

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ - ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

1. Έστω συνάρτηση f παρ/μη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = x \cdot f(\eta\mu x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. να αποδείξετε ότι:

i) Για τη συνάρτηση $g(x) = f(\eta\mu x)$ ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[0, \pi]$.

ii) Υπάρχει $\theta \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f'(\theta) = g(\theta)$.

2. Δείξτε ότι: i) για την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = (x^2 - 5x + 6) \ln x$, υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^+$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$.

ii) Υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

3. Έστω συνάρτηση f παρ/μη στο $[0, \pi]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \sigma\varphi\xi = 0$.

4. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1, e]$ και παρ/μη στο $(1, e)$ για την οποία ισχύει $f(1) - f(e) = e^2 - 3e + 1$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{1 + 3\xi - 2\xi^2}{\xi}$.

5. Δίνεται συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παρ/μη στο $[a, \beta]$ με $f^2(a) - f^2(\beta) = a^2 - \beta^2$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x_0)f'(x_0) = x_0$.

6. Έστω f συνεχής στο $[a, \beta]$ και παρ/μη στο (a, β) με $e^{\frac{\lambda}{\kappa}a} f(a) = e^{\frac{\lambda}{\kappa}\beta} f(\beta)$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\kappa f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$.

7. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 4]$ και παρ/μη στο $(0, 4)$ με $f(4) = 0$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $2f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

8. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παρ/μη στο $[a, \beta]$ με $f(a) + a^2 = f(\beta) + \beta^2 = 0$.

Υπάρχει επίσης αριθμός $\gamma \in (a, \beta)$ με $f(\gamma) + (a + \beta)\gamma - a\beta = 0$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

- 9.** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$ και παρ/μη στο (a, β) με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{1}{a - x_0} + \frac{1}{\beta - x_0}.$$

- 10.** Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παρ/μη στο $[a, \beta]$ για την οποία ισχύουν:

i) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ ii) $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$

iii) $f(a)f'(a) = f(\beta)f'(\beta)$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) < 0$.

- 11.** Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παρ/μη στο $[2, 5]$ με $f(2) = 2$, $f(3) > 3$, $f(4) < 4$, $f(5) = 5$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής παράστασης της f' με τετμημένη $\xi \in (2, 5)$, στο οποίο η εφαπτόμενη ευθεία είναι παράλληλη με τον $x'x$ άξονα.

- 12.** Έστω συνάρτηση f παρ/μη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = a^2 + a\beta + \beta^2$, $f(2) = a^2 - a\beta + \beta^2$ και $f(4) = a^2 + \beta^2$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 4)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 0$.

- 13.** Έστω f συνεχής στο $[a, \beta]$ και παρ/μη στο (a, β) .

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 για τα οποία ισχύουν:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2 \cdot \frac{f(a) - f(\beta)}{a - \beta}.$$

- 14.** Έστω f, g συνεχείς στο $[a, \beta]$ και παρ/μες στο (a, β) με $g(a) \neq g(\beta)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\beta) - f(a)}{g(\beta) - g(a)}$.

(Θεώρημα Cauchy)

15. Αν $0 < a < \beta$ να αποδείξετε ότι $a \cdot e < \left(\frac{\beta^\beta}{a^a} \right)^{\frac{1}{\beta-a}} < \beta \cdot e$.

16. Να αποδείξετε ότι $2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{\pi}{e}$.

17. Να αποδείξετε ότι $1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ με $x \in (-1, 0)$.

18. Έστω f συνεχής στο $[a, \beta]$ και παρ/μη στο (a, β) .

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2f'(\xi).$$

19. Έστω f συνεχής στο $[a, \beta]$ και παρ/μη στο (a, β) .

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 5f'(\xi).$$

20. Έστω $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.

Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $7f(x_0) = 4f(a) + 3f(\beta)$.

ii) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε να ισχύει $\frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{4}{f'(\xi_2)} = \frac{7}{f'(\xi)}$.