

ΘΕΜΑ Β

1. (μέχρι 2.8)

Έστω $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ άρτια, συνεχή στο $[-1,1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με

- $f(0)=3$,
- $f(-1)=2$ και
- ισχύει: $3-x^2 \leq f(x) \leq 2+\sin x$

B1. Να αποδείξετε ότι : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

(Μονάδες 6)

B2. Να αποδείξετε ότι : $f'(0) = 0$

(Μονάδες 6)

B3. Να αποδείξετε ότι : $2 \leq f(x) \leq 3$ και ότι η f για $x=-1$ και 1 παρουσιάζει ελάχιστο.

(Μονάδες 6)

B4. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι κυρτή στο $[-1,1]$

(Μονάδες 7)

2. (γενικό)

Έστω $f(x) = \sqrt{x} - 1, x \geq 0$ και $g(x) = \frac{x-1}{x+2}, x \neq -2$

B1. Να δειχθεί ότι οι παραπάνω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να λυθούν οι εξισώσεις:

- $f^{-1}(x+5)=4$
- $g^{-1}(\eta\mu x) = 0$

(Μονάδες 6)

B2. Να δείξετε ότι $f^{-1}(x) = (x+1)^2, x \geq -1$ και $g^{-1}(x) = \frac{-1-2x}{x-1}, x \neq 1$

(Μονάδες 6)

B3. Να γίνει γραφική παράσταση των f και f^{-1} .

(Μονάδες 6)

B4. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την $C_{f^{-1}}$ και τους άξονες xx' και yy' .

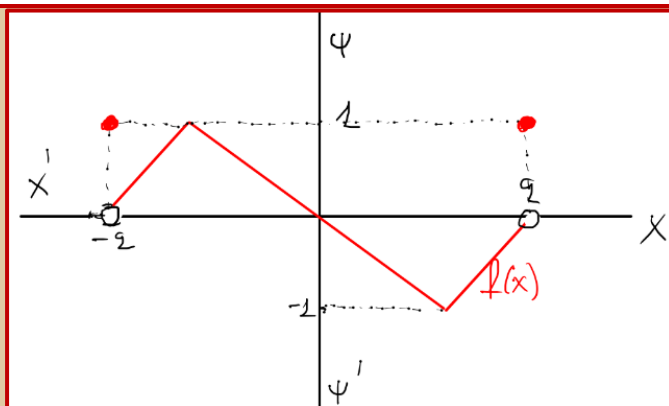
(Μονάδες 7)

3. (μέχρι 1.7)

Δίνεται η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.

B1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(Μονάδες 4)



B2. Να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(Μονάδες 8)

B3. Να λυθεί η εξίσωση: $f^3(x) - 2f^2(x) - f(x) + 2 = 0$

(Μονάδες 6)

B4. Να λυθεί η ανίσωση: $0 < f(x) < [f(-1)]^{f(2)}$

(Μονάδες 7)

4. (μέχρι 1.8)

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $x \cdot f(x) = 1 - \sin x + x^2 - 2x$

B1. Να δειχθεί ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

B2. Να δειχθεί ότι: $f(0) = -2$

B3. Να δειχθεί ότι $f'(0) = \frac{3}{2}$.

B4. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi)$.

5. (γενικό)

Δίνονται οι συναρτήσεις $g, h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους: $g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x}$ και $h(x) = \ln x$

B1. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $f = g \circ h$

B2. Αν $f(x) = \frac{x+1}{x}$, με $x > 1$, να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να εξετάσετε αν ισχύει η σχέση: $f(x) - f^{-1}(x+1) = 1$

B3. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των f , f^{-1} και να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .

B4. Να λυθεί η εξίσωση : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f^{-1}(1 + \eta \mu^2 x) \cdot dx = x$

6. (μέχρι 1.8) (παραλλαγή θέμα Β 2022)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ και $g : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x}$

B1. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $h = f \circ g$

B2. Αν $h(x) = x^2 - 4x + 3$, με $x \in [2, 4]$, να αποδείξετε ότι η h είναι «1-1» και να βρείτε τη αντίστροφη h^{-1} .

B3. Αν $h^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 2$, με $x \in [-1, 3]$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x) - 4}{x - 3}, & x \in [-1, 3) \\ \frac{1}{4}, & x = 3 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήμα-

τος ενδιαμέσων τιμών για την $\phi(x)$ στο $[-1, 3]$

B4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 3)$ τέτοιο ώστε $\phi(\xi) = e^\alpha$ όπου $-2 \ln 2 < \alpha < -\ln 2$

7. (μέχρι 1.3)

Δίνονται οι συναρτήσεις $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x + \sqrt{x}$ και $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$

B1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = g \cdot h$ και $r = \frac{g}{h}$

B2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $f(x) = \sqrt{-x}$

β) $r(x) = 0$

B3. Να αποδείξετε ότι η $r(x)$ είναι «1-1» και να βρεθεί η αντίστροφη της.

B4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $r(r^{-1}(x)) = r^{-1}(x) + f(x)$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(1, 2)$

8. (μέχρι 2.7)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 1$ και $g: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = e^x$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$

B2. Αν $(f \circ g)(x) = e^{2x} + 1$, $x \geq -1$, να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της. Για τις δυο αυτές συναρτήσεις να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση.

B3. Αν $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{\ln(x-1)}{2}$, $x \geq e^{-2} + 1$, να υπολογιστούν τα ακόλουθα όρια:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f \circ g)(x)}{(f \circ g)^{-1}(x)}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((f \circ g)(x) - x^2)$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f \circ g)^{-1}(x)}{x - 2}$

B4. Να βρείτε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της $(f \circ g)$ και ποιο της $(f \circ g)^{-1}$ απέχει την μικρότερη απόσταση από την πρώτη διχοτόμο.

9. (μέχρι 2.7) (παραλλαγή θέμα Β επαναληπτικές 2017)

Δίνεται κύκλος ακτίνας $R = 1$ και εγγράφουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ διαστάσεων x, ψ .

B1. Να εκφράσετε το ψ ως συνάρτηση του x και να δείξετε ότι $(AB\Gamma\Delta) = \sqrt{-x^4 + 4x^2}$, $x \in (0, 2)$

B2. Να βρείτε τις διαστάσεις x, ψ ώστε το εμβαδό να γίνει μέγιστο.

B3. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ για το οποίο εμβαδό $E(x_0)$ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να ισούται με $2e^{x_0}$

B4. Με δεδομένο ότι $\ln x \leq x - 1$, $x > 0$, να δείξετε ότι $E(x) < \frac{2^{E(x)} - 1}{\ln 2}$

10. (μέχρι 2.10) (παραλλαγή θέμα Β 2018)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να σχεδιάσετε πρό-

χειρα την γραφική παράσταση της f .

B4. α) Να δείξετε ότι : $e - \pi < \frac{1}{\pi - 1} - \frac{1}{e - 1}$.

β) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = \eta \mu x$ έχει λύση.

11. (παραλλαγή θέμα Β 2017)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln 2x, x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{x+1}, x \neq -1$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

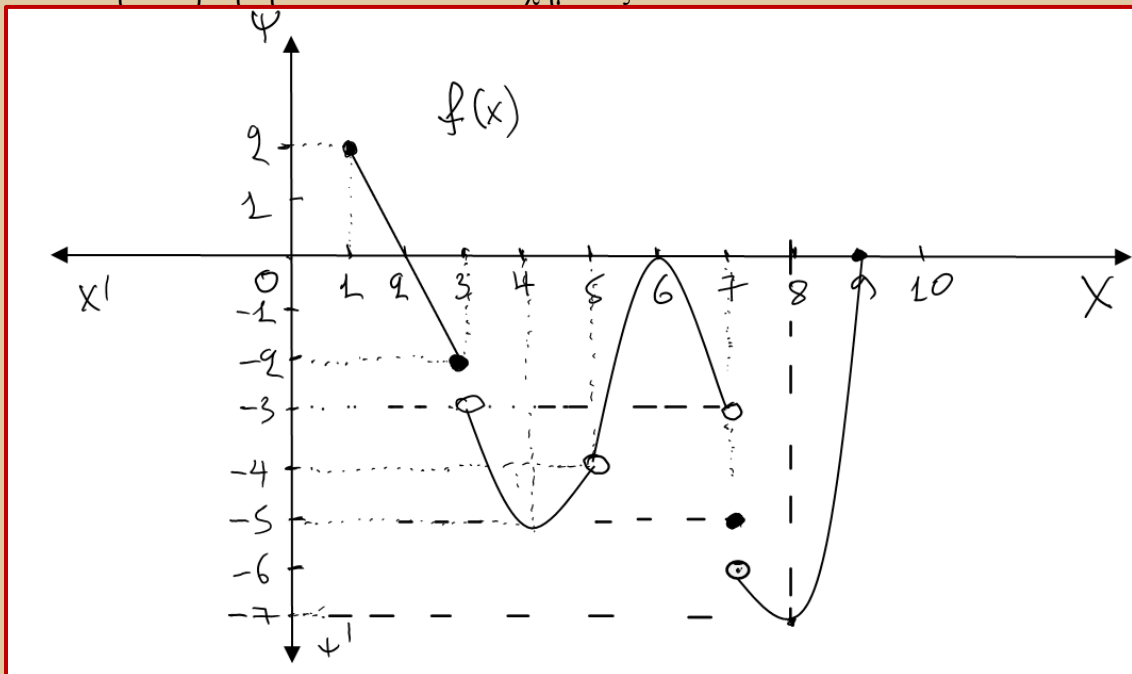
B2. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right), x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

B3. Αν $\phi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{2 - e^x}, x \neq \ln 2$, να μελετήσετε τη ϕ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

B4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ϕ και να τη σχεδιάσετε, κατόπιν από την γραφική παράσταση της ϕ να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της h .

12. (παραλλαγή θέμα Β 2016)

Δίνεται η συνάρτηση f του ακόλουθου σχήματος



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

B2. Να βρείτε τα όρια:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad 2. \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \quad 3. \lim_{x \rightarrow 5} f(x) \quad 4. \lim_{x \rightarrow 7} f(x) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 9} f(x)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)} \quad 7. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 1} f(f(x))$$

B3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής και τα σημεία στα οποία ισχύει $f'(x) = 0$ και να αιτιολογήσετε .

B4.

1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

2. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 3} |f^2(x) + 5f(x)|$

13. (παραλλαγή επαναληπτικές θέμα Β 2018)

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}$$

B1. Να υπολογιστεί το α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο 1.

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha = -2$.

B2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$ και να δείξετε ότι: $\exists x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 4\right) : f'(x_0) = 0$

B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f και να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

B4. Να λυθεί η εξίσωση : $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του λ , γραφικά ή με οποιαδήποτε άλλο τρόπο.

14.

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \frac{\ln x - 1}{x - 1}, \quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

B1. Να βρεθούν τα σημεία ασυνέχειας της f και οι ασύμπτωτες.

B2. Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο και μοναδικά σημεία $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 \in (1,+\infty)$ στα οποία μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος της f .

B3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ και το $\lim_{x \rightarrow e} \frac{g(x)}{x - e}$

B4. Να λυθεί η εξίσωση : $1^{f'(x)} + 2^{f'(x)} + 3^{f'(x)} + \dots + 100^{f'(x)} = 100$

15.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1}$ και η $g(x) = \ln(x-1)$, $x > 1$

B1. Να βρεθεί η συνάρτηση $\varphi(x)$ ώστε : $\phi(f(x)) = e^{x-1} + e^{e^{x-1}}$ και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $\varphi(x)$ είναι πιο πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

B2. Ναδειχθεί ότι η $\varphi(x)$ είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

B3. Να βρεθούν τα σημεία τομής της $\varphi(x)$ με την ευθεία $x = 4$ και της αντίστροφης της $\varphi(x)$ με την ευθεία $y = 4$.

B4. Να υπολογιστεί το $\int_{e^2+2}^{e^3+3} \phi^{-1}(x) dx$