

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (ΜΕΧΡΙ 2.3 παραγρ.)
Γ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και

ισχύει : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$ **(Μονάδες 7)**

A2. Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Πως ορίζουμε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A και τι εξίσωση έχει; **(Μονάδες 4)**

A3. Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της; **(Μονάδες 4)**

A4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α) Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ τότε δεν ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Bolzano	Σ	Λ
β) Αν f γνησίως αύξουσα στους πραγματικούς αριθμούς και συνεχής παντού τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$	Σ	Λ
γ) Η σχέση $ \eta\mu x = x $ ισχύει για μια μόνο τιμή του x .	Σ	Λ
δ) Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	Σ	Λ
ε) Αν η $f'(x)$ είναι συνεχής στο x_0 , τότε η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 δηλαδή υπάρχει το $f''(x_0)$	Σ	Λ

(Μονάδες 2x5=10)

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln^3 x + e^x$ με $x > 0$

B1. Να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της f . **(Μονάδες 8)**

B2. Να δείξετε ότι : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3 f(1)}{x - 1} = f'(1) - 3f(1)$ **(Μονάδες 8)**

B3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ πραγματικό ώστε : $f(\xi) = \frac{e \cdot \pi}{3}$ ($\pi=3,14$) **(Μονάδες 6)**

B4. Να δείξετε ότι για το ξ του προηγούμενου ερωτήματος ισχύει $\xi > 1$ **(Μονάδες 3)**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f(x) = \begin{cases} \ln x + 1, 0 < x \leq 1 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma, x > 1 \end{cases}$, η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο (2,2) είναι 2 και ισχύει:

$f''(2) = \delta$, όπου δ το αριστερό άκρο του ελάχιστου διαστήματος με ακέραιους συντελεστές στο οποίο η εξίσωση $\ln x + 2x - 5 = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Γ1. Να βρεθεί ο τύπος της f και της αντίστροφης αν υπάρχει.

(Μονάδες 2+2=4)

Αν $\alpha=1, \beta=-2$ και $\gamma=2$ και $f^{-1}(x) = \begin{cases} e^{x-1}, x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x-1}, x > 1 \end{cases}$

Γ2. Να δείξετε ότι η f δεν παραγωγίζεται στο σημείο $A(1,1)$ και ότι η αριστερή ημιευθεία της εφαπτομένης με την δεξιά ημιευθεία στο σημείο αυτό σχηματίζουν γωνία 135°

(Μονάδες 2+3=5)

Γ3. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της C_f και της $C_{f^{-1}}$

(Μονάδες 8)

Γ4. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f και της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $B(2,2)$ και να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}$.

(Μονάδες 4+4=8)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τη οποία ισχύουν :

• Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$	• γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
• $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x) - f(1)}{x - 1} = 4$	• $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 \cdot f(1) - f(x)}{x - 1} = 0$
• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = +\infty$	• $\lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) = 8$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(1)=1$ και ότι $f'(1)=3$

(Μονάδες 5)

Δ2. Να υπολογιστούν τα όρια

i. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) + 2h - 1}{h}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{2-x}}{x-1}$

(Μονάδες 5)

Δ3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $h(x) = f(x) + \ln(x-1) - \frac{3}{2}$ και να δειχθεί ότι η εξίσωση $h(x)=0$

έχει ακριβώς μια λύση στο (1,2)

(Μονάδες 5)

Δ4. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, \pi): f(\xi) = \frac{f(1) + f(e) + f(\pi)}{3}$

(Μονάδες 5)

Δ5. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^x(x + \sin x)} \cdot [f(1+e^x) - f(1)]$

(Μονάδες 5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

A4. α) $\rightarrow \Lambda$ β) $\rightarrow \Lambda$ γ) $\rightarrow \Sigma$ (μόνο για $x=0$ ισχύει) δ) $\rightarrow \Lambda$ (δεν είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$) ε) $\rightarrow \Lambda$
B.

B₁) Έστω $f(x) = \ln^3 x + e^x$, $x > 0$
 Για $x_1 < x_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln x_1 < \ln x_2 \\ e^{x_1} < e^{x_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln^3 x_1 < \ln^3 x_2 \\ e^{x_1} < e^{x_2} \end{array} \right\} \xRightarrow{(+)} \ln^3 x_1 + e^{x_1} < \ln^3 x_2 + e^{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \text{ h σε } (0, +\infty)$
 • $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln^3 x + e^x) = -\infty$
 • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^3 x + e^x) = +\infty$
 Άρα $f(A) = \mathbb{R}$

B₂) Δεν θα κάνω απαρίθμηση του τιπο της f στο δοσμένο όριο γιατί το όριο γίνεται δύσκολο.
 Έχω: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3 f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1) + f(1) - x^3 f(1)}{x-1} =$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)(1-x^3)}{x-1}$ "f είναι παραγ." στο 1 άρα $\exists$ το $f'(1)$ "
 $f'(1) + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)(1-x)(1+x+x^2)}{x-1} = \boxed{f'(1) - 3f(1)}$

B₃) Ισχύει ότι $f(A) = \mathbb{R}$ άρα $\frac{e \cdot \pi}{3} \in f(A)$
 συνεπώς από Θ.Ε.* $\exists$ μοναδικό $z \in A_f$ ώστε $f(z) = \frac{e \cdot \pi}{3}$
 (γιατί f "1-1")

B₄) $f(x) = \ln^3 x + e^x$, $f(1) = e$
 Ισχύει ότι: $e \cdot \pi > e \cdot 3 \Rightarrow \frac{e \cdot \pi}{3} > e \Rightarrow$
 $f(z) > e \xrightarrow{f(1)=e} f(z) > f(1) \xrightarrow{f' "1-1"} \boxed{z > 1}$

Γ.

Υπόσ: Γ.1) ισχύει $f(z)=2$ $f'(z)=2$ $f(x)=2ax+b$ $4a+2b+8=2$ $4a+b=1$ (2)

Θα βρούμε το $f''(z)$ εστω $g(x)=\ln x + 2x - 5$, συνεχής στο $(0, +\infty)$
 $g(2) = \ln 2 + 4 - 5 = \ln 2 - 1 < 0$ γιατί $(\ln 2 < \ln e \Leftrightarrow 2 < e$ ισχύει.)
 $g(3) = \ln 3 + 6 - 5 = \ln 3 + 1 > 0$ οπότε από ΘΒ η $g(x)$ έχει
 μια μοναδική ρίζα στο $(2, 3)$ και μοναδική γιατί $g(x) \uparrow$ στο $(0, +\infty)$
 οπότε $S = f''(z) = 2$. οπότε $f''(x) = 2a \Leftrightarrow f''(z) = 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$
 Από (1), (2) $b = 2 - 4 = -2$, $4 + 2(-2) + 8 = 2 \Leftrightarrow 8 - 4 = 2 \Leftrightarrow 4 = 2$ $\Rightarrow b = -2$
 Άρα $f(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{για } 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & , x > 1 \end{cases}$

• για $0 < x \leq 1$ $f(x) \uparrow$
 • για $x > 1$, εστω $1 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2 \Rightarrow$
 $x_1^2 - 2x_1 + 1 < x_2^2 - 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1^2 - 2x_1 + 2 < x_2^2 - 2x_2 + 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
 οπότε $f(x) \uparrow$
 • $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ άρα f συνεχής στο 1 επομένως συνεχής
 στο διάστημα $(0, +\infty)$ συνεπώς είναι $\uparrow$ σε όλο το $(0, +\infty)$
 άρα $\exists$ η f^{-1}

Εύρεση τύπου αντίστροφης

• για $0 < x \leq 1$ εστω $\psi = \ln x + 1 \Leftrightarrow \ln x = \psi - 1 \Leftrightarrow e^{\psi-1} = x$
 πέρνει $0 < x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < e^{\psi-1} \leq 1 \Leftrightarrow e^{\psi-1} \leq e^0 \Leftrightarrow \psi - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \psi \leq 1$
 Άρα για τον πρώτο κλάδο έχω $f^{-1}(\psi) = e^{\psi-1}$, $\psi \leq 1$
 • για $x > 1$ εστω $\psi = x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow \psi = x^2 - 2x + 1 + 1 \Leftrightarrow$

$\psi - 1 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow x - 1 = \pm \sqrt{\psi - 1} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{\psi - 1} \left\{ \begin{array}{l} \text{αφ'ότι } x > 1 \\ \text{άρα} \\ x = 1 + \sqrt{\psi - 1} \end{array} \right.$
 $\psi - 1 \geq 0 \Rightarrow \psi \geq 1$
 $x = 1 + \sqrt{\psi - 1}$ οπότε πέρνει και $x > 1 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{\psi - 1} > 0 \Leftrightarrow \psi - 1 > 0 \Leftrightarrow \psi > 1$
 $\psi \geq 1$ Άρα ο δεύτερος κλάδος είναι $f^{-1}(\psi) = 1 + \sqrt{\psi - 1}$, $\psi > 1$
 Τελικά έχω $f^{-1}(x) = \begin{cases} e^{x-1} & , x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x-1} & , x > 1 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \ln x + 1, & 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2, & x > 1 \end{cases}$ f συνεχής στο 1

• $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x + 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x - 1}$

όπως ισχύει: $\ln x \leq x - 1 \xrightarrow{x = \frac{1}{x}} \ln x^{-1} \leq \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow$

$-\ln x \leq \frac{1-x}{x} \Rightarrow \ln x \geq \frac{x-1}{x}$ αφού $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$

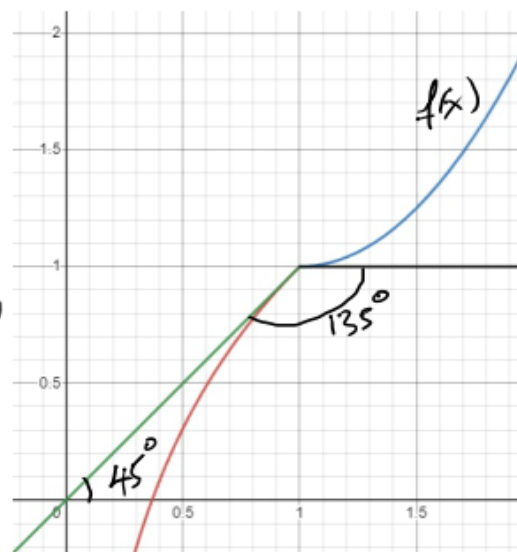
για $0 < x < 1$ έχω $\frac{1}{x} \geq \frac{\ln x}{x-1} \geq 1$ άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ κ.π.

Τέλος $f'_-(1) = 1$

• $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$

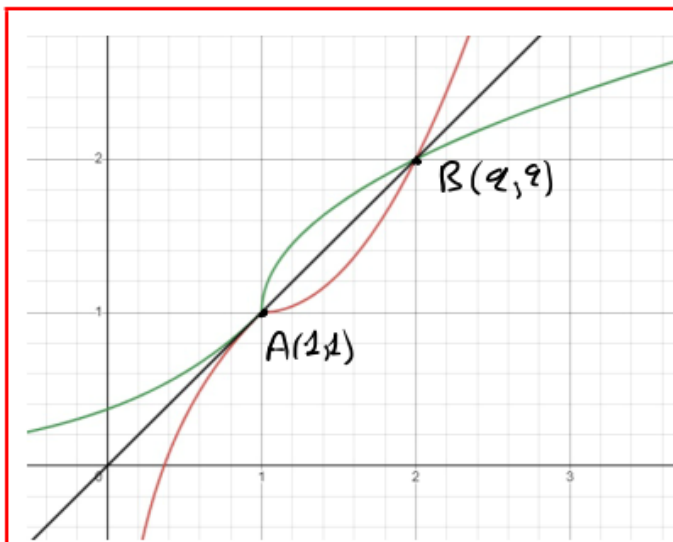
άρα $f'_+(1) = 0$. Αφού η αριστερή εφαπτομένη είναι // στην xx' η οξεία γωνία των εφαπτομένων είναι 45°

Στο διότιο σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της f και τις κλίσεις των εφαπτομένων στο σημείο $A(1,1)$ η γωνία που σχηματίζουν είναι 135°



Γ_3
 Στο διηλάνο
 σχήμα βλέπουμε
 τη γραμμή παράστασι
 της f (κόκκινη) και
 της f^{-1} (πράσινη)
 και την $\psi = x$

Θα βρούμε τον κοινό
 σημείο της $C_f, C_{f^{-1}}$



$$\left. \begin{array}{l} \text{για } x \leq 1 \quad f(x) = \ln x + 1 \\ f^{-1}(x) = e^{x-1} \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \ln x + 1 = e^{x-1} \Leftrightarrow \ln x - e^{x-1} + 1 = 0 \quad x=1 \text{ προφανής ρίζα}$$

η εξίσωση γράφεται: $\ln x + 1 = e^{x-1}$ ①
 όπως ισχύει: $\ln x \leq x-1 \quad \forall x > 0 \Rightarrow \ln x + 1 \leq x$, το " $=$ " ισχύει
 μόνο για $x=1$
 και επίσης ισχύει: $e^x \geq x+1 \xrightarrow{x: x-1} e^{x-1} \geq x$, το " $=$ " ισχύει
 μόνο για $x=1$
 Αν συγκρίνω τις σχέσεις ①, ②, ③ βλέπω ότι η προφανής
 ρίζα της ① είναι μοναδική

Για $x > 1$ θα λύσω την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow$
 $x^2 - 2x + 1 = 1 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow$
 $(x-1)^2 = \sqrt{x-1} \xrightarrow{x-1=w} w^2 = \sqrt{w} \Leftrightarrow w^4 = w \Leftrightarrow w(w^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow$
 $w=0 \vee w=1 \Leftrightarrow x-1=0 \vee x-1=1 \Leftrightarrow x=1 \vee x=2$
 Άρα $x > 1$ δεύτερη λύση είναι η $x=2$

Τέλος τα κοινά σημεία της f , και της f^{-1} είναι τα
 $A(1,1)$ και $B(2,2)$.

Άλλο τρόπο εύρεσης των μονών συφύσεων

Θα λύσω την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ έτσι ψ δηλαδή:

$$\left. \begin{matrix} f(x) = \psi \\ f^{-1}(\psi) = \psi \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} f(x) = \psi \\ x = f(\psi) \end{matrix} \right\} \xrightarrow{(+)} f(x) + x = f(\psi) + \psi$$

Θεωρώ την συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) + x$ $\varphi(x)$ $\nearrow$ γιατί $f \nearrow$, $x \nearrow$
 αφού " $\nearrow \nearrow$ " αφού από τη σχέση $f(x) + x = f(\psi) + \psi$ έτσι $\Rightarrow$
 $\varphi(x) = \varphi(\psi) \xrightarrow{\varphi \text{ "}\nearrow\text{"}} x = \psi \Rightarrow f(x) = x \Leftrightarrow$

$$\left. \begin{matrix} \text{όχι } x+1 = x \text{ για } 0 < x \leq 1 \\ \text{ή } x^2 - 2x + 2 = x \text{ για } x > 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \text{όχι } x = x-1, 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 2 = 0, x > 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ x=2 \end{matrix}$$

Άρα τα μονά συφύα είναι τα $A(1,1)$, $B(2,2)$.

(4) • Για την $f(x)$ στο σύφείο $B(2,2)$ έχω:

$$f(x) = x^2 - 2x + 2, \quad f'(x) = 2x - 2, \quad f'(2) = 2$$

η εφαπτομένη έχει εξίσωση: $\psi - 2 = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow \psi - 2 = 2(x - 2) \Leftrightarrow$

(ε1): $\psi = 2x - 2$

• Για την $f^{-1}(x)$ στο σύφείο $B(2,2)$ έχω:

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-1}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}, \quad (f^{-1})'(2) = \frac{1}{2}$$

η εφαπτομένη έχει εξίσωση: $\psi - 2 = \frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow \psi = \frac{1}{2}x - 1 + 2 \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \psi = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow 2\psi = x + 2 \Rightarrow x - 2\psi + 2 = 0 \quad (\text{ε2})$$

$$\text{Άρα } (\text{ε1}): 2x - \psi - 2 = 0 \quad d(0, (\text{ε1})) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 0 - 0 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$d(0, (\text{ε2})) = \frac{|0 - 2 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{Άρα } d(0, (\text{ε1})) = d(0, (\text{ε2})) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

Αφού οι αποστάσεις είναι ίσες υπάρχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$ που εφάπτεται και στις δύο ευθείες, ο κέντρος αυτός είναι $x^2 + y^2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}$

Δ.

16. (μέχρι 2.3)

Εστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τη οποία ισχύουν :

- Η f είναι συνεχής, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x) - f(1)}{x-1} = 4$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 \cdot f(1) - f(x)}{x-1} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = +\infty$
- $\lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) = 8$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(1)=1$ και ότι $f'(1)=3$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x) - f(1)}{x-1} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x) - x \cdot f(1) + x \cdot f(1) - f(1)}{x-1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x(f(x) - f(1))}{x-1} + \frac{(x-1) \cdot f(1)}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[x \left(\frac{f(x) - f(1)}{x-1} \right) + f(1) \right] = 4$$

$$1 \cdot f'(1) + f(1) = 4 \Rightarrow \boxed{f'(1) + f(1) = 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 f(1) - f(x)}{x-1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 f(1) - x^3 f(x) + x^3 f(x) - f(x)}{x-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 (f(x) - f(1)) + f(x) (x^3 - 1)}{x-1} = 0 \xrightarrow[\text{von Laplace}]{\text{L'Hopital}} \boxed{-f'(1) + 3f(1) = 0}$$

Αρα από τις σχέσεις $f'(1) + f(1) = 4$ και $-f'(1) + 3f(1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = 3 \end{cases}$

(α) i) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h+qh) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(1+h) - 1}{h} + q \right) = f'(1) + q = 5$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{2-x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1) + f(1) - \sqrt{2-x}}{x-1} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x-1} + \frac{1 - \sqrt{2-x}}{x-1} \right) = f'(1) + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{2-x}}{x-1} =$$

$$3 + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 2 + x}{(x-1)(1 + \sqrt{2-x})} = 3 + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt{2-x}} = 3 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{7}{2}}$$

Γ3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $h(x) = f(x) + \ln(x-1) - \frac{3}{2}$ και ναδειχθεί ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(1,2)$

13 $h(x) = f(x) + \ln(x-1) - \frac{3}{x}$ $A_h = (1, +\infty)$

$h(x) \nearrow \infty (1, +\infty)$ grazie a $\nearrow$ non $h_-(x-1) \nearrow$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{u \rightarrow 1} \left(f(x) + \ln(x-1) - \frac{3}{2} \right) \xrightarrow{\text{f(x) und } \ln(x-1)} \underline{\underline{-\infty}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \ln(x-1) - \frac{3}{a} \right) = +\infty$$

$x \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$
 γιατί από ορισμό έχω $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = +\infty$. Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{x^2} \Rightarrow$
 ... αρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$f(x) = x^2 \cdot g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty \text{ and } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Var $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = +\infty$

also $h((1, +\infty)) = \mathbb{R}$

Από την υπόθεση έχω ότι: $\lim_{h \rightarrow 0} f(z+h) = 8 \xrightarrow{\text{for } \epsilon = 1} f(z) = 8$

also $h(q) = f(q) + \ln(q-1) - \frac{3}{q} = 8 + 0 - \frac{3}{9} = \frac{13}{2} > 0$

και επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) \stackrel{\text{Προσβολή}}{\underset{\text{επιζήτα}}{=}} -\infty \quad \exists \text{ και } \sigma_0 \geq 1^+$

ώστε $h(u)$ ≤ 0 απα από Bolzano έχω μία
τολάχιστου ρίζα στο $(u, q) \subset (1, q)$, η μοναδικότητα δίνει
μονοτονία.

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (e, \pi): f(\xi) = \frac{f(1) + f(e) + f(\pi)}{3}$

$$\left. \begin{aligned} f \uparrow \text{ αρα } 1 < 1 < \pi &\Rightarrow f(1) < f(1) < f(\pi) \\ 1 < e < \pi &\Rightarrow f(1) < f(e) < f(\pi) \\ 1 < \pi < \pi &\Rightarrow f(1) < f(\pi) < f(\pi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$f(1) < \frac{f(1) + f(e) + f(\pi)}{3} < f(\pi) \text{ αρα απο Θ.Ε.Τ}$$

$$\exists \text{ μοναδικό } \xi \in (1, \pi) : f(\xi) = \frac{f(1) + f(e) + f(\pi)}{3}$$

η μοναδικότητα λόγω μονοτονίας

Γ5. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^x(x + \sin x)} \cdot [f(1+e^x) - f(1)]$

Γ5 το όριο γίνεται: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x + \sin x} \cdot \frac{f(1+e^x) - f(1)}{e^x}$

$$\text{οπω } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x(1 + \frac{\sin x}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 2$$

$$\text{γιατι } \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|} \xrightarrow{\text{u.n}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$\text{καν } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(1+e^x) - f(1)}{e^x} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow 0}]{e^x = u} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} = f'(1) = 3$$

Αρα η $\lim$ γίνεται ίση με $2 \cdot 3 = 6$