό την ιδιότητα  $P$ , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0)$ .

**23. Να διατυπώσετε τα δύο θεωρήματα που ισχύουν για το όριο και την διάταξη.**

**Απάντηση**

Για το όριο και τη διάταξη ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1°**

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2°**

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

**24. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.**

**2016, 2020, 2021**

**Απάντηση**

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g, h$ . Αν  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ , τότε και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ .

**25. Να συγκρίνετε τις τιμές των  $|\eta\mu x|$  και  $|x|$  για τις διάφορες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ .**

**Απάντηση**

$|\eta\mu x| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = 0$ .

**26. Ποια είναι τα βασικά τριγωνομετρικά όρια στο  $x_0 \in \mathbb{R}$ ;**

**Απάντηση**

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 \quad 2. \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0 \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

**27. Να περιγράψετε την διαδικασία με την οποία υπολογίζουμε το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ .**

**Απάντηση**

Για να υπολογίσουμε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ , της σύνθετης συνάρτησης  $f \circ g$  στο σημείο  $x_0$ , εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε  $u = g(x)$ .
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το  $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το  $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ .

Αποδεικνύεται ότι, αν  $g(x) \neq u_0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με  $\ell$ , δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u).$$

**28. Να αναφέρετε τι εννοούμε όταν γράφουμε: α)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$**

**β)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$**

### Απάντηση

**α)** Καθώς το  $x$  κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα  $x$ 'ς πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό  $x_0$ , οι τιμές  $f(x)$  αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό  $M$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει στο  $x_0$  όριο  $+\infty$  και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ .

**β)** Καθώς το  $x$  κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα  $x$ 'ς πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό  $x_0$ , οι τιμές  $f(x)$  ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό  $-M$  ( $M > 0$ ). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει στο  $x_0$  όριο  $-\infty$  και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .

### ΣΧΟΛΙΑ:

**Οι ιδιότητες για το μη πεπερασμένο όριο στο  $x_0 \in \mathbb{R}$  είναι:**

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ .
3. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , ενώ αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .
4. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$ , ενώ αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$ .
5. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .
6. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ , ενώ αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ .
7. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ .
8. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$ .

### Συνέπειες

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  και γενικά  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty, v \in \mathbb{N}^*$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  και γενικά  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty, v \in \mathbb{N}^*$ , ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty \text{ και γενικά } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty, v \in \mathbb{N}^*,$$

Δηλαδή δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της  $f(x) = \frac{1}{x^{2v+1}}, v \in \mathbb{N}^*$ .

**29. Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα σύνολο  $A$ . Να αναφέρετε:**

**α) Τη μορφή του συνόλου  $A$  ώστε να ορίζεται το όριο της  $f$  στο  $+\infty$ .**

**β) Τι εννοούμε όταν γράφουμε:**

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

**Απάντηση**

**α)** Για να ορίζεται το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , πρέπει η  $f$  να ορίζεται σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, +\infty)$ .

**β) i)** Καθώς το  $x$  αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το  $f(x)$  προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό  $\ell$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η  $f$  έχει στο  $+\infty$  όριο το  $\ell$  και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

**ii)** Καθώς το  $x$  αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το  $f(x)$  αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η  $f$  έχει στο  $+\infty$  όριο το  $+\infty$  και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**iii)** Καθώς το  $x$  αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το  $f(x)$  μειώνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η  $f$  έχει στο  $+\infty$  όριο το  $-\infty$  και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

**30. Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα σύνολο  $A$ . Να αναφέρετε:**

**α) Τη μορφή του συνόλου  $A$  ώστε να ορίζεται το όριο της  $f$  στο  $-\infty$ .**

**β) Τι εννοούμε όταν γράφουμε:**

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

**Απάντηση**

**α)** Για να ορίζεται το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , πρέπει η  $f$  να ορίζεται σε ένα σύνολο της μορφής  $(-\infty, \alpha)$ .

**β) i)** Καθώς το  $x$  ελαττώνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το  $f(x)$  προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό  $\ell$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η  $f$  έχει στο  $-\infty$  όριο το  $\ell$  και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$

**ii)** Καθώς το  $x$  ελαττώνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το  $f(x)$  αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η  $f$  έχει στο  $-\infty$  όριο το  $+\infty$  και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

**iii)** Καθώς το  $x$  ελαττώνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το  $f(x)$  μειώνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η  $f$  έχει στο  $-\infty$  όριο το  $-\infty$  και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

**31. Ποια είναι τα όρια της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού τους;**

**Απάντηση**

1. Αν  $\alpha > 1$ , τότε:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\alpha} x = -\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = +\infty$
2. Αν  $0 < \alpha < 1$ , τότε:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\alpha} x = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = -\infty$

**32. Να δώσετε τον ορισμό της ακολουθίας.****Απάντηση**

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση  $\alpha: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Αποδείξεις****33. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολώνυμο  $P(x)$ , ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ , με  $x_0 \in \mathbb{R}$ .****Απάντηση**

Έστω  $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ . Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{v-1} x^{v-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_1 x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \alpha_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + \alpha_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 \lim_{x \rightarrow x_0} x + \alpha_0 =$$

$$\alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 = P(x_0)$$

**34. Να αποδείξετε ότι για τα πολώνυμα  $P(x), Q(x)$ , με  $Q(x_0) \neq 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  ισχύει**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

**Απάντηση**

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

**ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ****Ορισμοί****35. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;****1983, 1986, 2009, 2015****Απάντηση**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  και ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , όταν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**36. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;****Απάντηση**

Μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της όταν:

- α)** Δεν υπάρχει το όριό της στο  $x_0$  ή
- β)** Υπάρχει το όριό της στο  $x_0$ , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή  $f(x_0)$ , στο σημείο  $x_0$ .

**37. Πότε μια συνάρτηση θα λέμε ότι είναι συνεχής;**

**Απάντηση**

Μια συνάρτηση  $f$  που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέμε ότι είναι συνεχής συνάρτηση.

**38. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο  $(\alpha, \beta)$ ;**

**2004**

**Απάντηση**

Μια συνάρτηση  $f$  θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $(\alpha, \beta)$ .

**39. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ ;**

**2008, 2004, 2012, 2017, 2021**

**Απάντηση**

Μια συνάρτηση  $f$  θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $(\alpha, \beta)$  και επιπλέον  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$  και  $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$ .

**40. Αν δύο συναρτήσεις  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $x_0$ , τότε ποιες άλλες συναρτήσεις που ορίζονται μέσω των  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $x_0$ ;**

**Απάντηση**

Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι συνεχείς στο  $x_0$ , τότε είναι συνεχείς στο  $x_0$  και οι συναρτήσεις:

$f + g$ ,  $c \cdot f$ , όπου  $c \in \mathbb{R}$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$ ,  $|f|$  και  $\sqrt{f}$ .

**41. Δώστε δύο συνθήκες για τις συναρτήσεις  $f, g$  ώστε η συνάρτηση  $g \circ f$  να είναι συνεχής στο  $x_0$ .**

**Απάντηση**

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $f(x_0)$ , τότε η σύνθεσή τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

**42. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.**

**2014, 2020**

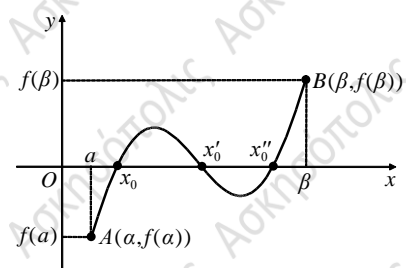
**Απάντηση**

Έστω μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και, επιπλέον, ισχύει  $f(\alpha)f(\beta) < 0$ , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον,  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = 0$ . Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ .

**43. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano.**

**Απάντηση**

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ . Επειδή τα σημεία  $A(\alpha, f(\alpha))$  και  $B(\beta, f(\beta))$  βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα  $x$  η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



**44. Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.**

**2025**

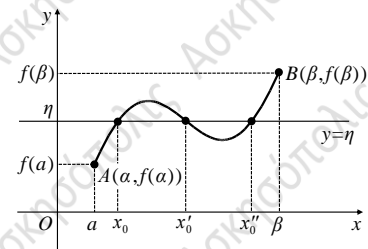
**Απάντηση**

Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και  $f(\alpha) \neq f(\beta)$  τότε, για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**45. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών.**

**Απάντηση**

Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και τα ακριανά σημεία βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος τότε κάθε οριζόντια ευθεία  $y = \eta$  με  $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$  τέμνει την  $C_f$  τουλάχιστον σε ένα σημείο.



**46. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.**

**2024**

**Απάντηση**

Αν  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[\alpha, \beta]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ . Δηλαδή, υπάρχουν  $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$  τέτοια, ώστε, αν  $m = f(x_1)$  και  $M = f(x_2)$ , να ισχύει  $m \leq f(x) \leq M$ , για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**ΣΧΟΛΙΟ:**

Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**Αποδείξεις**

**47. Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν:**

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι, για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**1995, 2005, 2015, 2020, 2024**

**Απάντηση**

Ας υποθέσουμε ότι  $f(\alpha) < f(\beta)$ .

Τότε θα ισχύει  $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ . Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - \eta$ ,  $x \in [\alpha, \beta]$ , παρατηρούμε ότι:

- η  $g$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$ , αφού  $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$  και  $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$ .

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε

$g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$ , οπότε  $f(x_0) = \eta$ .

Ομοίως αν  $f(\alpha) > f(\beta)$ .

**2ο Κεφάλαιο****ΕΝΝΟΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ****Ορισμοί**

**48. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ .**

**Απάντηση**

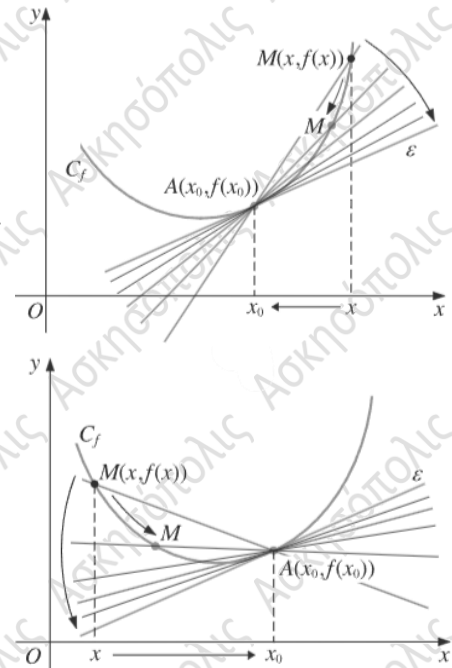
Έστω  $f$  μία συνάρτηση και  $A(x_0, f(x_0))$  ένα σημείο της γραφικής της παράστασης. Αν πάρουμε ένα ακόμη σημείο  $M(x, f(x))$ ,  $x \neq x_0$ , της γραφικής παράστασης της  $f$  και την ευθεία  $AM$  που ορίζουν τα σημεία  $A$  και  $M$ , παρατηρούμε ότι:

Καθώς το  $x$  τείνει στο  $x_0$  με  $x > x_0$ , η τέμνουσα  $AM$  φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση  $\varepsilon$ . Την ίδια οριακή θέση φαίνεται να παίρνει και όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$  με  $x < x_0$ .

Η οριακή θέση της  $AM$  είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $A$ .

Επειδή η κλίση της τέμνουσας  $AM$  είναι ίση με  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ,

τότε η κλίση της εφαπτομένης θα είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .



**49. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ .**

**Απάντηση**

Έστω  $f$  μια συνάρτηση και  $A(x_0, f(x_0))$  ένα σημείο της  $C_f$ . Αν υπάρχει και είναι ένας πραγματικός αριθμός  $\lambda$  το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A$ , την ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από το  $A$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$ . Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι  $y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$ , όπου  $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

**50. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;**

**2004, 2009**

**Απάντηση**

Μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$

και συμβολίζεται με  $f'(x_0)$ .

**51. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της τότε:**

**α) Σε ποιον οφείλεται ο συμβολισμός  $f'(x_0)$  για την παράγωγο της  $f$  στο  $x_0$  ;**

**β) Να εξηγήσετε πως προκύπτει ότι  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ . Πως αλλιώς μπορεί να**

**γραφεί το προηγούμενο όριο;**

**γ) Ποιον συμβολισμό δίνει ο Leibniz για την παράγωγο της  $f$  στο σημείο  $x_0$  ;**

#### Απάντηση

**α)** Ο συμβολισμός  $f'(x_0)$  για την παράγωγο της  $f$  στο σημείο  $x_0$  οφείλεται στον Lagrange.

**β)** Αν στην ισότητα  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  θέσουμε  $x = x_0 + h$ , τότε έχουμε

$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ . Πολλές φορές το  $h = x - x_0$  συμβολίζεται με  $\Delta x$ , ενώ το

$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  συμβολίζεται με  $\Delta f(x_0)$ , οπότε ο παραπάνω τύπος

γράφεται:  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ .

**γ)** Ο Leibniz συμβολίζει την παράγωγο της  $f$  στο  $x_0$  ως  $\frac{df(x_0)}{dx}$  ή  $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ .

**52. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της τότε ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $x_0$  ;** **2000**

#### Απάντηση

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ .

**53. Πότε ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά κοντά στο  $t_0$  ;**

#### Απάντηση

Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο  $t_0$  ισχύει  $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} > 0$ , οπότε είναι

$v(t_0) \geq 0$ , ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά κοντά στο  $t_0$  ισχύει  $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} < 0$ , οπότε

είναι  $v(t_0) \leq 0$ .

**54. Πως ορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού κατά τη χρονική στιγμή  $t_0$  ;**

#### Απάντηση

Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή  $t_0$ , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης  $x = s(t)$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ . Δηλαδή  $v(t_0) = s'(t_0)$ .

## Αποδείξεις

55. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

1999, 2000, 2003, 2007, 2013, 2018, 2022, 2023, 2025

Απάντηση

Για  $x \neq x_0$  είναι  $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$ , οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ . Επομένως,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , δηλαδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

## ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

## Ορισμοί

56. Πότε η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της;

Απάντηση

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $A$  ή απλά παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο  $x_0 \in A$ .

57. Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$  του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$  του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ .

58. Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  του πεδίου ορισμού της;

2010, 2013, 2020, 2023

Απάντηση

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και ισχύει  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$ .

59. Έστω  $f$  μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού  $A$  και  $A_1$  το σύνολο των σημείων του  $A$  στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πως ορίζεται η πρώτη παράγωγος της  $f$ ;

2020

Απάντηση

Έστω  $f$  μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού  $A$  και  $A_1$  το σύνολο των σημείων του  $A$  στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε  $x \in A_1$  στο  $f'(x)$ , ορίζουμε τη συνάρτηση  $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow f'(x)$ , η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της  $f$  ή απλά παράγωγος της  $f$ .

**60.** Έστω  $f$  μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού  $A$  και  $A_1$  το σύνολο των σημείων του  $A$  στα οποία αυτή είναι  $n$  φορές παραγωγίσιμη με  $n \in \mathbb{N}$  και  $n \geq 3$ . Πως ορίζεται η δεύτερη παράγωγος της  $f$  και πως η νιοστή;

**Απάντηση**

Η δεύτερη παράγωγος της  $f$  συμβολίζεται με  $f''$  και είναι  $f''(x) = [f'(x)]'$ . Η νιοστή παράγωγος της  $f$  με  $n \geq 3$  συμβολίζεται με  $f^{(n)}$  και είναι:  $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$ .

**61.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  τότε η συνάρτηση  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ ; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

**Απάντηση**

Η  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  με  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ .

**62.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  τότε η συνάρτηση  $f \cdot g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ ; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

**Απάντηση**

Η  $f \cdot g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  με  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ .

**63.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  και  $g(x_0) \neq 0$  τότε η συνάρτηση  $\frac{f}{g}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ ; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

**Απάντηση**

Η  $\frac{f}{g}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  με  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

**64.** Να αναφέρετε δύο συνθήκες ώστε η συνάρτηση  $f(g(x))$  να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ . Πως ορίζεται η παράγωγος της στο  $x_0$ ;

**Απάντηση**

Αν η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $g(x_0)$ , τότε η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει  $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ .

**65.** Να αναφέρετε δύο συνθήκες ώστε η συνάρτηση  $f(g(x))$  να είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $\Delta$ . Πως ορίζεται η παράγωγος της στο  $\Delta$ ;

**Απάντηση**

Αν η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $g(\Delta)$ , τότε η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  και ισχύει  $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ . Δηλαδή, αν  $u = g(x)$ , τότε  $(f(u))' = f'(u)u'$ .

**66. Ποιος είναι ο κανόνας της αλυσίδας και πώς προκύπτει;**

**Απάντηση**

Ισχύει ότι  $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ . Αν  $u = g(x)$ , τότε  $(f(u))' = f'(u)u'$ . Με το συμβολισμό του Leibniz, αν  $y = f(u)$  και  $u = g(x)$ , έχουμε τον τύπο  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$  που είναι γνωστός ως κανόνας της αλυσίδας.

**Αποδείξεις**

**67. Έστω η σταθερή συνάρτηση  $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = 0$ .**

**Απάντηση**

Αν  $x_0 \in \mathbb{R}$  τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$ .

Επομένως,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ , δηλαδή  $(c)' = 0$ .

**68. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = 1$ . 2024**

**Απάντηση**

Αν  $x_0 \in \mathbb{R}$  τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$ .

Επομένως,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$ , δηλαδή  $(x)' = 1$ .

**69. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = vx^{v-1}$ . 1998**

**Απάντηση**

Αν  $x_0 \in \mathbb{R}$  τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} =$

$= x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) =$

$= x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1}$  δηλαδή  $(x^v)' = vx^{v-1}$ .

**70. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με**

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2005, 2009

**Απάντηση**

Αν  $x_0 \in (0, +\infty)$  τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει: 
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} =$$

$$= \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \text{ δηλαδή } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

**71. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .**

**Απάντηση**

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$  αφού  $\sqrt{x} > 0$  για κάθε  $x$  κοντά στο μηδέν από μεγαλύτερες τιμές. Άρα η  $f$  όχι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

**72. Αν οι συναρτήσεις  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0 \in A$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$**

**1989, 2020, 2023**

**Απάντηση**

Για  $x \neq x_0$ , ισχύει: 
$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$
 Επειδή οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , έχουμε: 
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).$$
 Δηλαδή  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ .

**73. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^{-v}$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  με  $f'(x) = -vx^{-v-1}$ .**

**Απάντηση**

Για κάθε  $x \neq 0$ : 
$$(x^{-v})' = \left(\frac{1}{x^v}\right)' = \frac{(1)'x^v - 1(x^v)'}{(x^v)^2} = \frac{-vx^{v-1}}{x^{2v}} = -vx^{-v-1}.$$

**74. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\phi x$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο**

$$\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\} \text{ με } f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

**Απάντηση**

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}_1$ : 
$$(\varepsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

75. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ .

**Απάντηση**

Αν  $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$  και θέσουμε  $u = \alpha \ln x$ , τότε έχουμε  $y = e^u$ .

Επομένως,  $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$ .

76. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \alpha^x$ ,  $\alpha > 0$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$ .

**Απάντηση**

Αν  $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$  και θέσουμε  $u = x \ln \alpha$ , τότε έχουμε  $y = e^u$ .

Επομένως,  $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha$ .

77. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

2008

**Απάντηση**

Αν  $x > 0$ , τότε  $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ .

Αν  $x < 0$ , τότε  $\ln|x| = \ln(-x)$ , οπότε, αν θέσουμε  $y = \ln(-x)$  και  $u = -x$ , έχουμε  $y = \ln u$ .

Επομένως,  $y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$  και άρα  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ .

## ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

### Ορισμοί

78. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη  $x, y$  συνδέονται με τη σχέση  $y = f(x)$ , τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του  $y$  ως προς το  $x$  στο σημείο  $x_0$ ;

**Απάντηση**

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη  $x, y$  συνδέονται με τη σχέση  $y = f(x)$ , όταν  $f$  είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του  $y$  ως προς το  $x$  στο σημείο  $x_0$  την παράγωγο  $f'(x_0)$ .

79. Πως ορίζεται η επιτάχυνση ενός κινητού την χρονική στιγμή  $t_0$ ;

**Απάντηση**

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας  $v$  ως προς το χρόνο  $t$  τη χρονική στιγμή  $t_0$  δηλαδή η παράγωγος  $v'(t_0)$  λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή  $t_0$  και συμβολίζεται με  $a(t_0)$ . Είναι δηλαδή  $a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$  όπου  $s(t)$  η συνάρτηση θέσης του κινητού.

**80. Από την παραγωγή  $x_0$  μονάδων ενός προϊόντος, να αναφέρετε τι ονομάζεται:**

- α) Οριακό κόστος στο  $x_0$ .      β) Οριακή είσπραξη στο  $x_0$ .      γ) Οριακό κέρδος στο  $x_0$ .

**Απάντηση**

α) Αν  $K$  είναι το κόστος παραγωγής  $x$  μονάδων ενός προϊόντος, τότε η παράγωγος  $K'(x_0)$  παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους  $K$  ως προς την ποσότητα  $x$ , όταν  $x = x_0$  και λέγεται οριακό κόστος στο  $x_0$ .

β) Αν  $E$  είναι η είσπραξη από την παραγωγή  $x$  μονάδων ενός προϊόντος, τότε η παράγωγος  $E'(x_0)$  παριστάνει το ρυθμό μεταβολής της είσπραξης  $E$  ως προς την ποσότητα  $x$ , όταν  $x = x_0$  και λέγεται οριακή είσπραξη στο  $x_0$ .

γ) Αν  $P$  είναι το κέρδος από την παραγωγή  $x$  μονάδων ενός προϊόντος, τότε η παράγωγος  $P'(x_0)$  παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κέρδους  $P$  ως προς την ποσότητα  $x$ , όταν  $x = x_0$  και λέγεται οριακό κέρδος στο  $x_0$ .

**81. Από την παραγωγή  $x$  μονάδων ενός προϊόντος να αναφέρετε πως ορίζεται το συνολικό κέρδος και πως το μέσο κόστος.**

**Απάντηση**

Αν  $K(x)$  είναι το συνολικό κόστος,  $E(x)$  η συνολική είσπραξη και  $P(x)$  κέρδος τότε ορίζουμε το κέρδος ως την διαφορά του κόστους  $K(x)$  από την είσπραξη  $E(x)$ , δηλαδή  $P(x) = E(x) - K(x)$ . Το μέσο

κόστος ορίζεται ως  $K_{\mu}(x) = \frac{K(x)}{x}$  όπου  $K(x)$  το συνολικό κόστος.

## ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE – ΘΜΤ

### Ορισμοί

**82. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.**

**2012, 2020, 2021**

**Απάντηση**

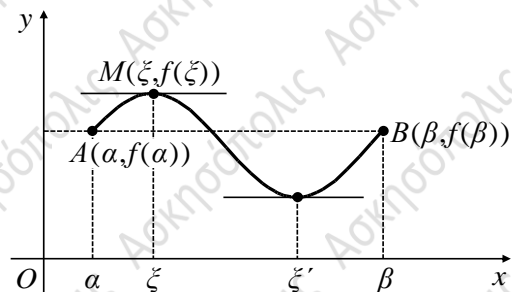
Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και  $f(\alpha) = f(\beta)$ , τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε:  $f'(\xi) = 0$ .

**83. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle.**

**2007, 2020**

**Απάντηση**

Γεωμετρικά, το θεώρημα Rolle σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στον άξονα των  $x$ .



**84. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής.**

**2013, 2016, 2019, 2022, 2025**

**Απάντηση**

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο ανοικτό

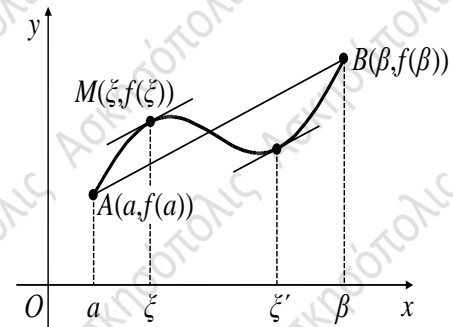
διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε:  $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ .

**85. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.**

**2003, 2008, 2016, 2019, 2022, 2025**

**Απάντηση**

Γεωμετρικά, το Θεώρημα Μέσης Τιμής σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη της ευθείας  $AB$ .



## ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΜΤ – ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

**Αποδείξεις**

**86. Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν**

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
  - $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,
- τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**1987, 1989, 1994, 1996, 2004, 2009, 2014, 2021**

**Απάντηση**

Αρκεί να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει  $f(x_1) = f(x_2)$ . Πράγματι

- Αν  $x_1 = x_2$ , τότε προφανώς  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- Αν  $x_1 < x_2$ , τότε στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  (1). Επειδή το  $\xi$  είναι εσωτερικό

σημείο του  $\Delta$ , ισχύει  $f'(\xi) = 0$  και τότε  $f(x_1) = f(x_2)$ .

- Αν  $x_2 < x_1$ , τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ .

**87. Έστω δυο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν**

- οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = g'(x)$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε για  $x \in \Delta$  να ισχύει:  $f(x) = g(x) + c$

**Απάντηση**

Η συνάρτηση  $f - g$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και για κάθε εσωτερικό σημείο  $x \in \Delta$  ισχύει

$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ . Επομένως, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση  $f - g$  είναι

σταθερή στο  $\Delta$ . Άρα υπάρχει σταθερά  $C$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει  $f(x) - g(x) = c$ , δηλαδή  $f(x) = g(x) + c$ .

**88. Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .**

- Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .  
**1996, 2006, 2012, 2017, 2019, 2021, 2023**
- Αν  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .  
**2006**

**Απάντηση**

**Αρχικά και στις δύο περιπτώσεις εργαζόμαστε το ίδιο ακριβώς:**

Έστω  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$ . Στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Επομένως, υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ , οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

- Στην περίπτωση που  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x$  στο εσωτερικό του  $\Delta$  είναι  $f'(\xi) > 0$  και  $x_2 - x_1 > 0$ , άρα έχουμε  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , οπότε  $f(x_1) < f(x_2)$  και  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .
- Στην περίπτωση που  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x$  στο εσωτερικό του  $\Delta$  είναι  $f'(\xi) < 0$  και  $x_2 - x_1 > 0$ , άρα έχουμε  $f(x_2) - f(x_1) < 0$ , οπότε  $f(x_1) > f(x_2)$  και  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ .

## ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

### Ορισμοί

**89. Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $A$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_0 \in A$  ;**

**2012, 2020**

**Απάντηση**

Μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού  $A$ , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε  $f(x) \leq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Το  $x_0$  λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το  $f(x_0)$  τοπικό μέγιστο της  $f$ .

**90. Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $A$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0 \in A$  ;**

**2015**

**Απάντηση**

Μία συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού  $A$ , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε  $f(x) \geq f(x_0)$ , για κάθε  $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Το  $x_0$  λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το  $f(x_0)$  τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

**91. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat.**

**2013, 2019, 2022**

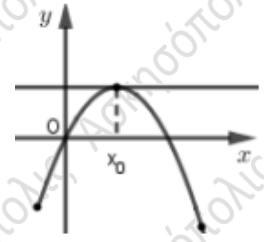
**Απάντηση**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:  $f'(x_0) = 0$ .

**92. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Fermat.**

**Απάντηση**

Γεωμετρικά το θεώρημα Fermat μας λέει ότι αν μία συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού, στο οποίο είναι παραγωγίσιμη, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο αυτό είναι οριζόντια.



**93. Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της  $f$ ;**

**Απάντηση**

Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης  $f$  σ' ένα διάστημα  $\Delta$  είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η παράγωγος της  $f$  μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η  $f$  δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του  $\Delta$  (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

**94. Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα σημεία της  $f$ ;**

**2013, 2025**

**Απάντηση**

Τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η  $f$  δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$ .

**Αποδείξεις**

**95. Να αποδείξετε το θεώρημα Fermat.**

**2004, 2011, 2016, 2017**

**Απάντηση**

Ας υποθέσουμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0$  τοπικό μέγιστο. Επειδή το  $x_0$  είναι εσωτερικό σημείο του  $\Delta$  και η  $f$  παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο, ώστε  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$  και  $f(x) \leq f(x_0)$ , για κάθε  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  (1).

Επειδή, επιπλέον, η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , ισχύει  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

Επομένως,

— αν  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ , τότε, λόγω της (1), θα είναι  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ , οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , τότε, λόγω της (1), θα είναι  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ , οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε  $f'(x_0) = 0$ . Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

**96.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

1986, 2012, 2016, 2019, 2020

ii) Αν  $f'(x) < 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) > 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

#### Απάντηση

i) Επειδή  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, x_0]$ . Έτσι έχουμε  $f(x) \leq f(x_0)$ , για κάθε  $x \in (\alpha, x_0]$  (1).

Επειδή  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (x_0, \beta)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[x_0, \beta)$ . Έτσι έχουμε:  $f(x) \leq f(x_0)$ , για κάθε  $x \in [x_0, \beta)$  (2).

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:  $f(x) \leq f(x_0)$ , για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$  που σημαίνει ότι το  $f(x_0)$  είναι μέγιστο της  $f$  στο  $(\alpha, \beta)$  και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Επειδή  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(\alpha, x_0]$ . Έτσι έχουμε  $f(x) \geq f(x_0)$ , για κάθε  $x \in (\alpha, x_0]$  (1).

Επειδή  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (x_0, \beta)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[x_0, \beta)$ . Έτσι έχουμε:  $f(x) \geq f(x_0)$ , για κάθε  $x \in [x_0, \beta)$  (2).

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:  $f(x) \geq f(x_0)$ , για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$  που σημαίνει ότι το  $f(x_0)$  είναι ελάχιστο της  $f$  στο  $(\alpha, \beta)$  και άρα τοπικό ελάχιστο αυτής.

**97.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

2014, 2018

#### Απάντηση

Έστω ότι  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ . Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $(\alpha, x_0]$  και  $[x_0, \beta)$ .

Επομένως, για  $x_1 < x_0 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ . Άρα το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο της  $f$ .

Θα δείξουμε, τώρα, ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta)$ .

Πράγματι, έστω  $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$  με  $x_1 < x_2$ .

— Αν  $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$ , επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, x_0]$ , θα ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .

— Αν  $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$ , επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[x_0, \beta)$ , θα ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .

— Τέλος, αν  $x_1 < x_0 < x_2$ , τότε όπως είδαμε  $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ .

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ , οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta)$ .

Ομοίως, αν  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ .

## ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

### Ορισμοί

**98.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ , τότε θα λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ ; 2006, 2024

#### Απάντηση

Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Θα λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ , αν η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

**99.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ , τότε θα λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο  $\Delta$ ; 2010, 2014

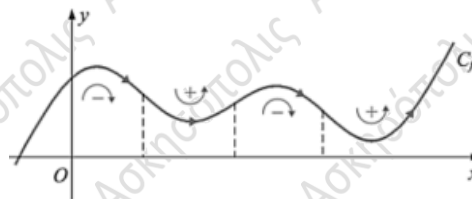
#### Απάντηση

Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Θα λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο  $\Delta$ , αν η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

**100.** Να δώσετε την έννοια της κυρτότητας εποπτικά.

#### Απάντηση

Εποπτικά, μία συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα  $\Delta$ , όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στη  $C_f$ , για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα  $\Delta$  πρέπει να στραφεί κατά τη θετική (αντιστοίχως αρνητική) φορά.



**101.** Να διατυπώσετε το θεώρημα που χρησιμοποιούμε για την εύρεση της κυρτότητας μίας συνάρτησης σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

#### Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

- Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .
- Αν  $f''(x) < 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κοίλη στο  $\Delta$ .

**102.** Ποια είναι η σχετική θέση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  με μία εφαπτομένη της με βάση τη κυρτότητα της συνάρτησης  $f$ ;

#### Απάντηση

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται “κάτω” (αντιστοίχως “πάνω”) από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

**103.** Πότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  ονομάζεται σημείο καμψής της γραφικής παράστασης της  $f$ ;

#### Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ .

Αν: • η  $f$  είναι κυρτή στο  $(\alpha, x_0)$  και κοίλη στο  $(x_0, \beta)$ , ή αντιστρόφως, και

- η  $C_f$  έχει εφαπτομένη στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ ,  
τότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**104. Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής της  $f$ ;**

**Απάντηση**

Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης  $f$  σ' ένα διάστημα  $\Delta$  είναι: **i)** τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η  $f''$  μηδενίζεται, και **ii)** τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία δεν υπάρχει η  $f''$ .

**105. Να διατυπώσετε το θεώρημα που ισχύει για το σημείο καμπής μίας συνάρτησης  $f$ .**

**Απάντηση**

Αν το  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$  και η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε  $f''(x_0) = 0$ .

## ΚΑΝΟΝΑΣ DE L' HOSPITAL – ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

### Ορισμοί

**106. Πότε η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ ;**

**2003, 2010, 2015, 2020, 2022, 2025**

**Απάντηση**

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  είναι  $+\infty$  ή  $-\infty$ , τότε η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**107. Πότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$  (αντιστοίχως στο  $-\infty$ );**

**2007, 2016, 2023**

**Απάντηση**

Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  (αντιστοίχως  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ), τότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$  (αντιστοίχως στο  $-\infty$ ).

**108. Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$  (αντιστοίχως στο  $-\infty$ );**

**2005, 2011, 2022**

**Απάντηση**

Η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ , αντιστοίχως στο  $-\infty$ , αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$ , αντιστοίχως  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$ .

**109. Να διατυπώσετε το θεώρημα που χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε ότι η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$  (αντιστοίχως στο  $-\infty$ ).**

**Απάντηση**

Η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ , αντιστοίχως στο  $-\infty$ ,

αν και μόνο αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$  αντιστοίχως  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$

### 110. Να διατυπώσετε τους κανόνες De L'Hospital.

#### Απάντηση

#### ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$ )

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (πεπερασμένο ή άπειρο),

τότε:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

#### ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ )

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ ,  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (πεπερασμένο ή

άπειρο), τότε:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

## ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

### Ορισμοί

**111.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ; **2006, 2011, 2014, 2019**

### Απάντηση

Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$  ονομάζεται κάθε συνάρτηση  $F$  που είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  και ισχύει  $F'(x) = f(x)$ , για κάθε  $x \in \Delta$ .

### Αποδείξεις

**112.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και
- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**1998, 2001, 2003, 2010, 2015, 2022, 2025**

### Απάντηση

- Κάθε συνάρτηση της μορφής  $G(x) = F(x) + c$ , όπου  $c \in \mathbb{R}$ , είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , αφού  $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ , για κάθε  $x \in \Delta$ .
- Έστω  $G$  είναι μια άλλη παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ . Τότε για κάθε  $x \in \Delta$  ισχύουν  $F'(x) = f(x)$  και  $G'(x) = f(x)$ , οπότε  $G'(x) = F'(x)$ , για κάθε  $x \in \Delta$ . Άρα υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε  $G(x) = F(x) + c$ , για κάθε  $x \in \Delta$ .

## ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

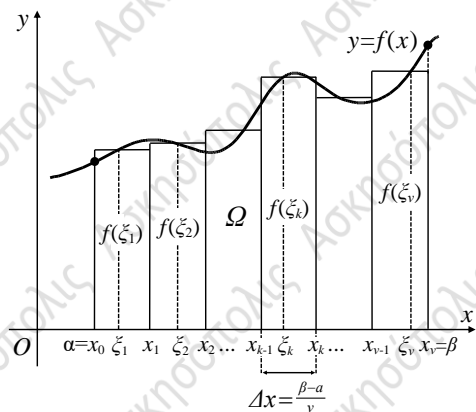
### Ορισμοί

**113.** Να δώσετε τον ορισμό του εμβαδού χωρίου  $\Omega$  που ορίζεται από τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  με  $f(x) \geq 0$ , τον άξονα  $x$  και τις ευθείες  $x = a$  και  $x = b$ .

### Απάντηση

Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  εργαζόμαστε ως εξής:

- Χωρίζουμε το διάστημα  $[a, b]$  σε  $n$  ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , με τα σημεία  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ .
- Σε κάθε υποδιάστημα  $[x_{k-1}, x_k]$  επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο  $\xi_k$  και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση  $\Delta x$  και ύψη τα  $f(\xi_k)$ . Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι  $S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x = [f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)]\Delta x$



- Υπολογίζουμε το  $\lim_{v \rightarrow +\infty} S_v$ . Αποδεικνύεται ότι το  $\lim_{v \rightarrow +\infty} S_v$  υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων  $\xi_k$ . Το όριο αυτό ονομάζεται εμβαδόν του επιπέδου χωρίου  $\Omega$  και συμβολίζεται με  $E(\Omega)$ . Είναι φανερό ότι  $E(\Omega) \geq 0$ .

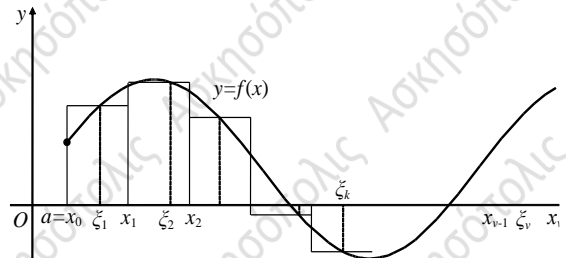
**114. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ .**

**Απάντηση**

Με τα σημεία  $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_v = \beta$  χωρίζουμε το διάστημα  $[\alpha, \beta]$  σε  $v$  ισομήκη υποδιαστήματα μήκους

$$\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{v}.$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$  για κάθε  $k \in \{1, 2, \dots, v\}$ , και σχηματίζουμε το άθροισμα  $S_v = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_k)\Delta x + \dots + f(\xi_v)\Delta x$



το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:  $S_v = \sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x$ . Αποδεικνύεται ότι το όριο του αθροίσματος

$S_v$ , δηλαδή το  $\lim_{v \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x \right)$  (1) υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των

ενδιάμεσων σημείων  $\xi_k$ . Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς

συνάρτησης  $f$  από το  $\alpha$  στο  $\beta$  και συμβολίζεται με  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ . Δηλαδή  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{v \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x \right)$ .

**Αποδείξεις**

**115. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 1$  είναι  $E(\Omega) = \frac{1}{3}$ .**

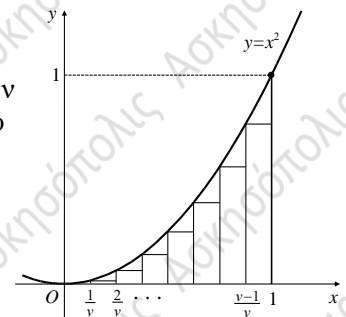
Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα:  $1^2 + 2^2 + \dots + v^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$  όπου  $v$  φυσικός αριθμός.

**Απάντηση**

- Χωρίζουμε το διάστημα  $[0, 1]$  σε  $v$  ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους  $\Delta x = \frac{1}{v}$ , με άκρα τα σημεία:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{v}, x_2 = \frac{2}{v}, \dots, x_{v-1} = \frac{v-1}{v}, x_v = \frac{v}{v} = 1.$$

- Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την ελάχιστη τιμή της  $f$  σε καθένα από αυτά. Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το άθροισμα,  $\epsilon_v$ , των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων.



$$\begin{aligned} \text{Δηλαδή, το: } \epsilon_v &= f(0)\frac{1}{v} + f\left(\frac{1}{v}\right)\frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right)\frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v-1}{v}\right)\frac{1}{v} \\ &= \frac{1}{v} \left[ 0^2 + \left(\frac{1}{v}\right)^2 + \left(\frac{2}{v}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v-1}{v}\right)^2 \right] = \frac{1}{v^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (v-1)^2] \\ &= \frac{1}{v^3} \frac{(v-1) \cdot v(2v-1)}{6} = \frac{2v^2 - 3v + 1}{6v^2}. \end{aligned}$$

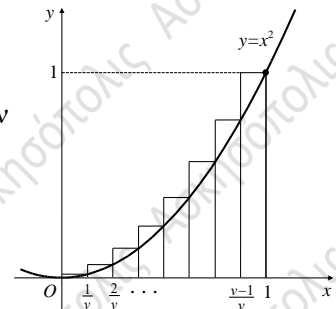
• Αν τώρα σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα και ύψη την μέγιστη τιμή της  $f$  σε καθένα απ' αυτά, τότε το άθροισμα  $E_v = f\left(\frac{1}{v}\right)\frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right)\frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right)\frac{1}{v}$  των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Είναι όμως,

$$E_v = f\left(\frac{1}{v}\right)\frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right)\frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right)\frac{1}{v} = \frac{1}{v} \left[ \left(\frac{1}{v}\right)^2 + \left(\frac{2}{v}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v}{v}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{v^3} (1^2 + 2^2 + \dots + v^2) = \frac{1}{v^3} \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} = \frac{2v^2 + 3v + 1}{6v^2}.$$

Το ζητούμενο, όμως, εμβαδόν  $E$  βρίσκεται μεταξύ των  $\varepsilon_v$  και  $E_v$ . Δηλαδή ισχύει  $\varepsilon_v \leq E \leq E_v$ , οπότε

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \varepsilon_v \leq E \leq \lim_{v \rightarrow \infty} E_v. \text{ Επειδή } \lim_{v \rightarrow \infty} \varepsilon_v = \lim_{v \rightarrow \infty} E_v = \frac{1}{3}, \text{ έχουμε } E = \frac{1}{3}.$$



## Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

### Ορισμοί

**116.** Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $a$  ένα σημείο του  $\Delta$ . Τι γνωρίζετε για την συνάρτηση  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ; Δώστε μία εποπτική ερμηνεία για αυτό.

#### Απάντηση

Η συνάρτηση  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , δηλαδή

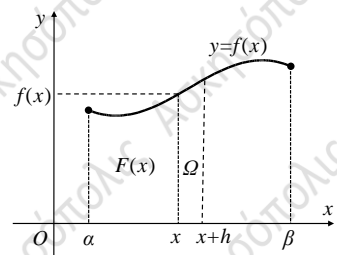
$$F'(x) = \left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

• Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ως εξής:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt + \int_a^x f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt = \text{Εμβαδόν του χωρίου } \Omega \approx f(x) \cdot h, \text{ για}$$

μικρά  $h > 0$ . Άρα, για μικρά  $h > 0$  είναι  $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$ , οπότε

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$



**117.** Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

2018, 2024

#### Απάντηση

Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[a, \beta]$ ,

$$\text{τότε: } \int_a^\beta f(x) dx = [G(x)]_a^\beta = G(\beta) - G(a)$$

**118.** Ποιος είναι ο τύπος της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης;

#### Απάντηση

$$\int_a^\beta f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x)g(x) dx \text{ όπου } f', g' \text{ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο } [a, \beta].$$

**119.** Ποιος είναι ο τύπος της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής.

## Απάντηση

$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$ , όπου  $f, g'$  είναι συνεχείς συναρτήσεις,  $u = g(x)$ ,  $du = g'(x)dx$  και  $u_1 = g(\alpha)$ ,  $u_2 = g(\beta)$ .

## Αποδείξεις

**120. Να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.**

**2002, 2008, 2013, 2018**

## Απάντηση

Η συνάρτηση  $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ .

Επειδή και η  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , θα υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε  $G(x) = F(x) + c$  (1). Από την (1), για  $x = \alpha$ , έχουμε  $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$  οπότε  $c = G(\alpha)$ .

Επομένως,  $G(x) = F(x) + G(\alpha)$  οπότε, για  $x = \beta$ , έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha) \text{ και άρα προκύπτει } \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

## ΕΜΒΑΔΟΝ ΧΩΡΙΟΥ

## Ορισμοί

**121. Αν  $f$  συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε να αναφέρετε με τι ισούται το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από την  $C_f$  τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$ .**

## Απάντηση

Το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  ισούται με  $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ .

**122. Αν  $f$  συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  τότε να αναφέρετε με τι ισούται το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από την  $C_f$  τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$ .**

## Απάντηση

Το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  ισούται με  $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$ .

**123. Αν  $f, g$  συνεχείς συναρτήσεις στο  $[\alpha, \beta]$  τότε να αναφέρετε με τι ισούται το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από την  $C_f$ , την  $C_g$  και τις ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$ .**

## Απάντηση

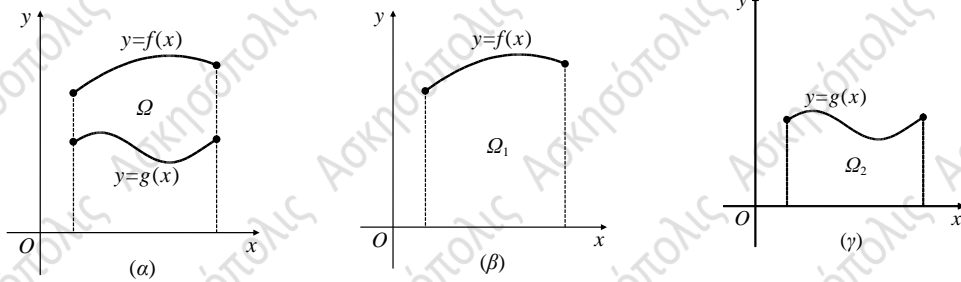
Το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  ισούται με  $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|dx$ .

**Αποδείξεις**

**124.** Έστω δυο συναρτήσεις  $f, g$  συνεχείς στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  με  $f(x) \geq g(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  και τις ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$  είναι:  $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)] dx$ .

**Απάντηση**

Παρατηρούμε ότι:  $E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$ . Επομένως  $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$ .

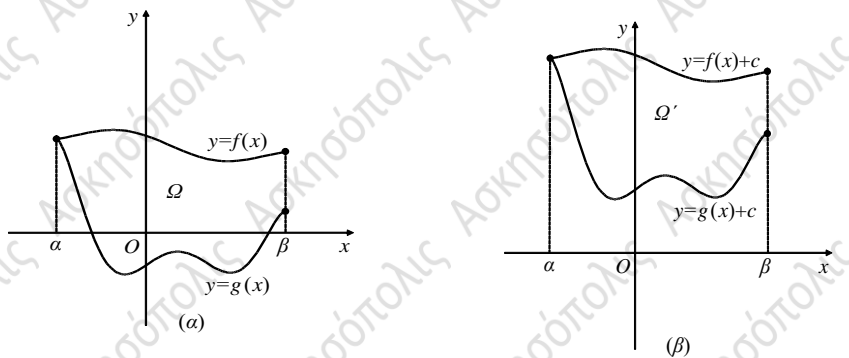


**125.** Έστω δυο συναρτήσεις  $f, g$  συνεχείς στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  με  $g(x) \leq f(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  και τις ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$  είναι:  $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)] dx$ .

**Απάντηση**

Επειδή οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $[\alpha, \beta]$ , θα υπάρχει αριθμός  $c \in \mathbb{R}$  τέτοιος ώστε  $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ . Είναι φανερό ότι το χωρίο  $\Omega$  έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο  $\Omega'$ . Επομένως έχουμε:  $E(\Omega) = E(\Omega') = \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x) + c) - (g(x) + c)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$ .

Άρα  $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$ .



**126.** Έστω μια συνάρτηση  $g$  συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  με  $g(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $g$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$  είναι:  $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ .

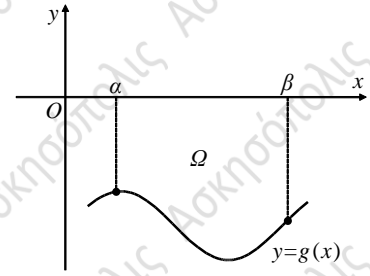
**Απάντηση**

Επειδή ο άξονας  $x'$  είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = 0, \text{ έχουμε } E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx = \int_a^\beta [-g(x)] dx = -\int_a^\beta g(x) dx .$$

Επομένως, αν για μια συνάρτηση  $g$  ισχύει  $g(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ ,

$$\text{τότε } E(\Omega) = -\int_a^\beta g(x) dx .$$





[www.Askisopolis.gr](http://www.Askisopolis.gr)