

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (ΜΕΧΡΙ 1.7 παραγρ.)
Γ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε σύνθεση συναρτήσεων της f με τη g ; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της σύνθεσης.
(Μονάδες 3)
- A2.** Τι λέγεται γραφική παράσταση της f και πως συμβολίζεται; Γιατί ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης;
(Μονάδες 4)
- A3.** Πως ορίζουμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ με απλά λόγια ;(Να κάνετε σχήμα)
(Μονάδες 8)
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Κάθε γνησίως φθίνουσα συνάρτηση τέμνει τον άξονα xx' σε ένα μόνο σημείο.	Σ	Λ
β) Δεν μπορεί μια συνάρτηση να ισούται με την αντιστροφή της.	Σ	Λ
γ) Αν $f(x) > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$	Σ	Λ
δ) Κάθε συνάρτηση «1-1» είναι ή γνησίως φθίνουσα ή γνησίως αύξουσα.	Σ	Λ
ε) Η γραφική παράσταση της $-f(x)$ είναι πιο κάτω από την γραφική παράσταση της $f(x)$.	Σ	Λ

(Μονάδες 2x5=10)**ΘΕΜΑ Β**Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$

- B1.** Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων και να λυθεί η εξίσωση $f(x)=g(x)+1$
(Μονάδες 6)
- B2.** Να δειχθεί ότι: $(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x-1}}$, $x \in [1,2]$.
(Μονάδες 6)
- B3.** Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[(g \circ f)(x)]^2}{x-2}$.
(Μονάδες 6)
- B4.** Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(f(x))}{x-1}$.
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = -\ln x, x > 0$ και $g(x) = -e^x, x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε ότι $(g \circ f)(x) = -\frac{1}{x}, x > 0$

(Μονάδες 6)

Γ2. Αν $h(x) = f(x) + g(x) - (g \circ f)(x), x > 0$ να μελετηθεί η $h(x)$ ως προς την μονοτονία.

(Μονάδες 6)

Γ3. Να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

(Μονάδες 6)

Γ4. Να λυθεί η ανίσωση :

$$\ln x > x^{-1} - e^x + e - 1$$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $2f(x) + f(-x) = x$ και g ώστε $f(g(x-1)) \leq f(g(x)-1)$

Δ1. Ναδειχθεί ότι η f είναι περιττή και να βρεθεί ο τύπος της.

(Μονάδες 3)

Δ2. Να υπολογιστούν τα όρια

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(2))^{3f(x)}$

(Μονάδες 2)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta\mu(f(x)+2)}{x} \right)$ και

(Μονάδες 2)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{h^3(x) - h^2(x) + 6}{-3h^2(x) + h(x) - 4} \right)$, όπου $h(x) = e^{f(x)} + \ln(f(x))$

(Μονάδες 2)

Δ3. Να δείξετε $g(x-1) + 1 \leq g(x) \leq g(x+1) - 1$

(Μονάδες 4)

Δ4. Με δεδομένο ότι ισχύει $\ln x \leq x - 1$, με $x > 0$, να δείξετε ότι:

α) $\ln[g(2023)] \leq g(2024) - 2$, αν $g(2023) > 0$

(Μονάδες 3)

β) • $e^x \geq x + 1$ για όλα τα x που ανήκουν στο $\mathbb{R}$

• $e^x \geq e \cdot x$ για όλα τα x που ανήκουν στο $\mathbb{R}$

• $e^{f(g(3)-g(2))} \geq e \cdot (g(3) - g(2)) \geq e$

(Μονάδες 9)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

A4. $\alpha \rightarrow \Lambda$, $\beta \rightarrow \Lambda$, $\gamma \rightarrow \Lambda$, $\delta \rightarrow \Lambda$, $\varepsilon \rightarrow \Lambda$.

B.

Υπόδ.- B₁) πείνει $\left. \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \end{array} \right\} \text{ Άρα } A_f = [1, +\infty), A_g = (-\infty, 1]$

$f(x) = g(x+1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{1-x} + 1$ } η λύση του πεδίου ορισμού
 πεδίου ορισμού: $\left. \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x=1$ } δεν ικανοποιεί συνθήκες
 άρα είναι αδύνατη

B₂) $g(f(x))$ πείνει $\left. \begin{array}{l} x \in A_f \\ f(x) \in A_g \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x-1 \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$

$A_{g \circ f} = [1, 2]$ και $g(f(x)) = \sqrt{1 - f(x)} = \sqrt{1 - \sqrt{x-1}}$

B₃) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(g \circ f(x))^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x-2} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - (x-1)}{(x-2)(1 + \sqrt{x-1})} =$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{1 + \sqrt{x-1}} = \left(-\frac{1}{2}\right)$

B₄) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(f(x))}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2} \ln(x-1)}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}} \stackrel{\frac{1}{0^+}}{=} (+\infty)$

Γ.

Υπόψ: Γ_1 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ πρέπει $x \in A_f$ $\left. \begin{matrix} x \in A_f \\ f(x) \in A_g \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow x > 0$
 $g(f(x)) = g(-\ln x) = -e^{-\ln x} = -e^{\ln x} = -\frac{1}{x}$ ορα $(g \circ f)(x) = -\frac{1}{x}, x > 0$

Γ_2 $h(x) = -\ln x - e^x + \frac{1}{x}$ $\forall x > 0$
 εστω $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2$
 $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2}$
 $x_1 < x_2 \xrightarrow{x_1, x_2 > 0} \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$
 $-\ln x_1 - e^{x_1} + \frac{1}{x_1} > -\ln x_2 - e^{x_2} + \frac{1}{x_2} \Rightarrow h(x_1) > h(x_2) \Rightarrow h \searrow$ ορα $x > 0$

Γ_3 $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - e^x + \frac{1}{x} \right) = (+\infty - 1 + \infty) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - e^x + \frac{1}{x} \right) = -\infty - 0 + 0 = -\infty$

Γ_4 $-\ln x - e^x > -1 - e^x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\ln x - e^x + \frac{1}{x} < +1 - e^x \Rightarrow$
 $h(x) < h(1) \Rightarrow x > 1$ ο ορα να οριστεί τον παραρτήρη

Δ.

Δ_1 $\begin{cases} \text{ισχύει } 2f(x) + f(-x) = x \\ \text{ορα } x: -x \text{ ισχύει } 2f(-x) + f(x) = -x \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} 3f(x) + 3f(-x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x) \\ \text{ορα } f \text{ περιττή.} \end{cases}$
 Άνω το σύστημα $\begin{cases} 2f(x) + f(-x) = x \\ f(x) + 2f(-x) = -x \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} -4f(x) - 2f(-x) = -2x \\ f(x) + 2f(-x) = -x \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} -3f(x) = -3x \\ f(x) = x \end{cases}$

Δ_2 $\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x)^{3f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} = 0$
 $\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u f(x) + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u f(x) + 2}{x}$ ο ορα να οριστεί οτι $\left| \frac{u f(x) + 2}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Rightarrow$
 $-\frac{1}{|x|} \leq \frac{u f(x) + 2}{x} \leq \frac{1}{|x|}$ ορα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u f(x) + 2}{x} = 0$ ορα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pm \frac{1}{|x|} = 0$
 $\bullet h(x) = e^{f(x)} + \ln(f(x)) = e^x + \ln x$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ ο ορα $h(x) = u$ $\lim_{x \rightarrow +\infty, u \rightarrow +\infty}$
 ορα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h^3(x) - h^2(x) + 6}{-h^2(x) + h(x) - 4} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3 - u^2 + 6}{-u^2 + u - 4} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3}{-u^2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} (-u) = -\infty$

Δ₃) ισχύει από ορισμό ότι: $f(g(x-1)) \leq f(g(x)-1) \xrightarrow{f(x)=x} g(x-1) \leq g(x)-1$ για $x: x+1 \in \mathbb{N}$: $g(x) \leq g(x+1)-1$
 Οπώς $g(x-1) \leq g(x)-1 \Rightarrow g(x) \geq g(x-1)+1$

$$g(x-1)+1 \leq g(x) \leq g(x+1)-1 \Rightarrow$$

Δ₄) α) $\ln x \leq x-1 \xrightarrow{x: g(2023) > 0} \ln[g(2023)] \leq g(2023)-1$ (1)
 όπως ισχύει $g(x-1)+1 \leq g(x) \leq g(x+1)-1 \xrightarrow{x: 2023} g(2022)+1 \leq g(2023) \leq g(2024)-1 \Rightarrow g(2023) \leq g(2024)-1$
 $\Rightarrow g(2023)-1 \leq g(2024)-2$ (2)
 Από (1) & (2) $\ln[g(2023)] \leq g(2024)-2$.

β) • ισχύει $\ln x \leq x-1 \xrightarrow{x: e^x > 0} \ln e^x \leq e^x-1 \Rightarrow e^x \geq x+1, x \in \mathbb{R}$

~~Δ₅~~ • ισχύει: $e^x \geq x+1 \xrightarrow{x: x-1} e^{x-1} \geq x \Rightarrow \frac{e^x}{e} \geq x \Rightarrow e^x \geq e \cdot x$ (1)
 • ισχύει: $g(x-1)+1 \leq g(x) \leq g(x+1)-1 \xrightarrow{x: 3} g(2)+1 \leq g(3) \leq g(4)-1 \Rightarrow g(3)-g(2) \geq 1$ (2)
 από (1) $e^{f(g(3)-g(2))} \geq e \cdot f(g(3)-g(2)) \xrightarrow{f(x)=x} e^{f(g(3)-g(2))} \geq e \cdot (g(3)-g(2))$
 $x: f(g(3)-g(2))$

$$e^{f(g(3)-g(2))} \geq e \cdot (g(3)-g(2)) \geq e$$
 (2)