Ρυθμοι μεταβολης (2.4)

Υποδειγματικη λυση των ασκησεων του σχελικου βιβλιου

- Στα προβληματα κινησης η μεταβλητη(αν δεν δινεται) εννοειται ότι είναι ο χρονος t.
- Από τη φυσικη ξερουμε ότι: υ(t)=s΄(t) και α(t)=υ΄(t) οποτε και α(t)=υ΄(t)=s΄΄(t)
- Προσεχουμε τη "μεταφραση" των δεδομενων και των ζητουμενων και επωφελουμαστε σχεσεις γεωμετριας(ομοια τριγωνα-Π.Θ) που προκυπτουν από το σχημα και οι οποιες συνδεουν τα μεταβλητα μεγεθη.

Α΄ΟΜΑΔΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΛΥΣΗ

Ισχυει	Να βρεθει
$r(t)=4-t^2$	Ε΄(t)=; (για t=1)
$E(t)=4\pi r^2(t)$	V΄(t)=; (για t=1)
$V(t)=\frac{4}{3}\pi r^3(t)$	

$E(t)=4\pi r^2(t) \quad \Rightarrow$

$E'(t)=8\pi r(t)r'(t) \quad \Rightarrow \qquad (r(t)=4-t^2,\ r'(t)=-2t)$

$E'(t)=8\pi(4-t^2)(-2t) \quad \Rightarrow \qquad (t=1)$

$E'(1)=8\pi(4-1)(-2) \quad \Rightarrow$

$E'(1)=48\pi \quad cm^2/sec$

$V(t)=\frac{4}{3}\pi r^3(t) \quad \Rightarrow$

$V'(t)=4\pi r^2(t)r'(t) \quad \Rightarrow \qquad (r(t)=4-t^2,\ r'(t)=-2t)$

$V'(t)=4\pi(4-t^2)^2(-2t) \quad \Rightarrow \qquad (t=1)$

$V'(1)=4\pi(4-1)^2(-2) \quad \Rightarrow \quad V'(1)=-72\pi \quad cm^3/sec$

ΑΣΚΗΣΗ 2

ΛΥΣΗ

Ισχυει	Να βρεθει
$V'(t)=100$	$r'(t_0)=;$ (για $r(t_0)=9$)

$V(t)=\frac{4}{3}\pi r^3(t)$ $\Rightarrow$

$V'(t)=4\pi r^2(t)r'(t)$ $\Rightarrow$ ($V'(t)=100$)

$100=4\pi r^2(t)r'(t)$ $\Rightarrow$ ($t=t_0$)

$100=4\pi r^2(t_0)r'(t_0)$ $\Rightarrow$ ($r(t_0)=9$)

$100=4\pi r81r'(t_0)$ $\Rightarrow$

$r'(t_0)=\frac{25}{81\pi}$ cm / sec

ΑΣΚΗΣΗ 3

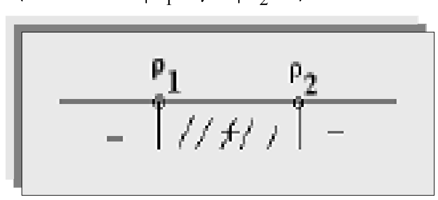
ΛΥΣΗ

Θελουμε τα x για τα οποια $P'(x)\succ 0$

Ειναι $P(x)=\Pi(x)-K(x)=420x-\frac{1}{3}x^3+20x^2-600x-1000$

οποτε $P'(x)=-x^2+40x-180$

Βρισκουμε τις ριζες (εστω ρ_1 , ρ_2)



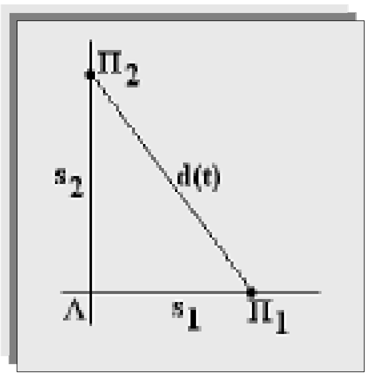
Αρα ειναι $P'(x)\succ 0$ οταν $\rho_1 \prec x \prec \rho_2$

ΑΣΚΗΣΗ 4

ΛΥΣΗ

i) $s_1 = \upsilon_1 \cdot t = 15t$ και $s_2 = \upsilon_2 \cdot t = 20t$

ii) Αρκει η παραγωγος d΄(t) να βγει θετικος αριθμος.



Από Πυθαγορειο θεωρημα εχουμε :

$d^2(t) = s_1^2(t) + s_2^2(t) \quad \Rightarrow$

$(\; s_1 = 15t \;,\; s_2 = 20t \;)$

$d^2(t) = (15t)^2 + (20t)^2 \quad \Rightarrow$

$d^2(t) = 225t^2 + 400t^2 \quad \Rightarrow$

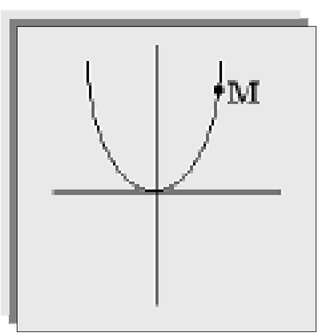
$d^2(t) = 625t^2 \quad \Rightarrow$

$d(t) = 25t \quad \Rightarrow d'(t) = 25 \;\; km/h$

ΑΣΚΗΣΗ 5

ΛΥΣΗ

Ισχυει	Να βρεθει
$y(t) = \frac{1}{4}x^2(t)$, $x'(t) \succ 0$	$M(x(t), y(t))$ ώστε $x'(t) = y'(t)$



Ειναι : $x'(t) = y'(t) \Rightarrow x'(t) = \left(\frac{1}{4}x^2(t)\right)' \Rightarrow$

$x'(t) = \frac{1}{2}x(t) \cdot x'(t) \quad \Rightarrow$ (φευγει το x(t))

$x(t) = 2$ αρα $y(t) = 1$ αρα Μ(2,1)

Β΄ΟΜΑΔΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΛΥΣΗ

Ισχυει	Να βρεθει
Ε΄(t)=10	V΄(t)=; (όταν r(t)=85)

Δουλευουμε αυτό που ισχυει και :

$$E'(t)=10 \quad \Rightarrow$$

$$\left(4\pi r^2(t)\right)' = 10 \quad \Rightarrow$$

$$8\pi r(t) r'(t) = 10 \quad \Rightarrow \qquad (r(t)=85)$$

$$8\pi 85 r'(t) = 10 \quad \Rightarrow$$

$$r'(t) = \frac{10}{8\pi 85} \text{ cm/sec} \qquad (1)$$

$$V'(t) = \left(\frac{4}{3}\pi r^3(t)\right)' = 4\pi r^2(t) r'(t) =$$

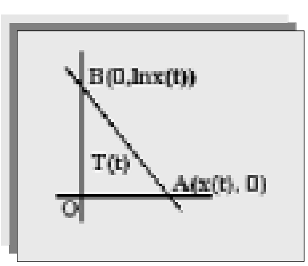
(χρηση της (1) και r(t)=85) =

$$= 4\pi 85^2 \frac{10}{8\cdot\pi\cdot 85} = 425 \text{ cm}^3/\text{sec}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

ΛΥΣΗ

Ισχυει	Να βρεθει
Α(x,0), Β(0,lnx), x΄(t)=4	Τ΄(t)=; (όταν x(t)=5)



$$T(t) = \frac{1}{2}\cdot x(t)\cdot \ln x(t) \quad \Rightarrow \quad \text{(παραγωγιζουμε και τα δυο μελη)}$$

$$T'(t) = \frac{1}{2}\cdot\left(x'(t)\cdot \ln x(t) + x(t)\cdot\frac{1}{x(t)}x'(t)\right) \quad \Rightarrow$$

(x΄(t)=4 , x(t)=5)

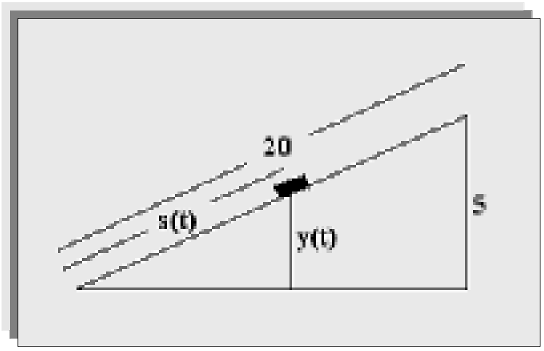
$$T'(t) = 2(\ln 5 + 1) \quad \text{cm}^2/\text{sec}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

ΛΥΣΗ

Ισχυει	Να βρεθει
υ(t)=3 (η´ s´(t)=3)	y´(t)=;

Θυμομαστε: υ(t)=s´(t)



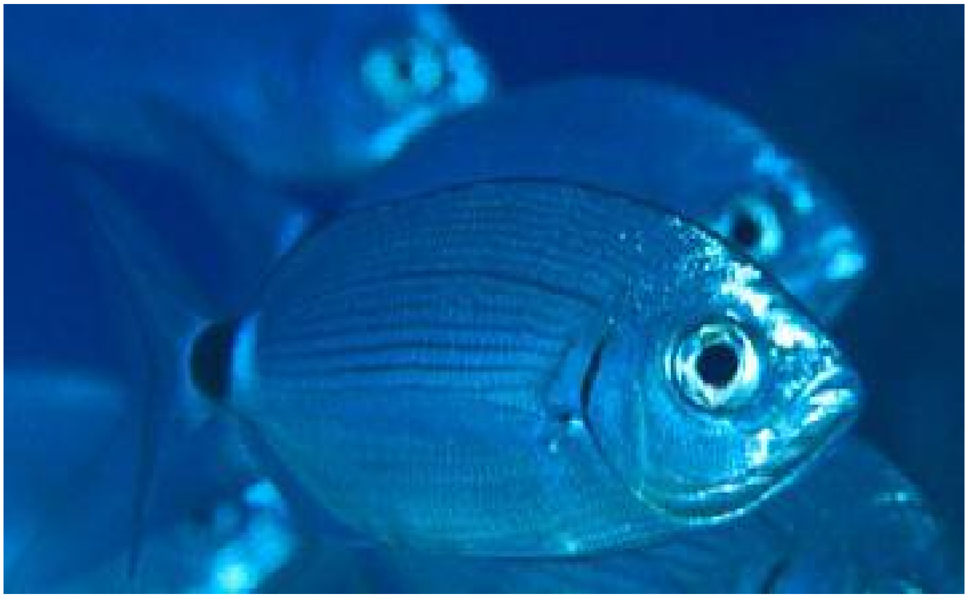
Θελουμε να βρουμε μια σχεση που να περιεχει το y(t) για να την παραγωγισουμε. Την κατασκευαζουμε από τα ομοια τριγωνα που σχηματιζονται.

$$\frac{y(t)}{5} = \frac{s(t)}{20} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{4}s(t) \quad \Rightarrow$$

(παραγωγιζουμε και τα δυο μελη)

$$y'(t) = \frac{1}{4}s'(t) \quad \Rightarrow \qquad \text{(s´(t)=υ(t)=3)}$$

$$y'(t) = \frac{3}{4} \quad m/sec$$

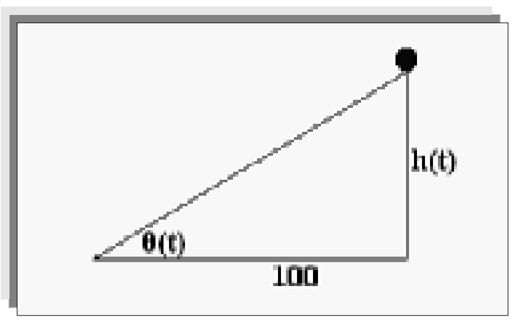


ΑΣΚΗΣΗ 4

ΛΥΣΗ

Ισχυει	Να βρεθει
υ(t)=50 (η΄ h΄(t)=50)	θ΄(t)=; (όταν h=100)

Θυμομαστε: υ(t)=h΄(t)



Εστω t_0 η ζητουμενη χρονικη στιγμη (που το μπαλονι βρισκεται σε υψος 100).
Θελουμε μια σχεση που να εμφανιζει την θ(t) (Την κατασκευαζουμε από τον ορισμο της εφαπτομενης θ(t))

$$\varepsilon\varphi\theta(t) = \frac{h(t)}{100}$$ ⇒ (παραγωγιζουμε και τα δυο μελη)

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = \frac{h'(t)}{100} \Rightarrow$$ (h΄(t)=50)

$$\frac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Την ζητουμενη χρονικη στιγμη t_0 το h=100 οποτε το τριγωνο είναι ισοσκελες , οποτε $\theta(t_0)=45°$, οποτε η (1) για $t=t_0$ γινεται:

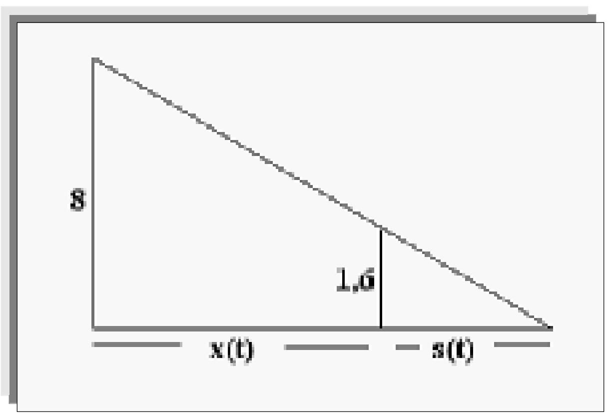
$$\frac{\theta'(t_0)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$ (οπου $\theta(t_0)=45°$) $\theta'(t_0) = \frac{1}{4}$ rad/min

ΑΣΚΗΣΗ 5

ΛΥΣΗ

Ισχυει	Να βρεθει
υ(t)=0,8 m/sec (η΄ x΄(t)=0,8 m/sec)	$\upsilon(t)_{\iota\sigma\kappa\iota o\upsilon}$=; (η΄ s΄(t)=;)

Θυμομαστε: υ(t)=x΄(t)



Θελουμε μια σχεση που να εμφανιζει το s(t) (Την κατασκευαζουμε από τα ομοια τριγωνα που σχηματιζονται)

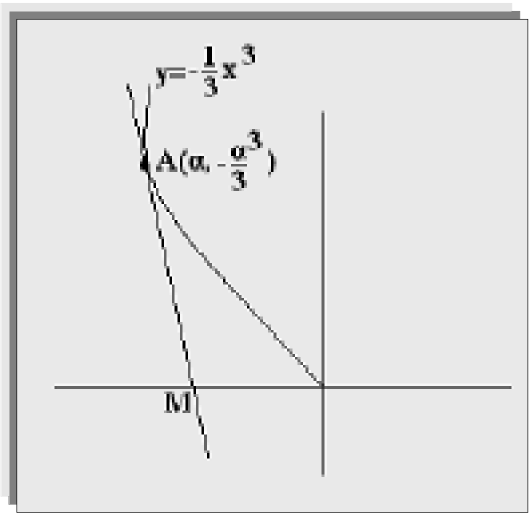
$\frac{1,6}{8} = \frac{s(t)}{x(t)+s(t)}$ $\Rightarrow$ (χιαστι και λυνουμε ως προς s(t))

$s(t) = \frac{1}{4}x(t)$ $\Rightarrow$ (παραγωγιζουμε και τα δυο μελη)

$s'(t) = \frac{1}{4}x'(t) = \frac{1}{4}\cdot 0,8 = 0,2$ m/sec

ΑΣΚΗΣΗ 6

ΛΥΣΗ



Προφανως η τελικη μεταβλητη είναι το t και όλα τα αλλα μεγεθη εξαρτωνται από το t(δηλ. τα x,y,α είναι x(t),y(t),α(t)).
Τα φωτα εχουν την διευθυνση της εφαπτομενης.
Θα βρουμε την τετμημενη του M που είναι το σημειο που τεμνει η εφαπτομενη τον αξονα xx΄.
Θα βρουμε λοιπον την εξισωση της εφαπτομενης στο A.

y-f(α)=f΄(α)(x-α) $\Rightarrow$ πραξεις… και… $y+\frac{1}{3}\alpha^3=-\alpha^2(x-\alpha)$

Η παραπανω για y=0 δινει: $x=\frac{2}{3}\alpha$

Αρα το σημειο M εχει τετμημενη: $\frac{2}{3}\alpha$ (δηλ. $\frac{2}{3}\alpha(t)$)

Ας παραγωγισουμε την τετμημενη αυτή:

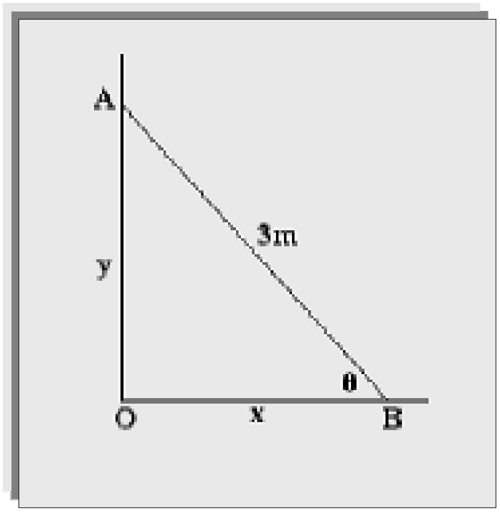
$\left(\frac{2}{3}\alpha(t)\right)'=\frac{2}{3}\alpha'(t)=$ (οπου α΄(t)=-α(t)) $=-\frac{2}{3}\alpha(t)$ (1)

Μας ενδιαφερει η παραγωγος τη στιγμη που το περιπολικο εχει τετμημενη -3 (δηλ:α(t)=-3)

Θετωντας στην σχεση (1) οπου α(t)=-3 εχουμε αποτελεσμα: 2

ΑΣΚΗΣΗ 7

ΛΥΣΗ



Προφανως η τελικη μεταβλητη είναι το t και όλα τα αλλα μεγεθη εξαρτωνται από το t (δηλ.τα x,y,θ είναι x(t),y(t),θ(t)).

Μεταφραζοντας προσεχτικα και εξαντλητικα τα δεδομενα της υποθεσης εχουμε:

$x'(t) = 0{,}1\,, \qquad y(t_0) = 2{,}5\,, \qquad x^2(t) + y^2(t) = 9$

Μπορουμε επισης να βρουμε και το $x(t_0)$ από το τριγωνο OAB με Π.Θ:

$x(t_0) = \sqrt{9 - y^2(t_0)} = \sqrt{2{,}75}$

i) Θελουμε να βρουμε την $\theta'(t_0)$

Ας βρουμε πρωτα την θ΄(t) και βαζουμε οπου t το t_0

Το θ(t) εμφανιζεται και στον ορισμο του ημθ αλλα και του συνθ στο τριγωνο OAB , είναι δηλαδη συνθ=$\frac{x}{3}$ και ημθ=$\frac{y}{3}$

Ποιο από τα δυο όμως θα κρατησουμε για να το παραγωγισουμε;

Θα κρατησουμε το συνθ=$\frac{x}{3}$ διοτι μετα την παραγωγιση θα εμφανισει το x΄(t) το οποιο είναι γνωστο από την υποθεση.

Εχουμε λοιπον:

$\sigma\upsilon\nu\theta(t) = \frac{x(t)}{3}$ $\Rightarrow$ (παραγωγιζουμε και τα δυο μελη)

$-\eta\mu\theta(t)\theta'(t) = \frac{1}{3}x'(t) \quad \Rightarrow$

$\theta'(t) = -\frac{x'(t)}{3\eta\mu\theta(t)} \quad \Rightarrow$ (θετουμε $t = t_0$)

$$\theta'(t_0) = -\frac{x'(t_0)}{3\eta\mu\theta(t_0)} = \frac{x'(t_0)}{3\frac{y(t_0)}{3}} = \frac{-0{,}1}{2{,}5} = -\frac{1}{25}$$

ii) Θελουμε να βρουμε την υ(t), δηλαδη την $y'(t_0)$ (αφου ως γνωστον η ταχυτητα είναι η παραγωγος της αποστασης)

Από: $x^2(t)+y^2(t)=9$ $\Rightarrow$ (παραγωγιζουμε και τα δυο μελη)

$2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0 \Rightarrow$

$y'(t)=-\dfrac{x(t)}{y(t)}x'(t) \Rightarrow$ (θετουμε $t=t_0$)

$$y'(t_0)=-\frac{x(t_0)}{y(t_0)}x'(t_0)=-\frac{\sqrt{2,75}}{2,5}\cdot 0,1=-\frac{\sqrt{2,75}}{25}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

ΛΥΣΗ

Προφανως η τελικη μεταβλητη είναι το t και όλα τα αλλα μεγεθη εξαρτωνται από το t (δηλ.τα x,y είναι x(t),y(t)).

Μεταφραζοντας προσεχτικα και εξαντλητικα τα δεδομενα της υποθεσης-και θεωρωντας μονοι μας t_0 την χρονικη στιγμη που το κινητο βρισκεται στη θεση Α-εχουμε: $x(t_0)=\dfrac{1}{2}$, $y(t_0)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $y'(t_0)=-3$

Ψαχνουμε το $x'(t_0)$.

Αρκει να βρουμε το x΄(t) και να βαλουμε $t=t_0$

Από : $x^2(t)+y^2(t)=1$ $\Rightarrow$ (παραγωγιζουμε και τα δυο μελη)

$2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0 \Rightarrow$

$x'(t)=-\dfrac{y(t)}{x(t)}y'(t) \Rightarrow$ (θετουμε $t=t_0$)

$$x'(t_0)=-\frac{y(t_0)}{x(t_0)}y'(t_0) =\ldots= 3\sqrt{3}$$

Τελος

- Μπορουμε επισης να παραγωγισουμε σχεδον ολες τις παραπανω συνθετες συναρτησεις που συναντησαμε και με τον κανονα της αλυσιδας.Η επιλογη είναι θεμα δικης μας γνωσης και πειρας.Δεν βλεπω όμως τον λογο, ειδικα αφου και το σχολικο το αποφευγει.
- **Ενδιαφερον** παρουσιαζουν οι ασκησεις **B6,B7,B8** (χωρις να υστερουν και οι άλλες)
- Ζηταω την κατανοηση σας για τα ορθογραφικα, και όχι μονο, λαθη.