

ΟΡΙΑ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ (ΟΡΙΑ 3)

- 1.** Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να εξετάσετε αν έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου στο $+\infty$:

$$\alpha) f(x) = \frac{|x-3| + |x^2-3|}{|x-4|-1} \quad \beta) f(x) = \sqrt{3x-x^2} \quad \gamma) f(x) = \sqrt[3]{x^3-1}$$

- 2.** Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να εξετάσετε αν έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου στο $-\infty$:

$$\alpha) f(x) = \sqrt{x^2-1} \quad \beta) f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} \quad \gamma) f(x) = \sqrt{\lambda x^2 + x + 1} \quad \mu\epsilon \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

- 3.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 + 3x - 10|}{-3x^2 + 1} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|9 - x^2|}{|x - 4| + 2} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x^2 \right)$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x + \sqrt{x}} + \sqrt{4x - \sqrt{x}} \right) \quad \epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x + \sqrt{x}} - \sqrt{4x - \sqrt{x}} \right)$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 2} - 2\sqrt{x^2 + 1} \right)$$

- 4.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} + 3e^x + 5)$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 3e^x + 4e) \quad \epsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^{-x} + 2)$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5^{2x} - 4 \cdot 5^x) \quad \zeta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x - 7^x + 8^x) \quad \eta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left(\frac{1}{3} \right)^{2x+1} - 3^{-x} + 2 \right)$$

- 5.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + 3 \cdot 2^{-x}}{e^x + 2^x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 2^x - 5 \cdot 3^x}{2 \cdot 3^x + 5 \cdot 2^x} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 5^x + 7^x}{2^x + 3^x + 5^x} \quad \delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 3^x}{2^x - 3^x}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 \cdot 2^x - 5 \cdot 3^x + 1}{3^x - 2^x + 4} \quad \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 4 \cdot 6^x}{2 \cdot 3^x + 6 \cdot 5^x} \quad \zeta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{2x+1} + 5 \cdot e^x}{4 \cdot 3^{x+1} - e^x}$$

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):

$$\begin{aligned} \alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^{3x} - 2 \cdot e^{2x} + 4 \cdot e^x - 2} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x^2 - x + 3) \\ \gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(3x^2 + 3x + 3) \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(2x^3 + 3x) \quad \epsilon) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^3}\right) \\ \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad \zeta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(\sqrt{x^2 - 1} + x) \quad \eta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{\sqrt{x}}{x} \end{aligned}$$

7. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν), για τις διάφορες τιμές των αντίστοιχων παραμέτρων τους:

$$\begin{aligned} \alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(\lambda - 1)x^3 + \mu x + \frac{2}{x} + 1 \right] \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\lambda^2 x^4 + (\mu - 1)^2 x^2 + (\lambda - \mu + 1)x \right] \\ \gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\mu^2 - 4)x^4 + 2x^3 - x + 1}{(\mu - 2)x^4 - x^2 + 4} \quad \delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2\lambda^2 - \lambda)x^3 + x - 2\lambda}{\lambda x^2 + 1} \end{aligned}$$

8. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{aligned} \alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 2} + \lambda x \right) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3x} - \lambda x \right) \\ \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 5} - \lambda x + 1 \right) \quad \delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + \lambda x - 2 \right) \end{aligned}$$

9. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in (0, +\infty)$ να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 3^{x+1} - \lambda^x}{\lambda \cdot 3^{x-1} + 3 \cdot \lambda^{x+1}} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \lambda^{x+1} + 5^x}{\lambda^x + 5^{x+1}} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot \lambda^{x+1} + 5^x}{\lambda^x + 5^{x+1}}$$

10. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1} - \lambda x + \mu \right] = 2. \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \lambda x + \mu \right) = 5$$

11. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\varphi, \vartheta \in (0, \pi)$ ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 \eta \mu \vartheta + 3x + 2} - x + 2 \sigma \nu \nu \varphi \right) = \frac{1}{2}.$$

12. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \kappa\sqrt{x+1} + \lambda\sqrt{x+2} + \mu\sqrt{x+3}$ όπου

$$\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \kappa + \lambda + \mu = 0.$$

Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\left| \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) - x \right| \leq 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

14. Για μια συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ ισχύει:

$$\left| (2 + 3x^4)f(x) - 21x^4 \right| \leq x^2 + 2 \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 7$.

15. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \quad \delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x - \sqrt{x}) \cdot \eta\mu \frac{1}{x^2} \right] \quad \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x^2} \right) \quad \zeta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$$

16. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^4 + 3\eta\mu x + 1}{5x^4 - 7\eta\mu x - 3} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{x^2 + 1} \cdot \eta\mu \frac{x^2 + 1}{x} \right]$$

17. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} - x \right) \quad \text{και στη συνέχεια τα όρια:}$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^5 \cdot \eta\mu \frac{1}{x^5} \right) \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 \eta\mu \frac{1}{x}}{x^2 + 1}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 - 1} - 1} \quad \epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} \cdot \eta\mu \frac{x + 1}{x^2 + 1} \right)$$

18. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ όταν:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x)-3}{f(x)+2} = -\frac{1}{3} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)-1}{f(x)-2} = +\infty$$

19. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)+2x}{3x-1} = 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 4 \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(f(x)+6x) \cdot (\sqrt{x^2+1} - x) \right] = 5$$

20. Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)-3x) = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{5x-1} = 1 \quad \text{να υπολογίσετε:}$$

$$\alpha) \text{ Το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x)-g(x)}{f(x)+3g(x)} \quad \beta) \text{ Την τιμή του } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ώστε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)+\lambda g(x)}{\lambda f(x)+g(x)} = 1.$$

21. Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f^2(x)+3f(x)-2}{f^2(x)+1} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{f^2(x)+2f(x)} + f(x) \right)$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{f^2(x)-f(x)+3} - f(x) \right)$$

22. Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3f(x)-5|-|f(x)|}{|2f(x)+3|} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{f^2(x)+f(x)+2} + f(x) \right)$$