

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τα κυρτά τα κοίλα και τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν):

$$\alpha) g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ -\sqrt{-x}, & x \leq 0 \end{cases} \quad \beta) g(x) = \begin{cases} e^{x+1} + 2, & x \leq -1 \\ -3x^2 - 6x - 3, & x > -1 \end{cases}$$

2. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^3 + \lambda x^2 + 12x - 1$ έχει σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη.

3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2\lambda e^x - x^2$, $\lambda > 0$ έχει ένα μόνο σημείο καμπής το οποίο κινείται σε παραβολή.

4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = 2x^4 + 4\lambda x^3 + 3(2\lambda^2 - 4\lambda + 5)x^2 + \lambda x + 1, \lambda \in \mathbb{R}, \text{ δεν έχει σημεία καμπής.}$$

5. Αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\lambda x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ δεν έχει σημεία καμπής, να αποδείξετε ότι είναι κυρτή.

6. Έστω f παρ/μη $:[-2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ η οποία είναι κυρτή.

Να αποδείξετε ότι $3f(-2) + f(6) > 4$.

7. Έστω η παρ/μη συνάρτηση $f : [1, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(3) = 4$ η οποία είναι κοίλη.

Να αποδείξετε ότι $5f(1) + 2f(8) < 28$.

8. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $(f'(x))^2 + f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $e^{f(\frac{a+\beta}{2})} < \frac{e^{f(a)} + e^{f(\beta)}}{2}$ για κάθε $a \neq \beta$.

9. (Βασική άσκηση)

Έστω η συνάρτηση f παρ/μη σε ένα διάστημα Δ .

Αν η f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) στο Δ , να αποδείξετε ότι

$$f(a) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) \quad (\text{αντίστοιχα } \leq) \text{ για κάθε } a, \beta \in \Delta.$$

(Ανίσωση Jensen)

10. Έστω f παρ/μη συνάρτηση στο $[a, \beta]$ με $f(a) = 0 = f(\beta)$.

Αν η f είναι κυρτή στο $[a, \beta]$ να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ στο (a, β) ενώ, αν η f είναι κοίλη στο $[a, \beta]$ τότε $f(x) > 0$ στο (a, β) .

Ισχύει και το αντίστροφο;

11. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 ένα κρίσιμο σημείο της. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν η f είναι κυρτή, τότε το $f(x_0)$ είναι ελάχιστο της f .

β) Αν η f είναι κοίλη, τότε το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f .

γ) Αν η f είναι δύο φορές παρ/μη και συνεχής με $f''(x) \neq 0$, το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατό της.

δ) Αν η f είναι δύο φορές παρ/μη και το x_0 είναι κρίσιμο σημείο αλλά δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f , τότε η C_f παρουσιάζει καμπή στο x_0 .

12. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παρ/μη και κυρτή ή κοίλη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι έχει το πολύ ένα ακρότατο στο $\mathbb{R}$.

13. Έστω συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παρ/μη και κοίλη της οποίας η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{f(x)}{2}$ για κάθε $x > 0$.

14. α) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παρ/μη, για την οποία ισχύει

$$\frac{f''(x) + f(x)}{2} > f'(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-x}$ είναι κυρτή.

β) Αν η $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παρ/μη με $f'''(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f'(0) = 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

15. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παρ/μη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $f''(x)f(x) > (f'(x))^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δίνεται επίσης η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \ln f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι κυρτή.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)}$.