

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^\rho \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } \rho > 1.$$

Να αποδείξετε ότι είναι σταθερή.

2. Να αποδείξετε την ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ με $f(x) \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right) = x$ για κάθε $x > 0$.

ι) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι σταθερή.

ii) Αν $f(1) = 1$ να αποδείξετε ότι $f(x) = x \quad \forall x > 0$.

4. Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f'(x) = -e^{-x}(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = \pi.$

ε) $x^2 f'(x) + \ln x = 1, \quad x > 0 \text{ και } f(1) = 2.$

ζ) $f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$

η) $f'(x) = \frac{x \ln x + 1}{xe^{-x}}, \quad x > 0 \text{ και } f(e) = e^e.$

ι) $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ 3x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases} \text{ και } f(1) = 2.$

5. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα:

α) $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$ ι) $g(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ β) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 2 \\ \ln(x-1), & x > 2 \end{cases}$ γ) $h(x) = \begin{cases} 1 - e^{x-1}, & x \geq 1 \\ \ln(1-x), & x < 1 \end{cases}$

δ) $h(x) = \eta\mu^2 x - \eta\mu x, \quad x \in (0, \pi]$ ε) $h(x) = (2x^2 - 8x) \ln x - x^2 + 8x$

6. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση:

α) $f(x) = 3x^3 - \lambda x^2 + 9x - 1$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $f(x) = (\lambda + 2)x^3 - 3\lambda x^2 + 9\lambda x + 4$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

7. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο διακεκριμένων λύσεων της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x \cdot \ln x = 1$ υπάρχει τουλάχιστον μία λύση της εξίσωσης $\ln x^x \cdot \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$.

8. Αν ρ_1, ρ_2 είναι δύο ρίζες της εξίσωσης $x^5 - 5x^3 + 10ax^2 + 5\beta x + 3 = 0$, $a, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 4ax = 3x^2 - \beta$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .

9. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(1-x)e^x = 1$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

10. Να λύσετε τις εξισώσεις: ι) $xe^x = e^x - 1$ ιι) $x \ln x = x - 1$.

11. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{2x} - 2x^2 = ax + \beta$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.

12. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παρ/μη στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

α) Μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $f'(x) = 0$ υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f''(x) = 0$.

β) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης $f'(x) = 0$ υπάρχει το πολύ μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Αν η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο διαφορετικές ρίζες.

13. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 3x^4 - 2\lambda x^3 + \mu x + 1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές των παραμέτρων λ, μ για τις οποίες η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$ και η κλίση της στο 3 να είναι εξαπλάσια της κλίσης της στο 2.

14. Έστω f παρ/μη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^5(x) + 2f^3(x) + f(x) = x^3 + 2x + e^{3x}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

15. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + (a+5)x + 4$, $a \in \mathbb{R}$.

Βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ ώστε η f να μην έχει ακρότατα.

16. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

i) Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδείξετε ότι $\lambda^{\lambda+1} > (\lambda+1)^\lambda$ για κάθε $\lambda > e$.

iii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς π^e και e^π .

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 = 3^x$ έχει μοναδική ρίζα στο $(e, +\infty)$ η οποία και να βρεθεί.

v) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x^e$ για κάθε $x > 0$.

17. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 2 \cdot \frac{x-1}{x+1} - \ln x$, $x > 0$.

i) Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

ii) Να αποδείξετε ότι $\ln \frac{\beta}{a} > 2 \cdot \frac{\beta-a}{\beta+a}$ με $0 < a < \beta$.

18. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 \cdot e^{1-x}$

i) Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

ii) Να αποδείξετε ότι $e^{\pi-e} > \left(\frac{\pi}{e}\right)^2$.

19. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

α) $xe^x - 2e^x + e \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) $x^2(\ln x - 1) + e^2 \geq ex$ για κάθε $x > 1$.

20. Να βρείτε το σύνολο τιμών κάθε μίας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = e^x + x^3 + 1$ β) $f(x) = e^x + e^{-x}$

γ) $f(x) = \ln x + \frac{1}{x-2}$ στο $(0, 2)$.

δ) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x + 1$ στο $[-\pi, \pi]$.

21. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $e^{2x} + x - 1 = 0$ β) $x^3 + \ln(x-1) = 8$ γ) $e^x + \ln(x+1) - 1 = 0$

δ) $x^2 + \ln x + x = 2$ ε) $3^x + 4^x = 5^x$ στ) $5^x + 12^x = 13^x$ ζ) $e^{2x} + e^x = 2$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2x^3 + x - \frac{2}{x} + 1$ με $x \in [1, 2]$.

α) Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 10$ έχει μοναδική λύση στο $[1, 2]$.

23. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^4 + 4 = 12x^2 - 4x^3$ έχει ακριβώς τέσσερις πραγματικές ρίζες, δύο θετικές και δύο αρνητικές.

24. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $2x^3 - 15x^2 + 24x - \lambda = 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

25. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις είναι αδύνατες στο $\mathbb{R}$:

α) $x^4 + 13x^2 = 6x^3 + 12x - 5$ β) $\ln x + \frac{1}{2} = 2x^2$

26. Δίνεται η τρεις φορές παρ/μη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = f'(1) = f''(1) = 2$ καθώς και το πρόσημο της $f^{(3)}(x)$ όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	1	$+\infty$
$f^{(3)}(x)$	+	
$f''(x)$		
$f'(x)$		
$f(x)$		

α) Να βρείτε τη μονοτονία και το πρόσημο της f'' .

β) Να βρείτε τη μονοτονία και το πρόσημο της f' .

γ) Να βρείτε τη μονοτονία και το πρόσημο της f .

27. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = e^{x-1} + \ln x - 2x + 1$.

β) Να βρείτε τη μονοτονία και το πρόσημο της f .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

δ) Να αποδείξετε ότι $e^{1-x}(2x - \ln x - 1) < 1$ αν $x > 1$.

28. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $e^x + x^2 - x - 1 = 0$ β) $e^x - \ln(x+1) - 1 = 0$

γ) $6x^2 \ln x - 2x^3 + 6x = 3x^2 + 1$ δ) $2e^x - \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x = 2$

29. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x > \ln(x+1)$ για κάθε $x > 0$

β) $12x^2 - x^4 < 24 - 24\sin x$ για κάθε $x > 0$

30. Αν $a, \beta > 0$ και ισχύει $a^x + \beta^x \geq 1 + \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $a\beta = 1$.

31. Αν $a, \beta > 0$ και ισχύει $a^x - a \geq \beta^x - \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $a^a = \beta^\beta$.

32. Έστω f παρ/μη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(1-x)f(x) + e^{x^2-1} \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

33. Έστω συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ παρ/μη, για την οποία ισχύει $f(x) = (x^2 - x) \cdot f'(x)$ για

κάθε $x \in [0, 1]$. α) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f . β) Να βρείτε τον τύπο της f .

34. Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Fermat, να αποδείξετε το θεώρημα του Rolle.

35. Έστω η παρ/μη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = -e^{-f(\beta)x} + e^{-f(a)x}$, $x \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$ η οποία παρουσιάζει ακρότατο στη θέση x_0 .

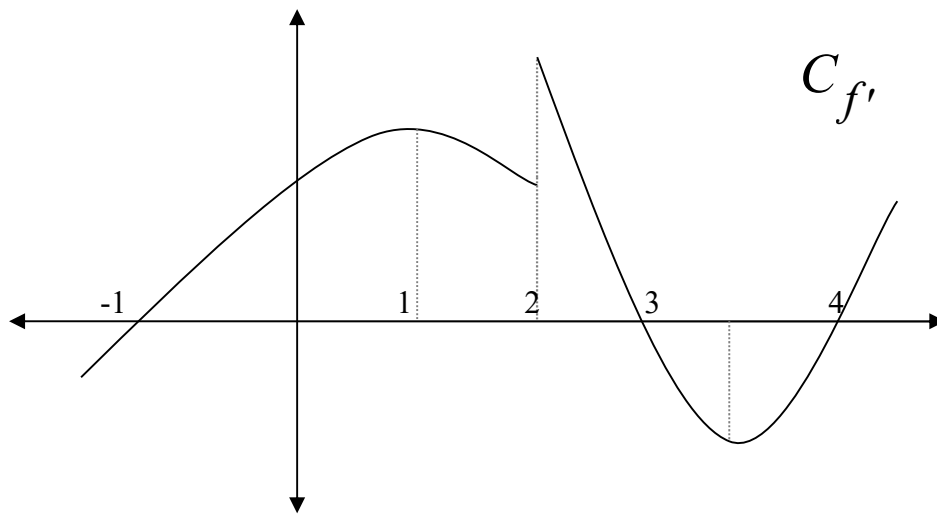
α) Αποδείξτε ότι $x_0 = \frac{1}{f(\beta) - f(a)} \cdot \ln \left(\frac{f(\beta)}{f(a)} \right)$.

β) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε $x_0 = \frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2) \cdot f(\xi_1)}$.

36. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της f' μιας συνεχούς στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f .

α) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

β) Να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f .



37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2(a + \beta \ln x)$, $x > 0$, $a, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν η γραφική παράσταση της f δέχεται στο σημείο $A(1, 3)$ εφαπτόμενη παράλληλη προς την ευθεία $y = 4x + 2004$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^3(11 - 6 \ln x)$, $x > 0$.

Αν $0 < a < \beta$ να αποδείξετε ότι $\frac{g(a) - g(\beta)}{a - \beta} \leq 9e^2$.

38. Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία $A(0, 4)$ και $B(0, 1)$.

Να προσδιορίσετε το σημείο M του ημιάξονα Ox ώστε η γωνία $\widehat{AMB}$ να είναι η μέγιστη δυνατή.

39. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 8$ και $h(x) = x^3 + x^2 - 3x + 3$.

Δύο σημεία A, B κινούνται πάνω στις γραφικές παραστάσεις C_g, C_h αντίστοιχα, έτσι ώστε να έχουν πάντα ίδια τετμημένα. Να βρείτε τη θέση των σημείων πάνω στις δύο καμπύλες έτσι ώστε η απόσταση AB να είναι η ελάχιστη δυνατή.

40. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = -x^2 + 2ax - 2a$ με $a \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο.

ii) Να αποδείξετε ότι το μέγιστο της f κινείται πάνω στην παραβολή με εξίσωση $y = x^2 - 2x$.

iii) Να υπολογίσετε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ για την οποία το μέγιστο της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστο.