

‘ΣΥΝΕΧΕΙΑ’ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους και να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases} \quad x_0 = 0 \quad \beta) h(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

2. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη συνέχεια:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & |x| \leq 1 \\ -\frac{3}{x}, & |x| > 1 \end{cases} \quad \beta) f(x) = \begin{cases} x^3 \eta \mu \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2xe^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \end{cases} \quad \gamma) f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{3 - |x|}}$$

3. Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^4 + x^2} + \eta \mu 2x}{x^2 + x}, & x > 0 \\ e^{3x} + \lambda, & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής.}$$

4. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^3 + \beta x^2 - \gamma x + 1}{x^2 - 2x + 1}, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής.}$$

5. Να βρεθούν οι τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + \beta, & x < 0 \\ x + 2\beta + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ να μην είναι συνεχής.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $x^2 f(x) = 3x^3 + 5\eta \mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Αν η f είναι συνεχής στο 0, να βρείτε το $f(0)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $xf(x) + \eta \mu x = 3x^2 + 5x$ $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον $y'y$ άξονα στο σημείο $A(0, 4)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

8. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 0 και $g(0) = 0$, να αποδείξετε ότι και η

$$\text{συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} g(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ είναι συνεχής στο 0.}$$

9. Για τη συνάρτηση f ισχύει: $xf(x) \leq \eta\mu x + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν η f είναι συνεχής στο 0 να υπολογίσετε το $f(0)$.

10. Για τη συνάρτηση f ισχύει $(x - x_0)f(x) \geq x^2 + x_0x - 2x_0^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν η f είναι συνεχής στο x_0 να υπολογίσετε την τιμή της f στο x_0 .

11. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $|f(x) - f(y)| \leq \theta|x - y|$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $\theta > 0$. (**Συνθήκη Lipschitz**)

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β) Αν $0 < \theta < 1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + 3f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ι) Να αποδείξετε ότι $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αν υπάρχει το όριο της f στο 0, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

13. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - 1} = \pi$, να υπολογίσετε την τιμή της f στο 1.

14. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 7 και $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{f(x)}{x - 7} = 1922$, να υπολογίσετε το

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(7+h) - f(7)}{h}.$$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1) = 0$.

ii) Αν η f είναι συνεχής στο 1, τότε είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^*$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Αν η f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

17. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x+y) = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu 2y + f(y) \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Αν η f είναι συνεχής στο 0 και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 1$, να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sigma\upsilon\nu 2a \text{ για κάθε } a \in \mathbb{R}.$$

18. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $a\beta > 0$, $f(a) = \beta^2$, $f(\beta) = a^2$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0^2$.

19. Έστω f συνεχής στο $[a, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $(\kappa + \lambda)f(x_0) = \kappa f(a) + \lambda f(\beta)$ όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}_+$

20. Έστω f συνεχής στο $[0, 3]$ με $0 < f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [0, 3]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 3]$ τέτοιο ώστε $f^2(x_0) + x_0 = 3f(x_0)$.

21. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(a) = f\left(\frac{a+2\beta}{3}\right)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, \beta)$ ώστε $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{\beta-a}{3}\right)$.

22. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^7 - 10x = 8$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

23. να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^6 - 15x - 11 = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες ετερόσημες στο $\mathbb{R}$.

24. Να αποδείξετε ότι κάθε πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον πραγματική λύση.

25. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \pi \ln x - 3, & x \in [1, e) \\ x \ln x - \pi, & x \in [e, \pi] \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο $(1, \pi)$.

26. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\rho \in \mathbb{R}$.

27. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\eta\mu x}{x-1} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x-3} = 1$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, \pi)$.

28. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4 \quad \text{και} \quad 4\eta\mu(x-2) \leq (x-2)f(x) \leq x^2 - 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = x^2 - x + 1$.

Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τη C_g σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$.

29. Έστω συνάρτηση f συνεχής και αύξουσα στο $[0, 1]$ με $f(1) = 1$.

να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) + x_0 e^{x_0} = e^{x_0}$.

30. Για τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x^2 + 2x - 6 < f(x) < x^2 + 2x - 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο τουλάχιστον ρίζες ετερόσημες.

31. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\lambda^4 x^4 + 2(\lambda^2 + 5)x^3 + 8\lambda x^2 + 3\lambda^2 x - \lambda^2 - 1 = 0 \quad \text{έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα}$$

μικρότερη του 1, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

32. Έστω η συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(e) < 2 < f(1)$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(e^x) = e^x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

33. Δίνεται η συνεχή συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{x^2}{2} + x + 1 \leq f(x) \leq e^x, \quad \forall x \geq 0.$$

α) Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

β) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{g(x)} - g(x)) = 1.$$

ι) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) + g(x_0) + \ln x_0 = 0.$$

34. Να βρείτε το πρόσημο κάθε μίας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x, x \in [0, 2\pi]$.

β) $f(x) = (2\eta\mu x - \sqrt{3}) \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1), x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

35. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f(x) \cdot [g(x) + 2] \geq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

36. Έστω η f συνεχής στο $[1, 2]$ για την οποία ισχύει $5x^5 + 3x^3 f(x) = 5$ για κάθε $x \in [1, 2]$.

Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $(1, 2)$.

37. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right), x \in [-1, 0]$.

Να εξετάσετε αν η f μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{1}{e}$ στο διάστημα $(-1, 0)$.

38. Έστω f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ με $f(0) = 1$ και $f(1) = 5$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$4f(x_0) = f\left(\frac{1}{7}\right) + f\left(\frac{2}{7}\right) + f\left(\frac{3}{7}\right) + f\left(\frac{4}{7}\right)$$

39. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(7) = 6$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να υπολογίσετε το $f(6)$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (6, 7)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 4$.

iii) Να υπολογίσετε το $f(4)$.

40. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 4$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε τα $f(1), f(2), f(3)$.

41. Έστω f συνεχής στο $[1, 4]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1, 4]$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f(x_0) = \frac{f(1) + f(2) + f(3) + f(4)}{4}.$$

42. Έστω f συνεχής στο $[a, \beta]$ και $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ θετικοί αριθμοί με $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2004$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2, x_3 \in [a, \beta]$, υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in [a, \beta]$ έτσι ώστε να ισχύει $2004f(\xi) = \theta_1 f(x_1) + \theta_2 f(x_2) + \theta_3 f(x_3)$.

43. Έστω f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(a) + f(\beta) + f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{3}.$$

44. Έστω f συνεχής στο $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) - f(x_1) \geq x - x_1 \text{ για κάθε } x \in [a, \beta].$$

45. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ με $x \in [0, 1]$.

α) Να αποδείξετε ότι η g έχει ελάχιστη τιμή.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x_0) \leq x_0 + f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

46. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$(f(x) - f(x_1)) \cdot (f(x) - f(x_2)) \leq 0.$$

47. Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις f στο $[-3, 3]$ που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^2 + f^2(x) = 9 \text{ για κάθε } x \in [-3, 3].$$

48. Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις f στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση:

$$f^2(x) = 2xf(x) + 400 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

49. Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις f στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση: $f^2(x) - x^4 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

50. Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις f στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση:

$$\text{i)} (f(x) - 1) \cdot (f(x) + 2) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{ii)} (f(x) - 1) \cdot (f(x) - 2) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

51. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x + x + \ln x$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln \frac{1}{x} = e^x + x$ έχει μοναδική ρίζα.

52. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + 2x + e = \frac{1}{e^x}$ έχει μοναδική ρίζα.

53. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sqrt{x-1} + e^x = \frac{1}{x} - 1$ δεν έχει ρίζα.

54. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$ έχουν στο $[1, +\infty)$ ακριβώς ένα σημείο τομής.

55. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

β) Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

δ) Αν είναι γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(f^{-1}(x))^3 + f^{-1}(x) + 2}$$

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x - \frac{1}{x} = 2017$ έχει ακριβώς μία λύση.

γ) Αν $0 < a < 1 < \beta$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)}{2-x} + \frac{f(a)}{x^3-1} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

57. Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)f(x) = \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = -\frac{1}{2}.$$

α) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x) = f(x) + \ln x - 1$, $x \in (0, 2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = e^{1-f(x)}$ ακριβώς σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 2)$.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (1, \sqrt{2})$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{f(1) + 2f(\sqrt{2})}{3}$.

58. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} g(1+h) = 1,$$

$$f^2(x) - 2f(x)g(x) = 2x^2 + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - g(x)| + x^3 \cdot g(x) - f(x)}{x-1}$

Αν είναι γνωστό ότι $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, τότε: ι) Να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\ln f(x)}{x-1} + \frac{\sin x}{x} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

59. α) Αν μία συνάρτηση f παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$ είναι κατ' ανάγκη συνεχής στο $[\alpha, \beta]$;

β) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f\left(-\frac{2}{\pi}\right)$ και $f\left(\frac{2}{\pi}\right)$;

Είναι η f συνεχής στο $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$;