

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ-ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ-ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ-ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|+x}}{\sqrt{|x|-x}}, \quad f(x) = \sqrt{2 - \ln x - \ln^2 x}, \quad g(x) = \sqrt{2\eta\mu x - 1} \quad \text{με } x \in [0, 2\pi]$$

2. Να προσδιορίσετε τις τιμές των παραμέτρων $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

α) Η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - \lambda x + 1)$ να έχει πεδίο ορισμού

ι) το $\mathbb{R}$ ιι) το $\mathbb{R} - \{-1\}$

β) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\lambda x^2 - 4\lambda^3}$ να έχει πεδίο ορισμού το $[-6, 6]$

3. Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις και στη συνέχεια να γράψετε το σύνολο τιμών κάθε μιας από αυτές:

α) $g(x) = x^2 - 4x + 5$ β) $g(x) = \sqrt{2x - 4}$ γ) $g(x) = -(x - 1)^3 + 2$

δ) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$ ε) $f(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^2 - 1}$ στ) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$ ζ) $f(x) = |x + 2| - |x - 2|$

4. Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^2 e^x$ β) $f(x) - g(x) = x^2 + x + 9$ γ) $f(x) = g(x) + \ln(x - 1)$

5. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες.

Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο να ισχύει $f(x) = g(x)$.

α) $f(x) = \ln(x - 4) - \ln(x - 2)$ και $g(x) = \ln \frac{x - 4}{x - 2}$ β) $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^4$ με $x \in \{-1, 0, 1\}$

6. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$ αν δίνονται:

α) $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln(x^3)$

7. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\beta) \quad f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & x \in [0, 2) \\ x^2 + 3, & x \in [2, 20) \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \in [0, 10) \\ \sqrt{x^2 - 1}, & x \in [10, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Να αποδείξετε ότι } (g \circ f)(x) = \begin{cases} 6x^2 + 2, & x \in [0, 2) \\ 3x^2 + 8, & x \in [2, \sqrt{7}) \\ \sqrt{x^4 + 6x^2 + 8}, & x \in [\sqrt{7}, 20) \end{cases}$$

8. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

δ) $f(\sqrt{\ln x + 3})$ αν η f έχει πεδίο ορισμού το $\left[\frac{1}{e}, e\right]$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι: α) $f(0) = 0$ β) η f είναι περιττή γ) $f(3x) = 3f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

10. Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1) = 0$ β) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x), \quad \forall x > 0$ γ) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y), \quad \forall x, y > 0$

11. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν: ι) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 2x$ και $g(x) = 2x - 1$

ιι) $(f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} - 2}, \quad x \in (0, 4) \cup (4, +\infty)$ και $g(x) = \sqrt{x} - 2$.

12. Να βρείτε τη συνάρτηση g αν: ι) $(f \circ g)(x) = \ln(e - e^x) - x, \quad |x| < 1$ και $f(x) = \ln \frac{e-1-x}{x+1}$

ιι) $(f \circ g)(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = \ln x - 2$

13. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 10$ και $B\Gamma = 12$. Μία ευθεία ε που διέρχεται από την κορυφή A κινείται παράλληλα προς τη βάση $B\Gamma$ τέμνοντας τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ, E αντίστοιχα.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ ως συνάρτηση της βάσης του ΔE .

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τραpezίου $B\Delta E\Gamma$ ως συνάρτηση της ΔE και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

14. Σε έναν κύκλο (O, R) σταθερής ακτίνας $R = 2$, θεωρούμε μεταβλητή χορδή μήκους $AB = x$.

α) Να γράψετε το σύνολο στο οποίο παίρνει τιμές η μεταβλητή x .

β) Αν a είναι το απόστημα της χορδής AB , να εκφράσετε το a ως συνάρτηση του μήκους της χορδής x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $a(x)$.

γ) Αν $\hat{AOB} = \vartheta$, να αποδείξετε ότι $\eta\mu\vartheta = \frac{ax}{4}$ και να υπολογίσετε την τιμή του $\eta\mu\vartheta$ όταν η χορδή x του κύκλου ισούται με το απόστημά της a .

15. Ένα μεταβλητό σημείο $M(x, y)$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ με $x > 0$.

α) Αν A είναι σημείο του $x'x$ άξονα τέτοιο ώστε $\hat{OMA} = 90^\circ$ όπου O η αρχή των αξόνων, να εκφράσετε την τετμημένη του σημείου A ως συνάρτηση του x .

β) Βρείτε το σημείο M ώστε το εμβαδόν του $\triangle OMA$ να ισούται με 1 τ.μ