

①

B) 1) ν.δ.ο η εξίσωση $2\ln x + x^2 = 2x$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, 2)$

2) Δίνονται $f(x) = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + \frac{1}{2}x$

$$g(x) = -\frac{x^2}{2}$$

ν.δ.ο $\exists$ μοναδικός θετικός αριθμός x_0 τ.ω η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην εφαπτομένη της C_g στο $B(x_0, g(x_0))$

3) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

4) Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς ώστε να ισχύει:

$$\frac{\ln a}{a^2} + \frac{\ln b}{b^2} = \frac{1}{e}$$

5) $I = \int_1^e \frac{2\ln x + x^2 - x^3}{2x^2} dx = ;$

Γ)

②

~~Δ~~ Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παρ/μη στο $\mathbb{R}$ τ.ω $2f(x^3) - f^2(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1) ν.δ.ο C_f διέρχεται από $A(1, 1)$ $B(-1, 1)$ $\Gamma(0, 1)$

και ότι $\exists$ δύο τλχ. σημεία της C_f με τετμημένες $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ στα οποία η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη

2) ν.δ.ο $f'(-1) = f'(0) = f'(1)$

3) ν.δ.ο ~~η~~ η f έχει τέσσερα πιθανά σημεία καμπής

4) $g(x) = xe^x + f(x), x \in [-1, +\infty)$. Ν.Δ.Ο ότι $\exists$ ένα τλχ. σημείο της C_g με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$ τ.ω η εφαπτομένη της C_g στο σημείο αυτό να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\epsilon): ex - y - e = 0$

Δ) • $f(0) = 1$ • $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $f'(x) = \frac{(1+e^x)f(x)}{1+f(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

③

1) ν.δ.ο $f(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) βρείτε τις ασύμπτωτες της $g(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) ν.δ.ο $\frac{a+2b}{3} < \ln\left(\frac{e^a+2e^b}{3}\right) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ με } a < b$

4) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περιλείε-
ται από την C_f , την $y = x^2 + 1$ και την ευθεία με εξίσωση
 $x = 1$