

1. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = e^{3x} + 2\ln x + \sqrt{x} - 5 \quad \beta) g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \in (-\infty, 1] \\ 5x-2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

2. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(111) = 2$.

Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f^2(x) - 4f(x) + 7$.
Να αποδείξετε ότι η g έχει ελάχιστο, το οποίο και να βρεθεί.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Αν η f έχει ελάχιστο και η g είναι γν.αύξουσα, δείξτε ότι η $g \circ f$ έχει ελάχιστο.
β) Αν η $f \circ g$ είναι 1-1, τότε και η g είναι "1-1".

4. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γν. μονότονη συνάρτηση της οποίας η γρ. παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(8, -5)$.

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left[f(3 \cdot 4^x - 4 \cdot 3^x) - 5\right] < 8$

5. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1" και να βρείτε τις αντίστροφές τους:

$$\alpha) f(x) = \ln(1 - e^x) \quad \beta) f(x) = \begin{cases} -\ln x, & x < 1 \\ -x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(1 + e^x)$, $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε συνάρτηση h τέτοια ώστε να ισχύει $h \circ f = g$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(f(x)) = 2x + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

α) Δείξτε ότι η f είναι "1-1".

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x + 5$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^x + x^3 + x = 1$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση

$$e^{x^2-2x} + (x^2 - 2x)^3 + x^2 - 4x = e^{2x-3} + (2x-3)^3 - 3.$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $(e^x - e^{\sqrt{x}}) + (x^3 - \sqrt{x^3}) + (x - \sqrt{x}) > 0$ με $x > 0$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^3} - e^x < x - x^9$.

9. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^5 + x^3 + x + 3$ και $g(x) = \frac{1}{e} \cdot e^x + x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι οι f, g αντιστρέφονται.

β) Να λύσετε την εξίσωση $(e^{x-1} + x - 3)^5 + (e^{x-1} + x - 3)^3 + e^{x-1} + x = 0$.

10. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι "1-1":

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 1 \\ \frac{3}{x}, & x \geq 1 \end{cases} \quad \beta) g(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in (-\infty, 0] \\ \sqrt{x}+1, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

11. Για μια $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $4f(x^{2004}) - 2f^2(x^{2000}) \geq 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

12. Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ώστε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις να είναι αντιστρέψιμη.

Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση για κάθε μία από αυτές:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \lambda x + 1, & x < 0 \\ -\frac{1}{2}x + \lambda, & x \geq 0 \end{cases} \quad \beta) h(x) = \begin{cases} x^2 + \lambda, & x < 0 \\ -x + \lambda^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

13. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι εξισώσεις $f^{-1}(x) = f(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = -x^3$.

α) να αποδείξετε ότι αντιστρέφονται.

β) Να εξετάσετε αν οι εξισώσεις $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες με την εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$.

γ) Ομοίως, να εξετάσετε αν οι εξισώσεις $g(x) = x$ και $g^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες με την εξίσωση $g^{-1}(x) = g(x)$.

15. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x)) = x + 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η f αντιστρέφεται.

β) $f^{-1}(x) = f(x) - 5, \quad x \in \mathbb{R}$.

γ) $f(x + 5) = f(x) + 5, \quad x \in \mathbb{R}$.

δ) Η εξίσωση $f(x) = x$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

16. Έστω $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*.$$

Αν η f αντιστρέφεται, να δείξετε ότι $f^{-1}(y_1 + y_2) = f^{-1}(y_1) \cdot f^{-1}(y_2)$ για κάθε $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

17. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) - 2f(x) - 2f(y) + 6 \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Αν $f(0) \neq 3$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

18. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x)) + f^3(x) = 3x + 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) = \frac{f(x) + x^3 - 4}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$.

19. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right), \quad \text{για κάθε } x, y \neq 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.

β) Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα:

i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + 3) + f(x - 2) = f(2x - 4) + f(x^2 + 1)$.

iii) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι γν. αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

20. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x + x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι “1-1”

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{\sigma\nu\nu x} + \sigma\nu\nu x = \sqrt{e} + \frac{1}{2}$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{\varepsilon\varphi x} + \varepsilon\varphi x < e + 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι $e^e + e < e^\pi + \pi$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ f)(x) = 0$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε τις ρίζες της καθώς και το πρόσημό της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $6^x + 8^x = 10^x$

22. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \ln x + x^3 + x - 2 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{2}{x^3} - x \quad \text{με } x > 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι οι f, g αντιστρέφονται.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(\frac{2}{x^3} - x\right) + \left(\frac{2}{x^3} - x\right)^3 + \frac{2}{x^3} - x > 2$

23. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x.$$

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2$ τέμνει τη C_f ακριβώς σε ένα σημείο το οποίο και να προσδιορίσετε.

γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης.