

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (ΜΕΧΡΙ 2.5)
Γ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει

$$:(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

(Μονάδες 7)

A2. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x ;

(Μονάδες 4)

A3. Μπορείτε να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle;

(Μονάδες 4)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, τότε ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.	Σ	Λ
β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$.	Σ	Λ
γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , τότε υπάρχει ένα μόνο $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\alpha) - f(\beta) = f'(\xi)(\alpha - \beta)$.	Σ	Λ
δ) Ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης f ως προς x ορίζεται για όλα τα x του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.	Σ	Λ
ε) Μια συνάρτηση, της οποίας ορίζεται η αντίστροφη, είναι οπωσδήποτε γνησίως μονότονη.	Σ	Λ

(Μονάδες 2x5=10)

ΘΕΜΑ Β

Έστω $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 1, & x \geq 0 \\ \gamma x^2 + 2x + \delta, & x < 0 \end{cases}$ και ο αριθμητικός μέσος των α, γ είναι το 5.

B1. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την $f(x)$ στο $(-1, 1)$.

(Μονάδες 8)

B2. Αν $\alpha=3, \beta=2, \gamma=7$ και $\delta=1$, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = -25$

(Μονάδες 8)

B3. Να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(\eta \mu x)}{x} - \frac{1}{x} \right)$

(Μονάδες 6)

B4. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi_3 \in (-1, 1)$: $2f(\xi_3) + \xi_3 f'(\xi_3) = 0$

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x+1) \leq x^2 + 3x + 3 \leq f(x-1) + 4x + 2$ και η ευθεία $\psi = ax - 3$, όπου a πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(0) = 1$ και ότι $f(x) = x^2 + x + 1$

(Μονάδες 2+2=4)

Γ2. Να βρείτε το a ώστε η ευθεία $\psi = ax - 3$ να εφάπτεται της C_f .

(Μονάδες 2+3=5)

Γ3. Αν η ευθεία $\psi = ax - 3$ δεν εφάπτεται, άλλα τέμνει την C_f , στα σημεία A και B , να βρεθεί το a ώστε οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία A και B να είναι κάθετες.

(Μονάδες 8)

Γ4. Έστω $g(x) = -2x^2 + x - 5$. Να δείξετε ότι οι C_f και C_g δέχονται κοινές εφαπτόμενες, να βρεθούν τα σημεία επαφής καθώς και οι εξισώσεις τους και ναδειχθεί ότι τέμνονται στον άξονα $\psi\psi'$.

(Μονάδες 4+4=8)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, άρτια, δυο φορές παραγωγίσιμη, με $f''(x) \neq 0$ για όλα τα x και $f(-1) + f(1) = 0$

Δ1. Να δείξετε ότι η f έχει 2 ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -x \cdot f'(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$.

(Μονάδες 8)

Δ3. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της f με την ίδια κλίση.

(Μονάδες 3)

Δ4. Να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1 και ξ_2 που ανήκουν στο $(-1, 1)$ ώστε :

$$2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 0$$

(Μονάδες 3)

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ_3 που ανήκει στο $(-1, 1)$ ώστε το $f''(\xi_3)$ να είναι ετερόσημο του $f\left(-\frac{1}{5}\right)$.

(Μονάδες 3)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

A4. α) $\rightarrow \Lambda$ β) $\rightarrow \Sigma$ γ) $\rightarrow \Lambda$ δ) $\rightarrow \Lambda$ (για όλα τα x που παραγωγίζετε η ε) $\rightarrow \Lambda$

B.

B₁) Για να εφαρμόζονται το Θ. Rolle πρέπει:

α) f συνεχής στο $[-1, 1]$. Έτσι $[-1, 0)$, $(0, 1]$ η f είναι συνεχής.

για το 0 έχω $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \boxed{1 = 5}$

β) f παραγωγική $(-1, 1)$. Έτσι $(-1, 0)$, $(0, 1)$ η f είναι παραγωγική.

για το 0 έχω: $f'_-(0) = f'_+(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 + 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 + bx + 1 - 1}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + 2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{2 = b}$$

$$\gamma) f(-1) = f(1) \Leftrightarrow 3(-1)^2 + 2(-1) + 1 = a(-1)^2 + b(-1) + 1 \xleftrightarrow[b=2]{\delta=1} a(-1)^2 + 2(-1) + 1$$

$$\left. \begin{aligned} 3 - 2 + 1 &= a - 2 + 1 \Leftrightarrow \gamma = a + 4 \\ \text{οπώ) από υπόθεση } \frac{a + \gamma}{2} &= 5 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} -a + \gamma &= 4 \\ a + \gamma &= 10 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} \gamma &= 7 \\ a &= 3 \end{aligned}}$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + 1, & x \geq 0 \\ 7x^2 + 2x + 1, & x < 0 \end{cases}$$

B₂) Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ στα $(-1, 0)$, $(0, 1)$ για την f(x) να έχω

$$\left. \begin{aligned} f'(z_1) &= \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1 - 6}{1} = -5 \\ f'(z_2) &= \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{6 - 1}{1} = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(z_1) \cdot f'(z_2) = -25$$

$$B_3) f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 & x \geq 0 \\ 7x^2 + 2x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (7x^2 + 2x + 1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + 2x + 1) = 1 \quad \text{αρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{7x^2 + 2x + 1}{x} - \frac{1}{x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{7x^2}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{7x^2}{x^2} \cdot x + \frac{2x}{x} \right) = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3x^2}{x^2} \cdot x + \frac{2x}{x} \right) = 2 \quad \text{αρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} \right) = 2.$$

B4

το ξ_3 είναι διάφορο του 0 γιατί αν $\xi_3 = 0$ η σχέση γίνεται $2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ ατονο από

$$\xi_3 \neq 0$$

εξω:

$$2f(x) + x f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f(x) + x^2 f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 \cdot f(x))' = 0. \quad \text{Αρα έστω } g(x) = x^2 f(x) \text{ στο } [-1, 1]$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet g(x) \text{ συνεχής στο } [-1, 1] \\ \bullet g(x) \text{ παραγωγ. στο } (-1, 1) \\ \bullet g(-1) = (-1)^2 f(-1) = f(-1) = 7 - 2 + 1 = 6 \\ \bullet g(1) = 1^2 \cdot f(1) = f(1) = 3 + 2 + 1 = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Θ. Rolle} \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\exists \xi_3 \in (-1, 1) : g'(\xi_3) = 0 \Rightarrow 2\xi_3 f(\xi_3) + \xi_3^2 f'(\xi_3) = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\xi_3 \neq 0}} \quad 2f(\xi_3) + \xi_3 f'(\xi_3) = 0 \quad \text{που είναι το}$$

συμπέρασμα

Γ.

$$\begin{aligned} \text{Γ1)} \quad & \left. \begin{array}{l} \text{ισχύει} \quad f(x+1) \leq x^2+3x+3 \\ \text{και} \quad x^2+3x+3 \leq f(x-1)+4x+2 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xleftarrow{x=-1} \\ \xrightarrow{x=1} \end{array} \left. \begin{array}{l} f(0) \leq (-1)^2-3+3 \\ f(0) \geq 1^2+3+3-4-2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ & \left. \begin{array}{l} f(0) \leq 1 \\ f(0) \geq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{f(0)=1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ισχύει:} \quad & \left. \begin{array}{l} f(x+1) \leq x^2+3x+3 \\ \text{και} \quad x^2+3x+3 \leq f(x-1)+4x+2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f(x+1) \leq x^2+3x+3 \\ f(x-1) \geq x^2-x+1 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{x: x-1} \\ \xrightarrow{x: x+1} \end{array} \\ & \left. \begin{array}{l} f(x) \leq (x-1)^2+3(x-1)+3 \\ f(x) \geq (x+1)^2-(x+1)+1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) \leq x^2-2x+1+3x-3+3 \\ f(x) \geq x^2+2x+1-x-1+1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ & \left. \begin{array}{l} f(x) \leq x^2+x+1 \\ f(x) \geq x^2+x+1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{f(x)=x^2+x+1} \end{aligned}$$

$$\text{Γ2)} \quad f(x)=x^2+x+1$$

$$\psi = \alpha x - 3$$

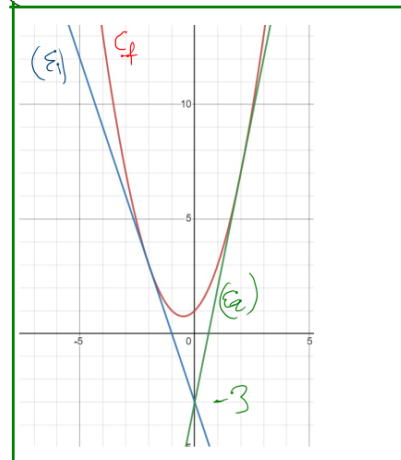
α' περίπτωση: για να εφαρμόζονται πρέπει το σύστημα να έχει
δυνατά δύο διαβαθμούς $\left. \begin{array}{l} \psi = x^2+x+1 \\ \psi = \alpha x - 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x^2+x+1 = \alpha x - 3 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} x^2 + (1-\alpha)x + 4 &= 0 \text{ πρέπει } \Delta = 0 \Leftrightarrow (1-\alpha)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow \\ (1-\alpha)^2 &= 16 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 1-\alpha = 4 \\ 1-\alpha = -4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = -3 \\ \alpha = 5 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Άρα οι ευθείες που εφαρμόζονται είναι

$$(\varepsilon_1): \psi = -3x - 3$$

$$(\varepsilon_2): \psi = 5x - 3$$



β' ζήτημα: Έστω $M(x_m, \psi_m)$ το σημείο επαφής προφανώς

ισχύει: $f'(x_m) = \alpha \xrightarrow{f'(x) = 2x+1} 2x_m + 1 = \alpha$

Επίσης $\psi_m = \alpha \cdot x_m - 3$
 $\psi_m = x_m^2 + x_m + 1$ } $x_m^2 + x_m + 1 = \alpha x_m - 3 \Rightarrow$

$x_m^2 + x_m + 1 = (2x_m + 1) \cdot x_m - 3 \Leftrightarrow x_m^2 + x_m = 2x_m^2 + x_m - 4 \Leftrightarrow$

$x_m^2 = 4 \Leftrightarrow x_m = \begin{matrix} \rightarrow 2 \\ \rightarrow -2 \end{matrix}$ Άρα τα σημεία επαφής είναι τα $(2, 7), (-2, 3)$

Αν $x_m = 2$ τότε $\alpha = 5$ άρα $(\varepsilon_1): \psi = -3x - 3$
 Αν $x_m = -2$ τότε $\alpha = -3$ άρα $(\varepsilon_2): \psi = 5x - 3$

(3) Έστω $\psi = \alpha x - 3$
 $\psi = x^2 + x + 1$ } $x^2 + x + 1 = \alpha x - 3 \Leftrightarrow$

$x^2 + (1-\alpha)x + 4 = 0$

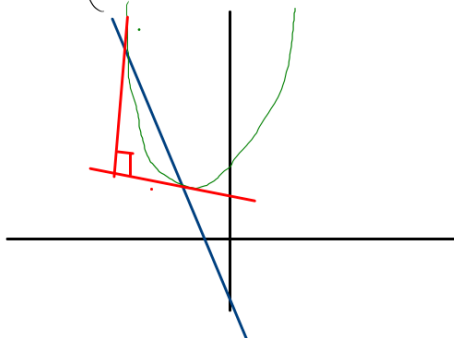
$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{\alpha-1}{1} = \alpha-1, P = \frac{\delta}{a} = 4.$

Έστω A, B τα σημεία τομής των ευθειών με την $f(x)$ τότε οι τετμημένες των A, B είναι οι ρίζες του. Προηγούμενου τριωνύμου. Οι νλιδεις των εφαπτομένων στα σημεία A, B είναι: $\lambda_1 = f'(x_1), \lambda_2 = f'(x_2)$

Πείνει $\lambda_1 \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow (2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = -1 \Leftrightarrow$

$4x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 1 = -1 \Leftrightarrow 4 \cdot 4 + 2(x_1 + x_2) = -2 \Leftrightarrow$

$16 + 2(\alpha - 1) = -2 \Leftrightarrow 2(\alpha - 1) = -18 \Leftrightarrow \alpha - 1 = -9 \Leftrightarrow \alpha = -8$



7) $f(x) = x^2 + x + 1$ Έστω $K(x_n, \psi_n), \Lambda(x_n, \psi_n)$ τα σημεία
 $g(x) = -2x^2 + x - 5$ στα οποία το $2f$ ισχύει:

$$f'(x_k) = g'(x_n) = \frac{\psi_n - \psi_k}{x_n - x_k} \Leftrightarrow$$

$$2x_k + 1 = -4x_n + 1 = \frac{\psi_n - \psi_k}{x_n - x_k}$$

το K είναι πάνω στην f
 το Λ ' ' ' ' ' ' ' ' g

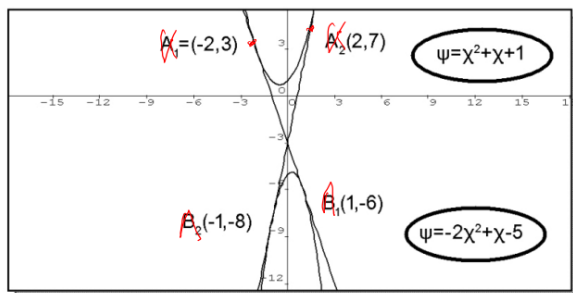
Από $2x_k + 1 = -4x_n + 1 \Leftrightarrow x_k = -2x_n$

Επίσης $-4x_n + 1 = \frac{\psi_n - \psi_k}{x_n - x_k} \Leftrightarrow -4x_n + 1 = \frac{-2x_n^2 + x_n - 5 - x_k^2 - x_k - 1}{x_n - x_k} \xRightarrow{x_k = -2x_n}$

$$-4x_n + 1 = \frac{-2x_n^2 + x_n - 5 - 4x_n^2 - 2x_n - 1}{x_n + 2x_n} \Leftrightarrow -4x_n + 1 = \frac{-6x_n^2 + 3x_n - 6}{3x_n} \Leftrightarrow$$

$$-4x_n + 1 = \frac{-3(2x_n^2 - x_n + 2)}{3x_n} \Leftrightarrow -4x_n^2 + x_n = -2x_n^2 + x_n - 2 \Leftrightarrow$$

$2x_n^2 = 2 \Leftrightarrow x_n = \pm 1$ και $x_k = \mp 2$ εύκολα βρίσκουμε και τα $\psi_{n,k}$
 αρα τα σημεία στα οποία είναι τα $K(2,7), K(-2,3)$ για την f
 και $\Lambda(1,-6), \Lambda(-1,-8)$ για την g



Οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι:

για την f : $\psi - \psi_k = f'(x_k)(x - x_k) \Leftrightarrow \psi = 3 \xRightarrow{f'(x) = 2x + 1} -3(x + 2) \Leftrightarrow$

$\psi = -3x - 3$ για το σημείο $K(-2, 3)$

και $\psi - 7 = 5(x - 2) \Leftrightarrow \psi = 5x - 10 + 7 \Leftrightarrow \psi = 5x - 3$ για το
 σημείο $K(2, 7)$

Οι ίδιες εξισώσεις είναι και για την g γιατί είναι κοινές

Αρα $\psi = -3x - 3$ (ε1) } $\Leftrightarrow -3x = 5x \Rightarrow x = 0$ Αρα
 $\psi = 5x - 3 =$ (ε2) } $\psi = -3$

το κοινό των σημείων είναι το $(0, -3)$ που βρίσκουμε
 πάνω στον $\psi\psi'$ άξονα

Δ.

Δ_1) ισχύει ότι: $f(-1) + f(1) = 0 \xrightarrow[\text{αλλά}]{f(-x) = f(x)} f(1) + f(1) = 0 \Rightarrow$

$f(1) = 0 = f(-1)$ αφού η $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες τις $x_1 = -1, x_2 = 1$

Εστω ότι έχει και μία τρίτη ρίζα την x_3
τότε από Θ. Rolle στα $(-1, 1)$, $(1, x_3)$ έχουμε ότι:

η $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες και η $f''(x)$

ζανά με Θ. Rolle έχει μία τουλάχιστον ρίζα, άρα το
γιατί $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ αρα οι ρίζες είναι μόνο 2.

Εκτός θεωρείται ότι $-1 < 1 < x_3$ το ίδιο θα συνέβαινε αν
η ρίζα x_3 ήταν σε κάποιο άλλο σημείο.

Δ_2) η εξίσωση γράφεται: $x \cdot f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$(x \cdot f(x))' = 0$ εστω $g(x) = x \cdot f(x)$

• συνεχής στο $[-1, 1]$, παραγ. στο $(-1, 1)$

• $g(-1) = -f(-1)$
• $g(1) = f(1)$ } $\Rightarrow g(-1) = g(1)$ (υπόθεση)

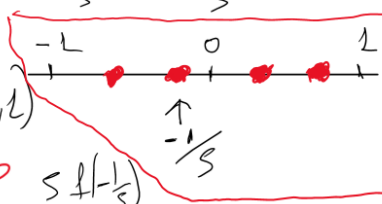
Αρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει
μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$ και κατά συνέπεια
η εξίσωση $f(x) - x f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον
ρίζα στο $(-1, 1)$.

Δ_3) εστω ότι υπάρχουν δύο σημεία $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$
με την ίδια κλίση. Τότε ισχύει $f'(x_1) = f'(x_2)$

Από Θ. Rolle όπως για την $f''(x)$ ισχύει ότι:

$\exists \xi \in (x_1, x_2) : f''(\xi) = 0$ αυτό από υπόθεση.

Δ_4 Θα Χωρίσω το $(-1, 1)$ σε 5 हिπ $\frac{1 - (-1)}{5} = \frac{2}{5}$
 $-1 + 2 \cdot \frac{2}{5} = -\frac{5}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{1}{5}$
 Θα εφαρμόσω το Θ.Μ.Τ στα $(-1, -\frac{1}{5})$, $(-\frac{1}{5}, 1)$
 $\exists \xi_1 \in (-1, -\frac{1}{5}) : f'(\xi_1) = \frac{f(-\frac{1}{5}) - f(-1)}{-\frac{1}{5} + 1} = \frac{5f(-\frac{1}{5}) - 4}{4}$ $f(-1) = 0$
 $\exists \xi_2 \in (-\frac{1}{5}, 1) : f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(-\frac{1}{5})}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{f(1) - 5f(-\frac{1}{5})}{6}$ $f(1) = 0$



Άρα $2 \cdot f'(\xi_1) + 3 f'(\xi_2) = \frac{2 \cdot 5 f(-\frac{1}{5})}{4} + \frac{3(-5 f(-\frac{1}{5}))}{6} =$
 $\frac{5 \cdot f(-\frac{1}{5})}{2} - \frac{5 f(-\frac{1}{5})}{2} = 0$

Δ_5 Για τα ξ_1, ξ_2 του προηγούμενου ερωτήματος
 εφαρμόσω Θ.Μ.Τ για το f' στο (ξ_1, ξ_2)
 $\exists \xi_3 \in (\xi_1, \xi_2) : f''(\xi_3) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{-\frac{5f(-\frac{1}{5})}{6} - \frac{5f(-\frac{1}{5})}{4}}{\xi_2 - \xi_1} =$
 $\frac{-\frac{90f(-\frac{1}{5})}{24} - \frac{30f(-\frac{1}{5})}{24}}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{-\frac{120f(-\frac{1}{5})}{24}}{12(\xi_2 - \xi_1)} = \frac{-5f(-\frac{1}{5})}{\xi_2 - \xi_1}$
 Όπως ισχύει $\frac{-25}{12(\xi_2 - \xi_1)} < 0$ Άρα $\text{Αν } f(-\frac{1}{5}) > 0 \rightarrow f''(\xi_3) < 0$
 $\text{Αν } f(-\frac{1}{5}) < 0 \rightarrow f''(\xi_3) > 0$
 Συνεπώς $f''(\xi_3), f(-\frac{1}{5})$ ετερόσημα

Δ5) Για τα z_1, z_2 του προηγούμενου ερωτήματος
 έχω ότι από Θ.Μ.Τ για την $f'(x)$ έχω ότι:
 $\exists z_3 \in (z_1, z_2): f''(z_3) = \frac{f'(z_2) - f'(z_1)}{z_2 - z_1}$ $f'(z_1) = -f'(z_2)$

$$\frac{f'(z_2) + f'(z_2)}{z_2 - z_1} = \frac{2f'(z_2)}{z_2 - z_1}$$

 όπως $f'(z_2) \stackrel{\text{προηγ. ερώτημα}}{=} f(1) - f(0)$