

ΘΕΜΑ Β ΜΕ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. (μέχρι 2.8)

Έστω $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ άρτια, συνεχή στο $[-1,1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με

- $f(0)=3$,
- $f(-1)=2$ και
- ισχύει: $3-x^2 \leq f(x) \leq 2+\sin x$

B1. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

B2. Να αποδείξετε ότι: $f'(0) = 0$

B3. Να αποδείξετε ότι: $2 \leq f(x) \leq 3$ και ότι η f για $x=-1$ και 1 παρουσιάζει ελάχιστο.

B4. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι κυρτή στο $[-1,1]$

Υπόθεση
B1) ισχύει $3-x^2 \leq f(x) \leq 2+\sin x$

• Έστω $x > 0$ $\frac{3-x^2}{x} \leq \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{x} - x \right) \xrightarrow{\frac{3}{0^+} - 0} +\infty \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

• Έστω $x < 0$ $\frac{3-x^2}{x} \geq \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3-x^2}{x} \xrightarrow{\frac{3}{0^-} - 0} -\infty \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

B2) α' τρόπο: ισχύει $3-x^2 \leq f(x) \leq 2+\sin x \implies -x^2 \leq f(x)-3 \leq \sin x-1$

• για $x > 0$ $-x \leq \frac{f(x)-3}{x} \leq \frac{\sin x-1}{x}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x-1}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-3}{x} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \implies f'_+(0) = 0$$

• για $x < 0$ $-x \geq \frac{f(x)-3}{x} \geq \frac{\sin x-1}{x}$ ομοίως έχω ότι $f'_-(0) = 0$

άρα $\boxed{f'(0) = 0}$

β' τρόπο: Αφού ισχύει $f(x) \leq 2+\sin x \implies f(x) \leq 3 \xrightarrow{f(0)=3} f(x) \leq f(0)$
για όλα τα $x \in [-1,1]$ άρα συνθήκη $x_0=0$ έχει f μέγιστο και
 x_0 εσωτερικό σημείο του διαστήματος και f παραγωγίσιμη σε αυτό
από από θ. Fermat ισχύει $f'(0) = 0$

(B2) ισχύει $3 - x^2 \leq f(x) \leq 2 + 5x \leq 3$
 $|x| \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -x^2 \geq -1 \Rightarrow 3 - x^2 \geq 2 \quad \forall x \in [-1, 1]$ επομένως

$$\left. \begin{aligned} 2 \leq 3 - x^2 \leq f(x) \leq 2 + 5x \leq 3 \\ f(-1) = 2, f(0) = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-1) \leq f(x) \leq f(0)$$

αρα για $x = -1$ η f παρουσιάζει ελάχιστο ω $f(-1) = 2$
 όπως f άρα $f(-1) = f(1) = 2$ αρα να για $x = 1$ η
 f παρουσιάζει ελάχιστο ω $f(1) = 2$

(B4) εστω f κυρτή στο $[-1, 1]$ τότε f' ↑ στο $[-1, 1]$
 στο $[-1, 0]$ από θ.μ.τ έχω ότι $\exists \xi \in (-1, 0): f'(\xi) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} \Rightarrow$
 $f'(\xi) = \frac{3 - 2}{1} = 1$ όπως $\xi < 0 \Rightarrow f'(\xi) = 1 > 0 = f'(0)$ δηλαδή
 $\xi < 0 \Rightarrow f'(\xi) > f'(0)$ αρα η f' δεν είναι $\uparrow$ άτοπο αρα
 f όχι κυρτή στο $[-1, 1]$

2. (γενικό)

Έστω $f(x) = \sqrt{x} - 1, x \geq 0$ και $g(x) = \frac{x-1}{x+2}, x \neq -2$

B1. Ναδειχθεί ότι οι παραπάνω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να λυθούν οι εξισώσεις:

- $f^{-1}(x+5) = 4$
- $g^{-1}(\eta\mu x) = 0$

B2. Να δείξετε ότι $f^{-1}(x) = (x+1)^2, x \geq -1$ και $g^{-1}(x) = \frac{-1-2x}{x-1}, x \neq 1$

B3. Να γίνει γραφική παράσταση των f και f^{-1}

B4. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την $C_{f^{-1}}$ και τους άξονες xx' και yy' .

Υπό: B₁) $f(x) = \sqrt{x} - 1 \quad x \geq 0$ για $x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Rightarrow \sqrt{x_1} - 1 < \sqrt{x_2} - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ $\nearrow$ άρα αντιστρέφεται.

$$g(x) = \frac{x-1}{x+2} \quad x \neq -2 \text{ έστω } g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{x_1-1}{x_1+2} = \frac{x_2-1}{x_2+2} \Rightarrow$$

$$x_1 \cdot x_2 + 2x_1 - x_2 - 2 = x_1 x_2 - x_1 + 2x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow g \text{ "1-1" άρα αντιστρέφεται.}$$

$$\psi = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \psi + 1 = \sqrt{x} \\ \psi + 1 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = (\psi + 1)^2 \\ \psi \geq -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(A) = [-1, +\infty)$$

$$\psi = \frac{x-1}{x+2} \Leftrightarrow \psi x + 2\psi = x - 1 \Leftrightarrow x(\psi - 1) = -1 - 2\psi \Rightarrow x = \frac{-1-2\psi}{\psi-1} \quad \psi \neq 1$$

$$\text{Άρα } g(A) = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\bullet f^{-1}(x+5) = 4 \xrightarrow[\substack{x+5 \in f(A) \\ x+5 \geq -1 \\ x \geq -6}]{x+5 = f(4)} x+5 = f(4) \Leftrightarrow x = f(4) - 5 \Leftrightarrow x = 2 - 1 - 5 \Leftrightarrow \boxed{x = -4}$$

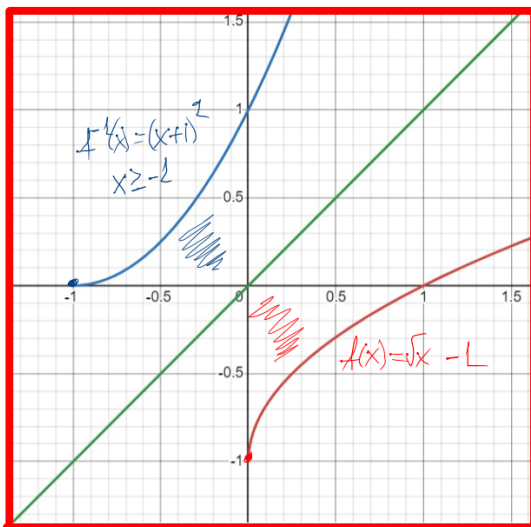
$$\bullet g^{-1}(u\pi x) = 0 \xrightarrow[\substack{u\pi x \in g(A) \\ u\pi x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 2u\pi \pm \frac{1}{2}}]{u\pi x = g(0)} u\pi x = g(0) \Leftrightarrow u\pi x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow u\pi x = -u\pi(\frac{1}{6}) \Leftrightarrow u\pi x = u\pi(-\frac{1}{6}) \Leftrightarrow x = 2u\pi - \frac{1}{6} \text{ ή } x = 2u\pi + \pi + \frac{1}{6} = 2u\pi + \frac{7\pi}{6}$$

B₂) από (B₁) έστω ότι $\left. \begin{array}{l} x = (\psi + 1)^2 \\ \psi \geq -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f^{-1}(\psi) = \left. \begin{array}{l} (\psi + 1)^2 \\ \psi \geq -1 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$f^{-1}(x) = (\psi + 1)^2, \quad x \geq -1$$

$$\text{και } \left. \begin{array}{l} x = \frac{-1-2\psi}{\psi-1} \\ \psi \neq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g^{-1}(\psi) = \frac{-1-2\psi}{\psi-1} \\ \psi \neq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{-1-2x}{x-1} \quad x \neq 1$$

B₃)



για τη γραφική παράσταση της f μετατονίζω την $\sqrt{x}$ μία μονάδα κάτω.

για την f^{-1} μετατονίζω την x^2 1 μονάδα αριστερά να διατηρεί τον περιορισμό $x \geq -1$

Βλέπουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις είναι συμμετρικές της $\psi = x$.

B4) Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι εμβαδά είναι ομοεπίσυνα. Θέλουμε το γραμμοσυνιστήνα άρα

$$E_2 = E_1 + E_2 = \int_{-1}^0 f^{-1}(x) dx + \int_0^1 |f(x)| dx$$

οπώς $E_1 = E_2$

$$E_1 = \int_{-1}^0 f^{-1}(x) dx = \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3} \Big|_{-1}^0 = \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{Άρα } E_2 = 2 E_1 = \left(\frac{2}{3} \text{ τ.μ.}\right)$$

3. (μέχρι 1.7)

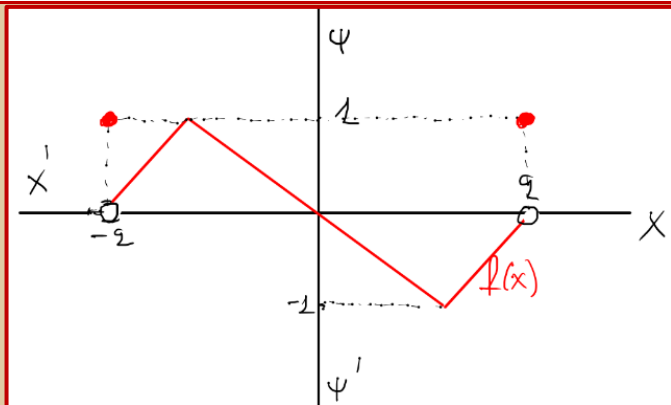
Δίνεται η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.

B1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

B2. Να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

B3. Να λυθεί η εξίσωση: $f^3(x) - 2f^2(x) - f(x) + 2 = 0$

B4. Να λυθεί η ανίσωση: $0 < f(x) < [f(-1)]^{f(2)}$



Υπόλ: B₁) Από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι $A_f = [-2, 2]$
 και $f(A) = [-1, 1]$

B₂) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$

B₃) ισχύει $f^3(x) - 2f^2(x) - f(x) + 2 = 0 \iff \overset{f(x)=y}{\psi^3 - 2\psi^2 - \psi + 2 = 0} \iff$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & P=1 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$(\psi-1)(\psi^2 - \psi - 2) = 0 \iff$$

$$(\psi-1)(\psi+1)(\psi-2) = 0 \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 1 \\ f(x) = -1 \\ f(x) = -2 \end{array} \right\} \iff$$

$$x = -2 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 2$$

$$x = 1$$

B₄) $0 < f(x) < f(-1) \iff 0 < f(x) < 1 \iff x \in (-2, -1) \cup (-1, 0]$

4. (μέχρι 1.8)

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $x \cdot f(x) = 1 - \sin x + x^2 - 2x$

B1. Ναδειχθεί ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

B2. Ναδειχθεί ότι: $f(0) = -2$

B3. Ναδειχθεί ότι $f'(0) = \frac{3}{2}$.

B4. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi)$.

Υπόλ: B₁) $f(x) = \frac{1 - \sin x}{x} + x - 2$ για $x \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \sin x}{x} + x - 2 \right)$$

$$\text{οπωσ } -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \geq -\sin x \geq -1 \Rightarrow 2 \geq 1 - \sin x \geq 0$$

$$\text{αρα } \left| \frac{1 - \sin x}{x} \right| \leq \left| \frac{2}{x} \right| \Rightarrow -\frac{2}{x} \leq \frac{1 - \sin x}{x} \leq \frac{2}{x}$$

$$\text{αρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sin x}{x} = 0 \text{ τίνια } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 + \infty - 2 = +\infty$$

B₂) f συνεχής στο 0 αρα $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ επομένως

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sin x}{x} + x - 2 \right) = 0 + 0 - 2 = -2 \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$$

$$\text{Άρα } f(0) = -2$$

$$\begin{aligned}
 \text{B}_3) \quad f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x} + x - 2 - (-2)}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x + x^2}{x^2} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \quad \text{D.L'H} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0+2x}{2x} \\
 &= \text{D.L'H} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2}{2} = \left(\frac{3}{2} \right) \text{ αρα } f'(0) = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{B}_4) \quad f(x) &= \frac{1-\cos x}{x} + x - 2 \\
 \text{απο } \textcircled{\text{B}_4} \quad \text{έχω ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \\
 f(n) &= \frac{1-\cos n}{n} + n - 2 = \frac{2}{n} + n - 2 > 0 \quad \text{γιατί } 2 + n^2 - 2n > 0 \Leftrightarrow \\
 & \quad n^2 - 2n + 2 > 0 \quad \text{Ισχύει γιατί} \\
 & \quad \Delta = 4 - 4(2) = 4 - 8 = -4 < 0 \\
 \text{και } f(0) &= \textcircled{\text{B}_2} - 2 < 0 \\
 \text{αρα απο Θ.Β η } f(x) &= 0 \quad \text{έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο } (0, n) \\
 \text{γιατί } f \text{ συνεχής.}
 \end{aligned}$$

5.

Δίνονται οι συναρτήσεις $g, h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους: $g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x}$ και $h(x) = \ln x$

B1. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $f = g \circ h$

B2. Αν $f(x) = \frac{x+1}{x}$, με $x > 1$, να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να εξετάσετε αν ι-

σχύει η σχέση: $f(x) - f^{-1}(x+1) = 1$

B3. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} και να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .

B4. Να λυθεί η εξίσωση: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f^{-1}(1 + \eta \mu^2 x) \cdot dx = x$

B₁

5. (μέχρι 1.8)

Δίνονται οι συναρτήσεις $g, h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους: $g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x}$ και $h(x) = \ln x$

B1. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $f = g \circ h$

$$\begin{aligned} f(x) &= g(h(x)) \\ \text{Περίν } \left. \begin{array}{l} x \in A_h \\ h(x) \in A_g \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ \ln x > \ln 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x > 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x > 1 \\ &A_f = (1, +\infty) \\ f(x) &= g(\ln x) = \frac{e^{\ln x} + 1}{e^{\ln x}} = \frac{x+1}{x} \quad \text{for } x > 1 \end{aligned}$$

B₂

B2. Αν $f(x) = \frac{x+1}{x}$, με $x > 1$, να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να εξετάσετε αν ισχύει η σχέση: $f(x) - f^{-1}(x+1) = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{x} \quad \text{for } x > 1 \\ \text{Έστω } \psi &= \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow \psi \cdot x = x+1 \Leftrightarrow (\psi-1)x = 1 \quad (1) \\ \text{αν } \psi &= 1 \text{ από (1)} \Rightarrow \text{αποκρούμετα } 1 \notin f(A) \\ \text{Αν } \psi &\neq 1 \text{ από (1)} \Rightarrow x = \frac{1}{\psi-1} \quad \text{οπότε } x > 1 \text{ αφού} \\ \text{Περίν } \frac{1}{\psi-1} &> 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\psi-1} - \frac{\psi-1}{\psi-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\psi}{\psi-1} > 0 \Leftrightarrow \\ \text{αφού } \psi &\in (1, 2) \\ \text{τελειώνω } f^{-1}(x) &= \frac{1}{x-1} \quad x \in (1, 2) \\ f(x) - f^{-1}(x+1) &= \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x} = 1 \quad \text{οπότε ισχύει 'οπότε} \\ \text{Περίν } \left. \begin{array}{l} x \in A_f \\ x+1 \in A_{f^{-1}} \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 1 \\ x+1 \in (1, 2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 1 \\ 1 < x+1 < 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 1 \\ 0 < x < 1 \end{array} \right\} \text{δεν} \\ &\text{Αποδίδεται η σχέση.} \end{aligned}$$

B3

B3. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των f , f^{-1} και να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad x > 1 \quad (\text{συμμετρία})$$

$$f'(x) = \frac{x - (x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

$$f''(x) = (-x^{-2})' = +2x^{-3} = +\frac{2}{x^3} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{αρα } y=1 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη.}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1} \quad 1 < x < 2 \quad (f^{-1})''(x) = 2(x-1)^{-3} > 0$$

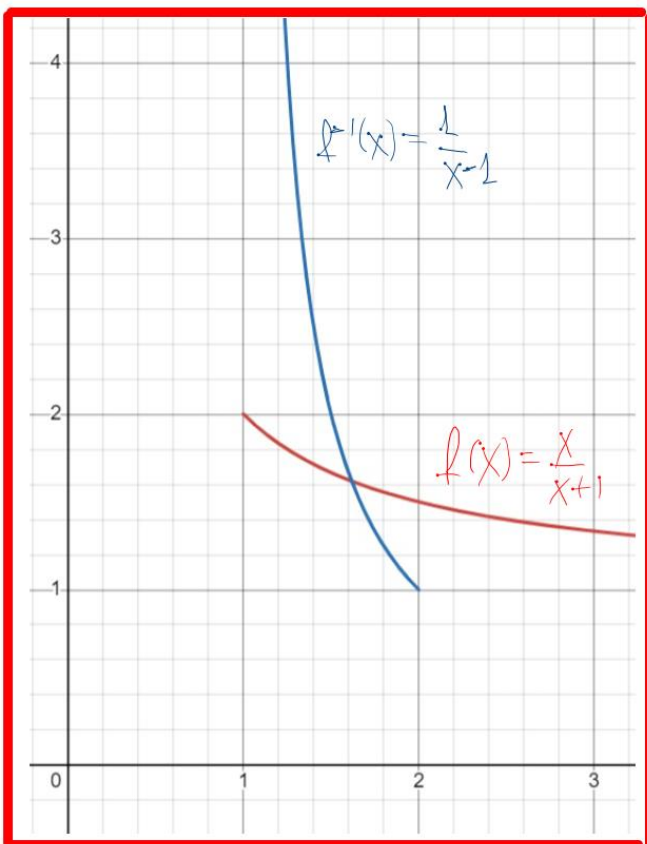
$$(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f^{-1}(x) = +\infty \quad x=1 \text{ κατακόρυφη ασύμπτωτη.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f^{-1}(x) = 1$$

x	1		$+\infty$
f'		-	
f''		+	
f		2	1

x	1		2
(f^{-1})'		-	
(f^{-1})''		+	
f^{-1}		$+\infty$	1



B4

B4. Να λυθεί η εξίσωση : $\int_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{3}} f^{-1}(1 + \eta \mu^2 x) \cdot dx = x$

Πρέπει $1 + \eta \mu^2 x \in (1, 2) \Leftrightarrow$

$1 < 1 + \eta \mu^2 x < 2 \Leftrightarrow 0 < \eta \mu^2 x < 1 \Leftrightarrow |\eta \mu x| < 1 \Leftrightarrow -1 < \eta \mu x < 1$
 $1 \leq x \leq \frac{1}{\eta \mu}$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{3}} f^{-1}(1 + \eta \mu^2 x) dx = x \Leftrightarrow \int_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{3}} \frac{1}{1 + \eta \mu^2 x - 1} dx = x \Leftrightarrow \int_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{3}} \frac{1}{\eta \mu^2 x} dx = x \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{1}{\eta \mu^2} \ln x \right]_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{3}} = x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\eta \mu^2} \ln \frac{n}{4} + \frac{1}{\eta \mu^2} \ln \frac{n}{3} \Leftrightarrow \boxed{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = x}$$

6. (μέχρι 1.8) (παραλλαγή θέμα Β 2022)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ και $g : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x}$

B1. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $h = f \circ g$

B2. Αν $h(x) = x^2 - 4x + 3$, με $x \in [2, 4]$, να αποδείξετε ότι η h είναι «1-1» και να βρείτε τη αντίστροφη h^{-1} .

B3. Αν $h^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 2$, με $x \in [-1, 3]$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x) - 4}{x - 3}, & x \in [-1, 3) \\ \frac{1}{4}, & x = 3 \end{cases}. \text{ Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήμα-}$$

τος ενδιαμέσων τιμών για την $\phi(x)$ στο $[-1, 3]$

B4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 3)$ τέτοιο ώστε $\phi(\xi) = e^\alpha$ όπου $-2 \ln 2 < \alpha < -\ln 2$

B₂

6. (μέχρι 1.8) (παραλλαγή θέμα Β 2022)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ και $g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x}$

B1. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $h = f \circ g$

$$h(x) = f(g(x))$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{πρέπει} \\ x \geq 0 \\ g(x) \leq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 2 \\ \sqrt{x} \leq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow A_h = [2, 4]$$

$$h(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^4 - 4(\sqrt{x})^2 + 3 = x^2 - 4x + 3, x \in [2, 4]$$

B₂

B2. Αν $h(x) = x^2 - 4x + 3$, με $x \in [2, 4]$, να αποδείξετε ότι η h είναι «1-1» και να βρείτε τη αντίστροφη h^{-1} .

$$h(x) = x^2 - 4x + 4 - 1 \Rightarrow h(x) = (x-2)^2 - 1$$

$$\text{Έστω } x_1, x_2 \in [2, 4] \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow \underbrace{x_1 - 2}_{<} < \underbrace{x_2 - 2}_{<} \Rightarrow$$

$$(x_1 - 2)^2 < (x_2 - 2)^2 \Rightarrow (x_1 - 2)^2 - 1 < (x_2 - 2)^2 - 1 \Rightarrow \underbrace{h(x_1)}_{<} < \underbrace{h(x_2)}_{<} \Rightarrow$$

$h \uparrow \Rightarrow h$ "1-1" αρα αντιστρέφεται.

$$\psi = (x-2)^2 - 1 \Rightarrow \psi + 1 = (x-2)^2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-2 = \sqrt{\psi+1} \\ x = \sqrt{\psi+1} + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \psi+1 \geq 0 \\ \psi \geq -1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \sqrt{\psi+1} + 2 \\ \psi \geq -1 \end{array} \right\} \text{ πρέπει } 2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \leq \sqrt{\psi+1} + 2 \leq 4 \\ \sqrt{\psi+1} \leq 2 \\ \psi+1 \leq 4 \\ \psi \leq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \psi \geq -1 \\ \psi \leq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \psi \in [-1, 3]$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \sqrt{\psi+1} \leq 2 \\ \psi \geq -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 \leq \psi+1 \leq 4 \\ \psi \geq -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -1 \leq \psi \leq 3 \\ \psi \geq -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \psi \in [-1, 3]$$

$$\text{Αρα } \boxed{h^{-1}(\psi) = \sqrt{\psi+1} + 2 \quad \psi \in [-1, 3]}$$

B3

B3. Αν $h^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 2$, με $x \in [-1, 3]$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)-4}{x-3}, & x \in [-1, 3) \\ \frac{1}{4}, & x = 3 \end{cases}. \text{ Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήμα-}$$

τος ενδιαμέσων τιμών για την $\phi(x)$ στο $[-1, 3]$

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & x \in [-1, 3) \\ \frac{1}{4} & x = 3 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{οι προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ είναι} \\ \phi(x) \text{ συνεχής στο } [-1, 3] \text{ και} \\ \phi(-1) \neq \phi(3) \end{array} \right\}$$

$$\phi(3) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x+1)-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{4} = \phi(3) \quad \text{άρα } \phi \text{ συνεχής στο } 3 \text{ άρα } \phi \text{ συνεχής στο } [-1, 3]$$

$$\phi(-1) = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = \phi(3). \text{ άρα ικανοποιείται το Θ.Μ.Τ}$$

B4

B4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 3)$ τέτοιο ώστε $\phi(\xi) = e^\alpha$ όπου $-2 \ln 2 < \alpha < -\ln 2$

Από B3 ισχύει Θ.Ε.Τ άρα για κάποιο $\eta \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \exists$ τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1, 3): \phi(\xi) = \eta$

Αυτό το η πρέπει να είναι το e^α με $\alpha \in (-2 \ln 2, -\ln 2)$

$$\begin{aligned} \text{Έστω } -2 \ln 2 < \alpha < -\ln 2 &\Rightarrow -\ln 4 < \alpha < -\ln 2 \Rightarrow \ln 4^{-1} < \alpha < \ln 2^{-1} \Rightarrow \\ \ln \frac{1}{4} < \alpha < \ln \frac{1}{2} &\stackrel{e^x}{\Rightarrow} e^{\ln \frac{1}{4}} < e^\alpha < e^{\ln \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{4} < e^\alpha < \frac{1}{2} \\ \text{άρα αφού } e^\alpha &\in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \text{ ισχύει το ζητούμενο.} \end{aligned}$$

7. (μέχρι 1.8)

Δίνονται οι συναρτήσεις $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x + \sqrt{x}$ και $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$$

B1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = g \cdot h$ και $r = \frac{g}{h}$

B2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) f(x) = \sqrt{-x}$$

β) $r(x) = 0$

B3. Να αποδείξετε ότι η $r(x)$ είναι «1-1» και να βρεθεί η αντίστροφη της.

B4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $r(r^{-1}(x)) = r^{-1}(x) + f(x)$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο (1,2)

B2

7. (μέχρι 1.3)

Δίνονται οι συναρτήσεις $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x + \sqrt{x}$ και $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$$

B1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = g \cdot h$ και $r = \frac{g}{h}$

$$A_g = [0, +\infty)$$

$$A_h = (0, +\infty)$$

$$A_f = A_g \cap A_h = (0, +\infty), \quad f(x) = g(x) \cdot h(x) = (x + \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x}} = 1$$

$$\text{Άρα } f(x) = 1 \quad x \in (0, +\infty).$$

$$A_r = A_g \cap A_h \cap \{x \in \mathbb{R} : h(x) \neq 0\} = (0, +\infty) \text{ γιατί } h(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$r(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x + \sqrt{x}}{1/(x + \sqrt{x})} = (x + \sqrt{x})^2 \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

B2

$$\text{Πρόσημο } -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

$$\alpha) f(x) = \sqrt{-x} \Leftrightarrow 1 = \sqrt{-x} \Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow$$

$$x = -1 \text{ αντιστοιχείται γιατί } A_f = (0, +\infty)$$

$$\beta) r(x) = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{x})^2 = 0 \stackrel{x \in A_r}{\Leftrightarrow} \begin{matrix} x > 0 \\ x < 0 \end{matrix} x + \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \wedge \sqrt{x} = -1 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ανόφ. γιατί } x > 0$$

B2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $f(x) = \sqrt{-x}$

β) $r(x) = 0$

B3

B3. Να αποδείξετε ότι η $r(x)$ είναι «1-1» και να βρεθεί η αντίστροφη της.

$$r(x) = (x + \sqrt{x})^2 \quad x > 0$$

1^ο ζήτημα: $r'(x) = 2(x + \sqrt{x}) \cdot (x + \sqrt{x})' = 2(x + \sqrt{x}) \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) > 0$
 αρα $r \uparrow$ αρα "1-1"

2^ο ζήτημα: Έστω $r(x_1) = r(x_2) \Rightarrow (x_1 + \sqrt{x_1})^2 = (x_2 + \sqrt{x_2})^2 \Rightarrow$

$$|x_1 + \sqrt{x_1}| = |x_2 + \sqrt{x_2}| \xrightarrow{x_1, x_2 > 0} x_1 + \sqrt{x_1} = x_2 + \sqrt{x_2} \Rightarrow$$

$$x_1 - x_2 = -(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) \Rightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) + (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) = 0 \Rightarrow$$

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 1) = 0 \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

αρα $r(x)$ "1-1"

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 1 = 0 \text{ αδύνατο για } x_1, x_2 > 0$$

3^ο ζήτημα: Έστω $x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ αρα $x_1 + \sqrt{x_1} < x_2 + \sqrt{x_2} \xrightarrow{\text{ότι } > 0}$

$$(x_1 + \sqrt{x_1})^2 < (x_2 + \sqrt{x_2})^2 \Rightarrow r(x_1) < r(x_2) \Rightarrow r \uparrow \text{ σε } (0, +\infty)$$

αρα "1-1" αρα $\exists r^{-1}(x)$.

$$r(x) = (x + \sqrt{x})^2 \xrightarrow{x > 0} \psi = (x + \sqrt{x})^2 \xrightarrow{\psi > 0} \sqrt{\psi} = x + \sqrt{x} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\psi} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\psi} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\psi} + \frac{1}{4} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2} = \sqrt{\sqrt{\psi} + \frac{1}{4}} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{\sqrt{\psi} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{x} &= \sqrt{\sqrt{\psi} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \\ \sqrt{\sqrt{\psi} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} x &= \left(\sqrt{\sqrt{\psi} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \sqrt{\sqrt{\psi} + \frac{1}{4}} &\geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\psi} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \psi \geq 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\text{όπου } x > 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\sqrt{\psi} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{\psi} + \frac{1}{4}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\psi} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{\psi > 0} \text{ αρα } \boxed{r^{-1}(x) = \left(\sqrt{\sqrt{x} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2, x > 0}$$

B4

B4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $r(r^{-1}(x)) = r^{-1}(x) + f(x)$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(1,2)$

Πρόταση : Πρέπει $x \in A_{r^{-1}}, r^{-1}(x) \in A_r, x \in A_f \Leftrightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ \left(\sqrt{x-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right)^2 > 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{x > 0}$$

$r(r^{-1}(x)) = r^{-1}(x) + f(x) \Leftrightarrow r(r^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow x = r^{-1}(x) + f(x) \Leftrightarrow f(x) = 1$

$x = r^{-1}(x) + 1 \Leftrightarrow r^{-1}(x) = x - 1 \xrightarrow{r} x = r(x-1) \Leftrightarrow$

$r(x-1) = x \Leftrightarrow (x-1 + \sqrt{x-1})^2 = x$ Πρέπει να δείξω ότι η εξίσωση αυτή έχει μια ακριβώς ρίζα για $x > 1$.

Εστω $\varphi(x) = (x-1 + \sqrt{x-1})^2 - x, \varphi'(x) = 2(x-1 + \sqrt{x-1}) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) - 1 =$

$$= (x-1 + \sqrt{x-1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 1 = \sqrt{x-1} + 1 - 1 = \sqrt{x-1} > 0 \Rightarrow \varphi \uparrow_{(1,+\infty)}$$

$\varphi(1) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = -1$ } $\Rightarrow$ η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(1, +\infty)$
Δεν βρίσκω $\varphi(1)$ γιατί δεν ορίζεται η φ στο 1.

8. (μέχρι 2.7)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 1$ και $g: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = e^x$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$

B2. Αν $(f \circ g)(x) = e^{2x} + 1, x \geq -1$, να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της. Για τις δυο αυτές συναρτήσεις να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση.

B3. Αν $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{\ln(x-1)}{2}, x \geq e^{-2} + 1$, να υπολογιστούν τα ακόλουθα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f \circ g)(x)}{(f \circ g)^{-1}(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((f \circ g)(x) - x^2)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f \circ g)^{-1}(x)}{x - 2}$

B4. Να βρείτε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της $(f \circ g)$ και ποιο της $(f \circ g)^{-1}$ απέχει την μικρότερη απόσταση από την πρώτη διχοτόμο.

B₁

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq -1 \\ e^x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow A_{f \circ g} = [-1, +\infty), \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = (e^x)^2 + 1 = e^{2x} + 1.$$

8. (μέχρι 2.7)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 1$ και $g: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = e^x$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$

B₂

B2. Αν $(f \circ g)(x) = e^{2x} + 1, x \geq -1$, να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της. Για τις δύο αυτές συναρτήσεις να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση.

$$f(g(x)) = e^{2x} + 1 \Rightarrow [(f \circ g)(x)]' = 2 \cdot e^{2x} > 0 \Rightarrow \exists \text{ } u \text{ } (f \circ g)^{-1}(x)$$

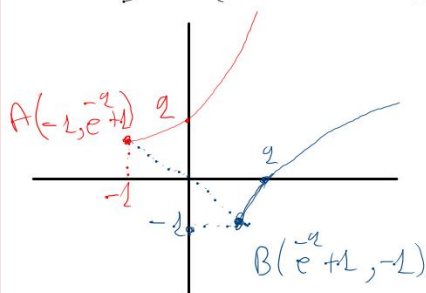
$$(f \circ g)(-1) = e^{-2} + 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) = +\infty \text{ } \alpha \rho \alpha \text{ } \tau \omicron \text{ } \pi \epsilon \delta \iota \omicron \text{ } \tau \eta \psi \acute{\iota} \nu \tau \eta \varsigma$$

$$f \circ g \text{ } \epsilon \nu \alpha \iota \text{ } \tau \omicron \text{ } [e^{-2} + 1, +\infty)$$

$$\epsilon \sigma \tau \omega \quad \psi = e^{2x} + 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \psi - 1 = e^{2x} \\ \psi - 1 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = \ln(\psi - 1) \\ \psi \geq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{\ln(\psi - 1)}{2} \\ \psi \geq 1 \end{array} \right\}$$

$$\sigma \eta \omega \quad x \geq -1 \Leftrightarrow \frac{\ln(\psi - 1)}{2} \geq -1 \Leftrightarrow \ln(\psi - 1) \geq -2 \Leftrightarrow \ln(\psi - 1) \geq \ln e^{-2} \Leftrightarrow$$

$$\psi - 1 \geq e^{-2} \Leftrightarrow \psi \geq e^{-2} + 1 \text{ } \alpha \rho \alpha \text{ } \boxed{(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{\ln(x - 1)}{2}, \quad x \geq e^{-2} + 1.}$$



B3

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f \circ g)(x)}{(f \circ g)^{-1}(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{\ln(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{\ln(x-1)} \xrightarrow{D.L'H} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^{2x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1) \cdot 4e^{2x}]$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} ((f \circ g)(x) - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} + 1 - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{e^{2x}}{x^2} + \frac{1}{x^2} - 1 \right) = A$$

$$\text{ομω} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2} \xrightarrow{D.L'H} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} \xrightarrow{D.L'H} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{2x} = +\infty$$

$$\text{Αρα} A = (+\infty) \cdot (+\infty + 0 - 1) = (+\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f \circ g)^{-1}(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2} \xrightarrow{D.L'H} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1}$$

B3. Αν $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{\ln(x-1)}{2}$, $x \geq e^{-2} + 1$, να υπολογιστούν τα ακόλουθα όρια:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f \circ g)(x)}{(f \circ g)^{-1}(x)}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} ((f \circ g)(x) - x^2)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f \circ g)^{-1}(x)}{x-2}$$

B4

B4. Να βρείτε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της $(f \circ g)$ και ποιο της $(f \circ g)^{-1}$ απέχει την μικρότερη απόσταση από την πρώτη διχοτόμο.

Εστω $A(a, e^{2a})$ το ζευγήςμένο σημείο της

$$C_{f \circ g} \text{ τότε } d(A, l) = |a - e^{2a} - 1|$$

Θα βρούμε το ελάχιστο της $\sqrt{2}$ συνάρτησης αυτής ως προς a .

$$\text{Εστω } \varphi(a) = a - e^{2a} - 1$$

$$\varphi'(a) = 1 - 2e^{2a}$$

$$\varphi'(a) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2a} = 1 \Leftrightarrow e^{2a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a = -\ln 2 \Leftrightarrow a = -\frac{\ln 2}{2}$$

$$\varphi'(a) > 0 \Leftrightarrow a < -\frac{\ln 2}{2}$$

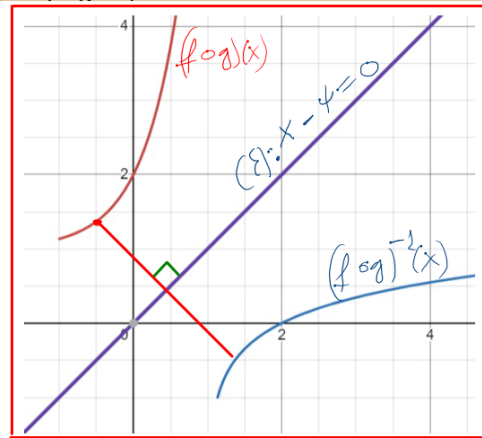
$$\varphi'(a) < 0 \Leftrightarrow a > -\frac{\ln 2}{2}$$

$$\varphi(-1) = -1 - e^{-2}$$

$$\varphi\left(-\frac{\ln 2}{2}\right) = -\frac{\ln 2}{2} - e^{-\ln 2} - 1 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2} < 0$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \varphi(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(a - \frac{2a}{a} - \frac{1}{a} \right) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

Αρα ισχύει $\varphi(a) < 0$ συνεπώς η απόσταση θα γίνει ελάχιστη όταν η $\varphi(a)$ πάρει την μέγιστη αλγεβρική τιμή της και με την ανάλυσή της θα γίνει ελάχιστη. Δηλαδή το ζευγήςμένο σημείο είναι: $\Rightarrow$



a	-1	$-\frac{\ln 2}{2}$
$\varphi'(a)$	$+$	0
$\varphi(a)$	$-1 - e^{-2}$	$-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$

$$A\left(-\frac{\ln a}{a}, e^{-\frac{2\ln a}{a}+1}\right) = \left[A\left(-\frac{\ln a}{a}, \frac{3}{2}\right)\right]$$

την ίδια διαδικασία μπορεί να κάνω και για την

$$f \circ g)^{-1}(x) \text{ εστω } B(b, \frac{\ln(b-1)}{2})$$

$$d(B, \varepsilon) = \frac{|b - \frac{\ln(b-1)}{2}|}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ εστω } f(b) = b - \frac{\ln(b-1)}{2}$$

$$f'(b) = 1 - \frac{1}{2(b-1)}, f'(b) = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2(b-1)} \Rightarrow 2b-2=1 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$f'(b) > 0 \Leftrightarrow b > \frac{3}{2}, f'(b) < 0 \Leftrightarrow b < \frac{3}{2}$$

$$f(e^{-a}+1) = e^{-a}+1 - \frac{\ln e^{-a}}{2} = e^{-a}+1+1 = 2+e^{-a} > 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{\ln \frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{2} > 0$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} f(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(b - \frac{\ln(b-1)}{2}\right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} b \left(1 - \frac{\ln(b-1)}{2b}\right) \stackrel{(*)}{=} (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\ln(b-1)}{2b} \stackrel{D.L'H}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{(b-1) \cdot 2} = 0 \quad (*)$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{2}\right)$

b	$e^{-a}+1$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(b)$		$-$	$+$
$f(b)$		$+$	$+$

$\frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{2}$

Το σημείο B μπορεί σαφώς να το βρούμε και χωρίς να κάνουμε όλη αυτή τη δουλειά γιατί είναι συμμετρικό του $A\left(-\frac{\ln a}{a}, \frac{3}{2}\right)$ ως προς την $\psi = x$

η εξαγωγή συμπεράσας και για τα δύο σημεία είναι ίδια και ισχύει $d(A, \varepsilon) = d(B, \varepsilon) =$

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{2}}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\left(\frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{2}\right) \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon}} = \frac{\left(\frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{2}\right) \sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon}$$

9. (μέχρι 2.7) (παράλλαγή θέμα Β επαναληπτικές 2017)

Δίνεται κύκλος ακτίνας $R = 1$ και εγγράφουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ διαστάσεων x, ψ .

B1. Να εκφράσετε το ψ ως συνάρτηση του x και να δείξετε ότι $(ΑΒΓΔ) = \sqrt{-x^4 + 4x^2}$, $x \in (0, 2)$

B2. Να βρείτε τις διαστάσεις x, ψ ώστε το εμβαδό να γίνει μέγιστο.

B3. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ για το οποίο εμβαδό $E(x_0)$ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να ισούται με $2e^{x_0}$

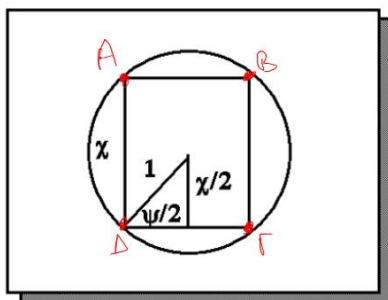
B4. Με δεδομένο ότι $\ln x \leq x - 1$, $x > 0$, να δείξετε ότι : $E(x) < \frac{2^{E(x)} - 1}{\ln 2}$

(B1)

9. (μέχρι 2.7)

Δίνεται κύκλος ακτίνας $R = 1$ και εγγράφουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ διαστάσεων x, ψ .

B1. Να εκφράσετε το ψ ως συνάρτηση του x και να δείξετε ότι $(AB\Gamma\Delta) = \sqrt{-x^4 + 4x^2}$, $x \in (0, 2)$



x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$+\sqrt{2}$	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$-2x^2+4$	-	0	+	+	0
E'				+	-
E					

T.M

Από Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε ότι:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \psi^2 = 4 \Rightarrow \psi = \sqrt{4 - x^2}, \quad x \in (0, 2)$$

Το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = x\psi = x\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{-x^4 + 4x^2} \quad x \in (0, 2)$$

Β2

B2. Να βρείτε τις διαστάσεις x, ψ ώστε το εμβαδό να γίνει μέγιστο.

$$E'(x) = \left(\sqrt{-x^4 + 4x^2} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{-x^4 + 4x^2}} \cdot (-x^4 + 4x^2)' =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-x^4 + 4x^2}} \cdot (-4x^3 + 8x)$$

$$\text{Άρα: } E'(x) = \frac{2(-2x^3 + 4x)}{2\sqrt{-x^4 + 4x^2}} \Rightarrow E'(x) = \frac{-2x^3 + 4x}{\sqrt{-x^4 + 4x^2}}$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^3 + 4x}{\sqrt{-x^4 + 4x^2}} = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-2x^2 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } -2x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^2 = 2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}$$

Επειδή το x είναι πλευρά του ορθογωνίου θα ισχύει: $x > 0$. Άρα η μόνη αποδεκτή λύση είναι η $x = \sqrt{2}$. Σύμφωνα με τον πίνακα μεταβολών της $E(x)$ ισχύει: $E(\sqrt{2}) \geq E(x)$ για κάθε $x > 0$. Άρα στη θέση $x = \sqrt{2}$, η $E(x)$

$$\text{λαμβάνει την μέγιστη τιμή της. Επομένως } \psi = \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} \Rightarrow \psi = \sqrt{2}$$

Β3

B3. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ για το οποίο εμβαδό $E(x_0)$ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να ισούται με $2e^{x_0}$

$$E(x) = \sqrt{-x^4 + 4x^2} \quad x \in (0,2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} E(x) = 0$$

$$E(\sqrt{2}) = \sqrt{-(\sqrt{2})^4 + 4(\sqrt{2})^2} = \sqrt{-4 + 4} = \sqrt{0} = 0$$

από τη μονοτονία του $E(x)$
έχω ότι $0 < E(x) < E(\sqrt{2}) \Rightarrow$

$$0 < E(x) < 0 \quad (1)$$

$$\text{οπωσ } 0 < x < 2 \xrightarrow{e^x} e^0 < e^x < e^2 \Rightarrow 1 < e^x < e^2 \quad (2)$$

Από (1)(2) βλέπω ότι $E(x) < e^x$ Άρα δεν υπάρχει

$$x_0 \in (0,2) \text{ ώστε } E(x_0) = 2e^{x_0}$$

B4

B4. Με δεδομένο ότι $\ln x \leq x - 1$, $x > 0$, να δείξετε ότι: $E(x) < \frac{2^{E(x)} - 1}{\ln 2}$

ισχύει ότι $\left(\ln x \leq x - 1 \right)_{x > 0}$ το "ισον" ισχύει γν $x = 1$ μόνο.
 Για $x: 2 > 0$ έχω $\ln 2^{E(x)} \leq 2^{E(x)} - 1$
 επειδή $E(x) \in (0, 2)$ το $2^{E(x)}$ δεν μπορεί να δίνει 10
 ή 1 άρα ισχύει $\ln 2^{E(x)} < 2^{E(x)} - 1 \Rightarrow E(x) \cdot \ln 2 < 2^{E(x)} - 1 \Rightarrow$
 $E(x) < \frac{2^{E(x)} - 1}{\ln 2}$

10. (μέχρι 2.10)(παραλλαγή θέμα B 2018)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να σχεδιάσετε πρόχειρα την γραφική παράσταση της f .

B4. α) Να δείξετε ότι: $e - \pi < \frac{1}{\pi-1} - \frac{1}{e-1}$.

β) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = \eta \mu x$ έχει λύση.

B1

10. (μέχρι 2.10)(παραλλαγή θέμα Β 2018)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

$$f(x) = x + \frac{1}{x-1} \quad x \neq 1$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1-1)(x-1+1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-2) \cdot x}{(x-1)^2}$$

$$f(0) = -1$$

$$f(2) = 2 + 1 = 3$$

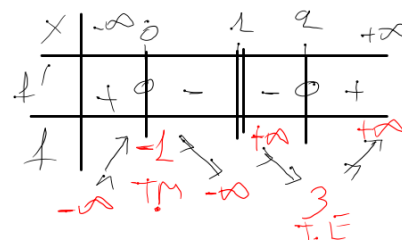
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x + \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1 + \frac{1}{0^-}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x + \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1 + \frac{1}{0^+}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$



για $x=0$ Τ.Μ $z=f(0)=-1$

για $x=2$ Τ.Ε $z=f(2)=3$.

B2

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

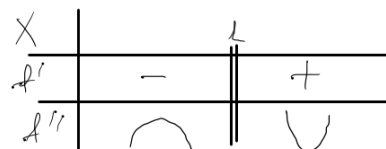
$$f(x) = x + \frac{1}{x-1}, \quad x \neq 1$$

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1$$

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$\frac{2(x-1)^3 - 2 \cdot x(x-2)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1) \cdot [2(x-1)^2 - 2x(x-2)]}{(x-1)^4} =$$

$$\frac{2(x-1)(x-1)^2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)(x^2-2x+1) - 2x^2 + 4x}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$



B3

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να σχεδιάσετε πρόχειρα την γραφική παράσταση της f .

στο ερώτημα (B1) έχω βρει το σχηματικό άρα
άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{x-1}}{x} = 1 + \frac{1}{x^2 - x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \text{ άρα}$$

η ευθεία $\psi = x$ είναι κλίση ασύμπτωτη ως $+\infty$

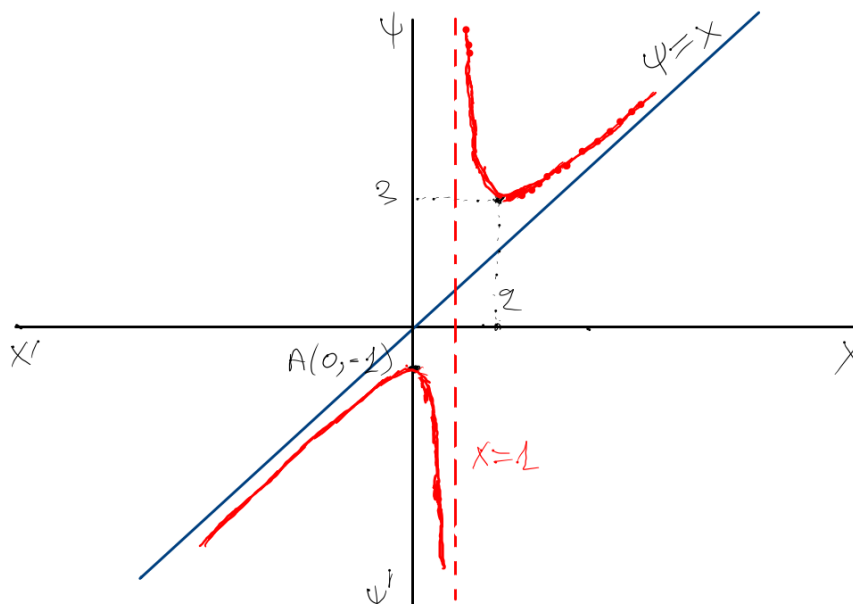
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \text{ άρα}$$

η ευθεία $\psi = x$ είναι και κλίση ασύμπτωτη ως $-\infty$

τον άξονα $\psi\psi'$ τον τέμνει στο $(0, -1)$

για $\psi=0$ $0 = x + \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{1}{1-x} \Rightarrow x - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$
άρα τον άξονα $x'x$ δεν τον τέμνει (Δεν έχει ρίζες)

συνοψίζοντας όλα τα προηγούμενα έχουμε την
απλοποιημένη γραφική παράσταση



B4

B4. α) Να δείξετε ότι : $e - \pi < \frac{1}{\pi-1} - \frac{1}{e-1}$.

β) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = \eta \mu x$ έχει λύση.

α) Από του πίνακα
μονotonίας της f

βρίσκουμε ότι στο διάστημα $[e, \pi)$ η f είναι $\uparrow$ άρα

$$e < \pi \xrightarrow{f \uparrow} f(e) < f(\pi) \Rightarrow e + \frac{1}{e-1} < \pi + \frac{1}{\pi-1} \Rightarrow$$

$$e - \pi < \frac{1}{\pi-1} - \frac{1}{e-1}.$$

β) βρίσκουμε επίσης ότι για $x > 1$ $f(x) \geq 3$

άρα η εξίσωση $f(x) = \eta \mu x$ δεν έχει λύση ($\eta \mu x \leq 1$)

για $x < 1$ ισχύει $f(x) \leq -1$ και το " $=$ " ισχύει

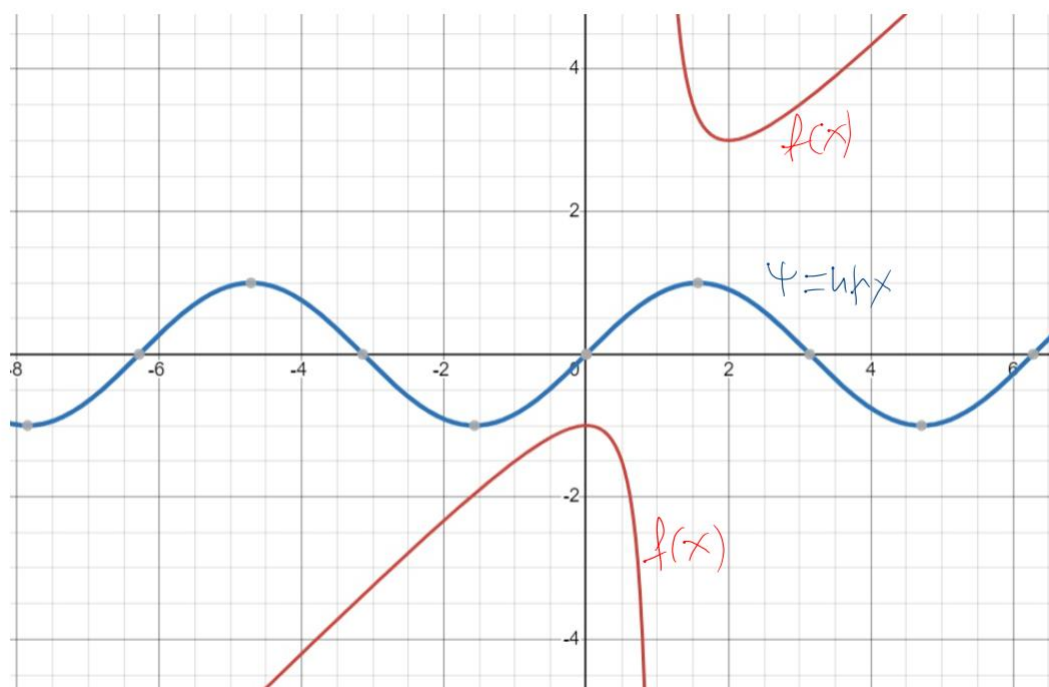
όταν $x = 0$

ενώ $-1 \leq \eta \mu x$ και το " $=$ " ισχύει για $x = \eta \pi \pm \frac{\pi}{2} \neq 0$

άρα το " $=$ " ισχύει για διαφορετικές τιμές του x

συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \eta \mu x$ είναι αδύνατη

Χαρακτηριστικό είναι να το ανόλογο σχήμα



11. (παραλλαγή θέμα Β 2017)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln 2x, x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{x+1}, x \neq -1$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

B2. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right), x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

B3. Αν $\phi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{2 - e^x}, x \neq \ln 2$, να μελετήσετε τη ϕ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

B4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ϕ και να τη σχεδιάσετε, κατόπιν από την γραφική παράσταση της ϕ να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της h .

(B1)

11. (παραλλαγή θέμα Β 2017)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln 2x, x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{x+1}, x \neq -1$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Πρέπει: $x \in A_g \Rightarrow \left. \begin{matrix} x \neq -1 \\ \frac{x}{x+1} > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

Άρα $A_{f \circ g} = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right), x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

(B2)

B2. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right), x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

$$\text{Έστω } x_1, x_2 \in A_h \text{ με } h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \ln \frac{2x_1}{x_1+1} = \ln \frac{2x_2}{x_2+1} \Rightarrow$$

$$\frac{2x_1}{x_1+1} = \frac{2x_2}{x_2+1} \Rightarrow 2x_1 \cdot x_2 + 2x_2 = 2x_1 \cdot x_2 + 2x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ άρα}$$

h "1-1" άρα αντιστρέφεται

$$\text{Έστω } y = \ln \frac{2x}{x+1} \Rightarrow e^y = \frac{2x}{x+1} \Rightarrow$$

$$e^y(x+1) = 2x \Rightarrow e^y \cdot x + e^y = 2x \Rightarrow e^y = 2x - e^y \cdot x \Rightarrow$$

$$e^y = x(2 - e^y) \Rightarrow (2 - e^y) \cdot x = e^y$$

Αν $2 - e^y = 0 \Leftrightarrow e^y = 2 \Leftrightarrow y = \ln 2$ τότε $\textcircled{1} \Rightarrow 0 \cdot x = e^y$ άτοχο
 άρα $y = \ln 2 \notin$ στο πεδίο τιμών της h
 Αν $2 - e^y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq \ln 2$ τότε $\textcircled{1} \Rightarrow x = \frac{e^y}{2 - e^y}$
 πείνει $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ άρα πείνει να ισχύει
 $\bullet \frac{e^y}{2 - e^y} < -1 \Leftrightarrow \frac{e^y}{2 - e^y} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{e^y + 2 - e^y}{2 - e^y} < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{2 - e^y} < 0$
 $\Leftrightarrow 2 - e^y < 0 \Leftrightarrow 2 < e^y \Leftrightarrow e^{\ln 2} < e^y \Leftrightarrow y > \ln 2$
 $\bullet \text{ ή } \frac{e^y}{2 - e^y} > 0 \xleftrightarrow{e^y > 0} 2 - e^y > 0 \Leftrightarrow 2 > e^y \Leftrightarrow y < \ln 2$
 Άρα τελικά $y \neq \ln 2$
 και ο αντίστροφος της ανήκει είναι:

$$h^{-1}(x) = \frac{e^x}{2 - e^x} \quad x \neq \ln 2$$

$\textcircled{B3}$

B3. Αν $\phi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{2 - e^x}, x \neq \ln 2$, να μελετήσετε τη ϕ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

$$\begin{aligned}
 \bullet \phi(x) &= \frac{e^x}{2 - e^x}, x \neq \ln 2 \quad \phi'(x) = \frac{e^x(2 - e^x) - e^x(-e^x)}{(2 - e^x)^2} \Rightarrow \\
 \phi'(x) &= \frac{e^x(2 - e^x + e^x)}{(2 - e^x)^2} = \frac{2e^x}{(2 - e^x)^2} > 0 \\
 \bullet \phi''(x) &= \frac{2e^x(2 - e^x)^2 - 2e^x \cdot 2(2 - e^x)(-e^x)}{(2 - e^x)^4} = \frac{2e^x(2 - e^x)^2 + 4e^{2x}(2 - e^x)}{(2 - e^x)^4} = \\
 &= \frac{2e^x(2 - e^x)(2 - e^x + 2e^x)}{(2 - e^x)^4} = \frac{2e^x(2 + e^x)}{(2 - e^x)^3} \\
 \phi''(x) &> 0 \Leftrightarrow 2 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln 2 \\
 \phi''(x) &< 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x > \ln 2
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
φ'	+		+
φ''	+		-
φ			

$\varphi \nearrow$ στα $(-\infty, \ln 2)$, $(\ln 2, +\infty)$

$\varphi \cup$ στο $(-\infty, \ln 2)$, $\varphi \cap$ στο $(\ln 2, +\infty)$

ακρότατα δεν έχει

Σ. Καρμής δεν έχει γιατί στο $\ln 2$ αλλάζει η μονοτονία οπώς δεν ανήκει στο Π. Ορισμού της φ .

B4

B4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε, κατόπιν από την γραφική παράσταση της φ να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της h .

$$\varphi(x) = \frac{e^x}{2 - e^x}, x \neq \ln 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2 - e^x} = \frac{0}{2 - 0} = 0, \varphi = 0 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \ln 2^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 2^-} \frac{e^x}{2 - e^x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$x < \ln 2 \Rightarrow e^x < e^{\ln 2} \Rightarrow e^x < 2 \Rightarrow 2 - e^x > 0$

$x = \ln 2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \ln 2^+} \varphi(x) = \dots = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2 - e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x(2/e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2/e^x - 1} = -1$$

$\varphi = -1$ οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(2 - e^x) \cdot x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{-e^x \cdot x + 2 - e^x} =$$

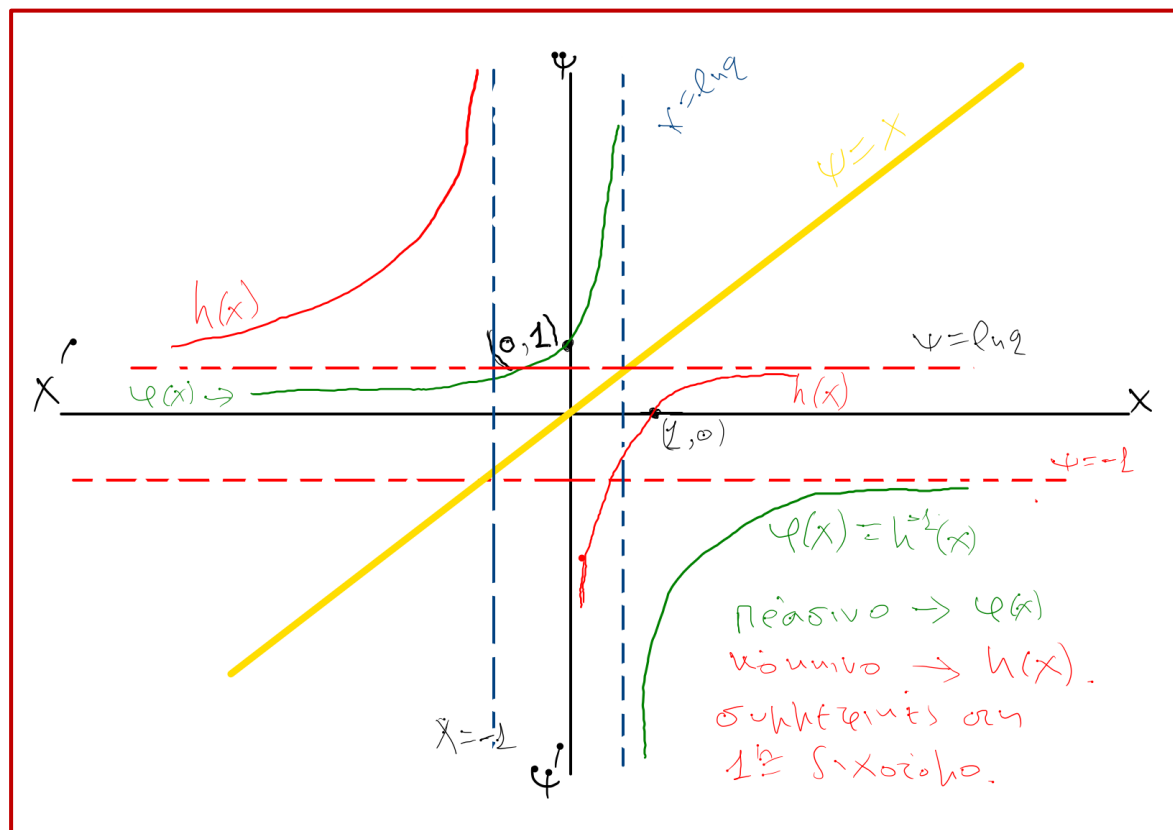
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-x + \frac{2}{e^x} - 1} = 0 = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi(x) - 2x) \stackrel{2=0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -1$$

αεα βρισκόμαστε πάνω στην οριζόντια

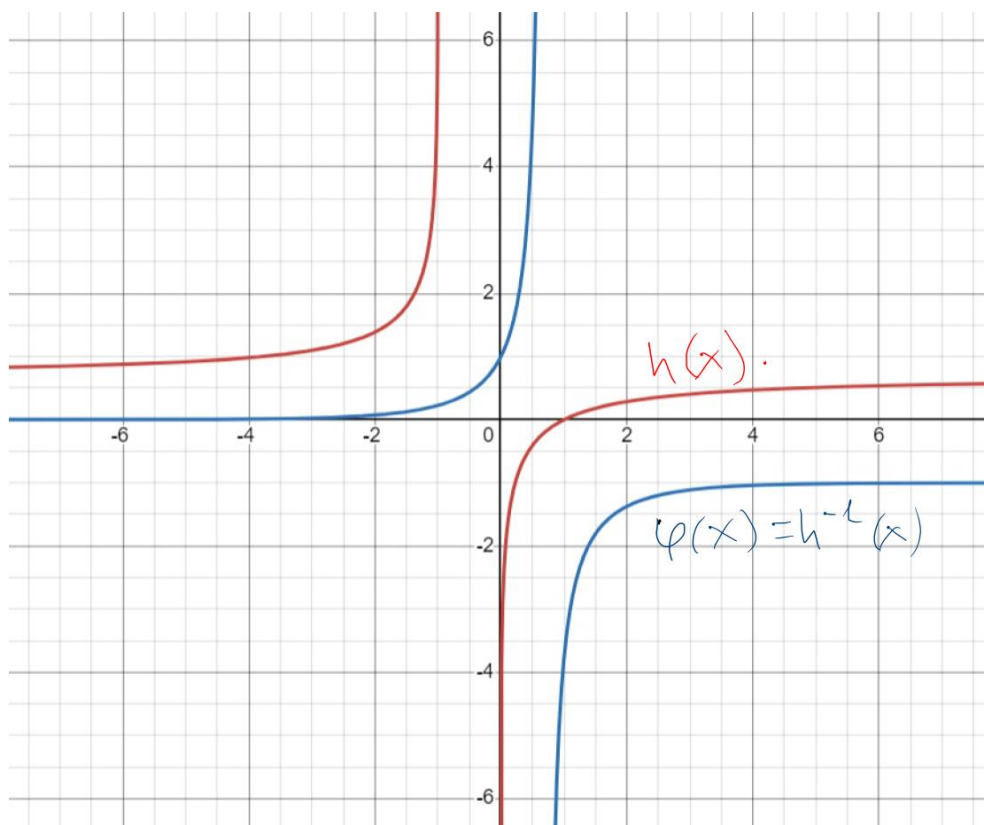
ορίως για $x \rightarrow -\infty$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
φ'	+		+
φ''	+		-
φ	$0 \rightarrow +\infty$		$-\infty \rightarrow -1$

αυτοόμοιοι οι γραφικοί παραστάσεις

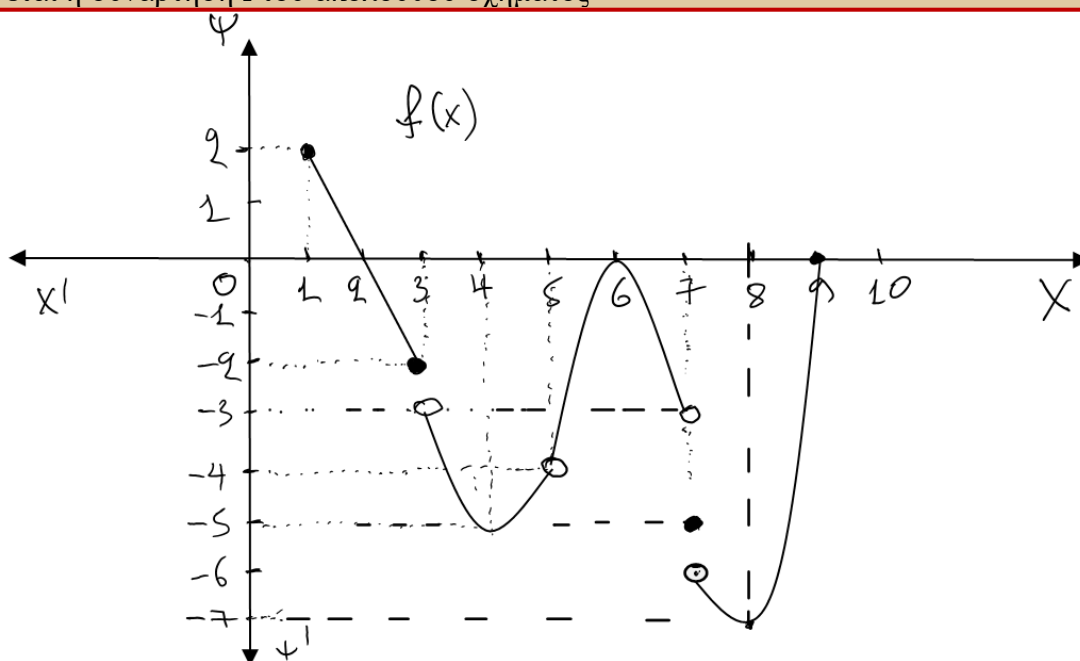


η γραφική παράσταση του υποκτιμητή.



12. (παραλλαγή θέμα Β 2016)

Δίνεται η συνάρτηση f του ακόλουθου σχήματος



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

B2. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$
6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$
7. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$
8. $\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x))$

B3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής και τα σημεία στα οποία ισχύει $f'(x) = 0$ και να αιτιολογήσετε.

B4.

1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει ακριβώς μια ρίζα.
2. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 3} |f^2(x) + 5f(x)|$

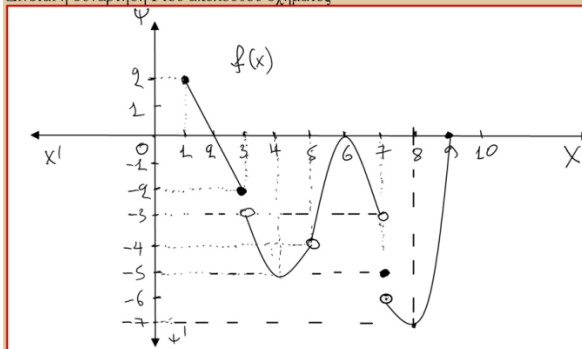
B₁

$$A_f = [1, 5) \cup (5, 9]$$

$$A(A) = [-7, 2]$$

12. (παράλλαγή θέμα Β 2016)

Δίνεται η συνάρτηση f του ακόλουθου σχήματος



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

B₂

B2. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$
6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$
7. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$
8. $\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x))$

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$2. \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= -2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -4$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 0$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} f(f(x)) \quad \begin{array}{l} f(x) = u \\ x \rightarrow 1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \\ \text{αρα } u \rightarrow 2 \end{array} \quad \lim_{u \rightarrow 2} f(u) = 0$$

$$6. \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{\frac{1}{0^+}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{\frac{1}{0^-}} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1}{0^-}} = -\infty$$

B3

B3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής και τα σημεία στα οποία ισχύει $f'(x) = 0$ και να αιτιολογήσετε.

το 3, το 5 και το 7

$f'(x) = 0$ όταν η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια
αυτό συμβαίνει όταν $x = 4, x = 6, x = 8$

B4

B4.

1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει ακριβώς μια ρίζα.
2. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 3} |f^2(x) + 5f(x)|$

1

Έστω $g(x) = f(x) - x$

$$g(1) = f(1) - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$g(2) = f(2) - 2 = 0 - 2 = -2 < 0$$

$\Rightarrow$ η εξίσωση $g(x) = 0$
έχει μία τούλα χιωνοφίδα

στο $(1, 2)$. Η μοναδικότητα εφασφαλίζεται από τη
μονοτονία της g στο $[1, 2]$ (ή να $-x \downarrow$ στο $[1, 2]$)

2

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} |f^2(x) + 5f(x)| = |(-2)^2 + 5(-2)| = |4 - 10| = |-6| = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} |f^2(x) + 5f(x)| = |(3)^2 + 5(-3)| = |9 - 15| = |-6| = 6$$

$$\text{αρα } \lim_{x \rightarrow 3} |f^2(x) + 5f(x)| = 6$$

13. (παραλλαγή επαναληπτικές θέμα Β 2018)

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}$$

B1. Να υπολογιστεί το α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο 1.

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha = -2$.

B2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο
διάστημα $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$ και να δείξετε ότι: $\exists x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 4\right) : f'(x_0) = 0$

B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f και να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

B4. Να λυθεί η εξίσωση : $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του λ , γραφικά ή με οποιαδήποτε άλλο τρόπο.

B1

f συνεχής στο 1 όταν

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$f(1) = 0+1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1+0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-2x}{x} = 1-2 = -1$$

$$\text{πρέπει } 0+1 = -1 \Rightarrow \alpha = -2$$

13. (παράλλαγή επαναληπτικής θέμα Β 2018)

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}$$

B1. Να υπολογιστεί το α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο 1.
Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι α = -2.

B2

B2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-\frac{1}{2}, 4]$ και να δείξετε ότι: $\exists x_0 \in (-\frac{1}{2}, 4) : f'(x_0) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{x}, & x > 1 \\ x^2 - 2, & x \leq 1 \end{cases} \quad f \text{ συνεχής στο } [-\frac{1}{2}, 4]$$

Θα εξετάσω αν είναι παραγωγίσιμη στο 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1-2x}{x} - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-2x+x}{x(x-1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$$

αρα f δεν παραγωγίζεται στο 1 αρα δεν ισχύει το B. Rolle.

$$\text{οπως για } x < 1 \quad f'(x) = 2x$$

$$\text{για } x > 1 \quad f'(x) = \frac{-2x - (1-2x)}{x^2} = \frac{-2x - 1 + 2x}{x^2} = \frac{-1}{x^2} < 0$$

$$\text{Αρα για } x > 1 \quad f'(x) \neq 0$$

$$\text{οπως για } x < 1 \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{αρα } \exists x_0 \in (-\frac{1}{2}, 4) : f'(x_0) = 0 \text{ και το } x_0 = 0$$

B3

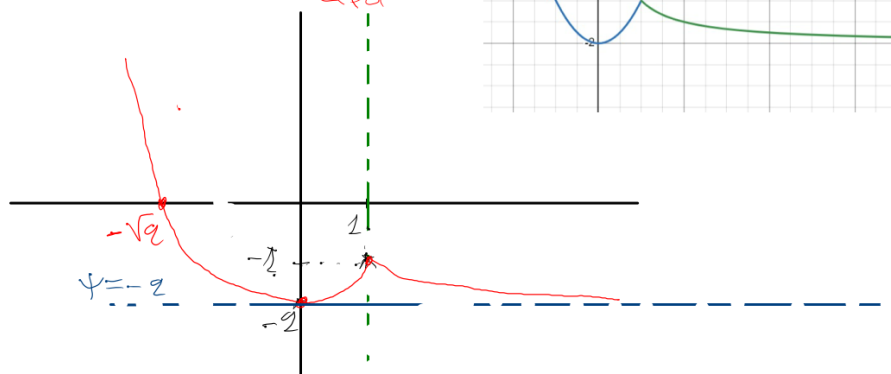
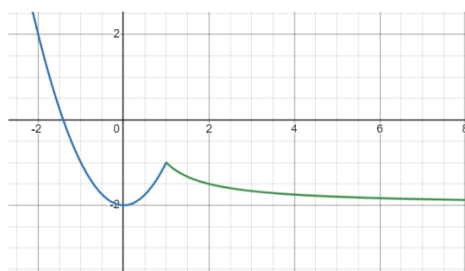
B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f και να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} - 2 & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \text{ αρα } \psi = -2 \text{ οριζόντια ασύμ}.$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$f(x) \neq 0$ για $x > 1$, f συνεχής



B4

B4. Να λυθεί η εξίσωση : $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του λ , γραφικά ή με οποιαδήποτε άλλο τρόπο.

Από την γραφική παράσταση έχω ότι :

- για $\lambda < -2$ η εξίσωση είναι αδύνατη
- για $\lambda = -2$,, έχει μια λύση
- για $-2 < \lambda < -1$,, ,, 3 λύσεις
- για $\lambda = -1$,, ,, έχει 2 λύσεις
- για $\lambda > -1$,, ,, έχει 1 λύση

14.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x - 1}$, $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

B1. Να βρεθούν τα σημεία ασυνέχειας της f και οι ασύμπτωτες.

B2. Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο και μοναδικά σημεία $x_1 \in (0, 1)$ και $x_2 \in (1, +\infty)$ στα οποία μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος της f .

B3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ και το $\lim_{x \rightarrow e} \frac{g(x)}{x - e}$

B4. Να λυθεί η εξίσωση : $1^{f'(x)} + 2^{f'(x)} + 3^{f'(x)} + \dots + 100^{f'(x)} = 100$

(B1) η f είναι ασυνεχής στο 1 γιατί $\nexists$ το $f(1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x - 1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - 1}{x-1} = \frac{0^+}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{x-1} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0. \text{ Άρα } +0 \text{ οριζ. ασυμπτωτ.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 1}{x-1} \stackrel{(-\infty)}{=} +\infty. \text{ Άρα } x=0 \text{ κατακόρυφη ασυμπτωτ.}$$

14.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x-1}$, $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

B1. Να βρεθούν τα σημεία ασυνέχειας της f και οι ασύμπτωτες.

$\Rightarrow$ Άρα $x=1$ κατακόρυφη ασυμπτωτ.

B2. Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο και μοναδικά σημεία $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 \in (1,+\infty)$ στα οποία μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος της f.

$$f(x) = \frac{\ln x - 1}{x-1}, x \neq 1, x > 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - (\ln x - 1)}{(x-1)^2} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x + 1}{(x-1)^2} = \frac{2 - \ln x - \frac{1}{x}}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x - x \ln x - 1}{x(x-1)^2}. \text{ Οι ρίζες της } f'(x)=0 \text{ είναι}$$

$$\text{Ίσες με τις ρίζες της } h(x)=0 \text{ όπου } h(x) = 2x - x \ln x - 1$$

$$h'(x) = 2 - \ln x - x \cdot \frac{1}{x} = 1 - \ln x$$

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=e, h'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow 1>\ln x \Leftrightarrow \ln e > \ln x \Leftrightarrow$$

$$h'(x)<0 \Leftrightarrow \dots x>e$$

$$h(0) = -1 < 0$$

$$h(1) = 1 > 0$$

$$h(e) = 2e - e - 1 = e - 1 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - x \ln x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \ln x - \frac{1}{x} \right) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

Άρα 1 ρίζα x_1 στο $(0,1)$ και μία x_2 στο $(e, +\infty) \subset (1, +\infty)$ λόγω μονotonίας

x	0	$x < e$	e	$+$
h'		+	+	-
h		-	+	-

B3

B3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ και το $\lim_{x \rightarrow e} \frac{g(x)}{x-e}$

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Πρέπει $x \in A_f$ να $f'(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ και $x \neq x_1, x \neq x_2$ Άρα $A_g = (0, x_1) \cup (x_1, 1) \cup (1, x_2) \cup (x_2, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{g(x)}{x-e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)}{f'(x)(x-e)} \quad \frac{f(e)=0}{(0) \text{ D.L'H}} \lim_{x \rightarrow e} \frac{f'(x)}{f''(x)(x-e) + f'(x)} = \frac{f'(e)}{f'(e)} = 1$$

B4

B4. Να λυθεί η εξίσωση: $1^{f'(x)} + 2^{f'(x)} + 3^{f'(x)} + \dots + 100^{f'(x)} = 100$

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = 1^x + 2^x + 3^x + \dots + 100^x - 100$
 $\varphi(0) = 0$ άρα προφανώς είδα $x=0$
 $\varphi'(x) = 1^x \ln 1 + 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + \dots + 100^x \ln 100 > 0$ άρα $\varphi \uparrow$
άρα η είδα $x=0$ είναι μοναδική.

Επομένως η εξίσωση $1^{f'(x)} + 2^{f'(x)} + \dots + 100^{f'(x)} - 100 = 0$ $\xleftrightarrow{\text{είναι ισοδύναμη}}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2$

15.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1}$ και η $g(x) = \ln(x-1), x > 1$

B1. Να βρεθεί η συνάρτηση $\phi(x)$ ώστε: $\phi(f(x)) = e^{x-1} + e^{e^{x-1}}$ και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $\phi(x)$ είναι πιο πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

B2. Ναδειχθεί ότι η $\phi(x)$ είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

B3. Να βρεθούν τα σημεία τομής της $\phi(x)$ με την ευθεία $x=4$ και της αντίστροφης της $\phi(x)$ με την ευθεία $y=4$.

B4. Να υπολογιστεί το $\int_{e^2+2}^{e^3+3} \phi^{-1}(x) dx$

Β1

15.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1}$ και η $g(x) = \ln(x-1)$, $x > 1$

B1. Να βρεθεί η συνάρτηση $\varphi(x)$ ώστε : $\phi(f(x)) = e^{x-1} + e^{e^{x-1}}$ και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $\varphi(x)$ είναι πιο πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

Πρέπει $x \in A_f \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(f(x)) = e^{x-1} + e^{e^{x-1}} \xrightarrow[\substack{f(x)=u \\ e^{x-1}=u \\ u>0}]{\substack{f(x)=u \\ e^{x-1}=u \\ u>0}} \varphi(u) = u + e^u, u > 0 \Rightarrow$$

θα δείξω ότι

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(x) > g(x) \\ x \in A_\varphi \\ x \in A_g \end{array} \right\} \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow \left(e^x + x > \ln(x-1) \right) \leftarrow \text{αυτό θα δείξω}$$

$$e^x \geq x+1 \Rightarrow e^x + x \geq 2x+1$$

$$\ln x \leq x-1 \Rightarrow \ln(x-1) \leq x-2$$

$$\text{οπότε } x > 1 \Rightarrow 2x > x+1 \Rightarrow \underline{2x+1} > x+2 > \underline{x-2}$$

$$\left. \begin{array}{l} e^x + x \geq 2x+1 > x-2 \geq \ln(x-1) \\ \Rightarrow \text{αρα } \varphi(x) > g(x) \forall x > 1. \end{array} \right\}$$

Β2

B2. Ναδειχθεί ότι η $\varphi(x)$ είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

$$\varphi(x) = e^x + x, x > 0$$

$$\varphi'(x) = e^x + 1 > 0 \Rightarrow \varphi \uparrow \text{ αρα αντιστρέφεται}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 1 \quad \text{αρα το σύνολο τιμών της } \varphi(x) \text{ είναι } (1, +\infty) \text{ το οποίο είναι να}$$

το π. ορισμού της $\varphi^{-1}(x)$.

B3

B3. Να βρεθούν τα σημεία τομής της $\varphi(x)$ με την ευθεία $x = 4$ και της αντίστροφης της $\varphi(x)$ με την ευθεία $y = 4$.

Θα δώσω το σύστημα $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ x = 4 \end{cases} \begin{matrix} x > 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} y = \varphi(4) \\ y = e^4 + 4 \end{cases} \Rightarrow$
 άρα το σημείο τομής είναι το $(4, e^4 + 4)$

Θα δώσω το σύστημα $\begin{cases} y = \varphi^{-1}(x) \\ y = 4 \end{cases} \begin{matrix} x \in A_{\varphi^{-1}} \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} \varphi^{-1}(x) = 4 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow$
 $x = \varphi(4) \Rightarrow x = e^4 + 4$ άρα το σημείο τομής είναι το $(e^4 + 4, 4)$.

B4

$\int_{e^2+2}^{e^3+3} \varphi^{-1}(x) dx$ $\varphi^{-1}(x) = u \Rightarrow x = \varphi(u)$
 $\frac{dx}{du} = \varphi'(u) \Rightarrow dx = \varphi'(u) du$
 Αν $x = e^2 + 2 \xrightarrow{(*)} u = 2$
 Αν $x = e^3 + 3 \xrightarrow{(*)} u = 3$

B4. Να υπολογιστεί το $\int_{e^2+2}^{e^3+3} \varphi^{-1}(x) dx$

$\int_a^b u \cdot \varphi'(u) du$ παράγωγο

$\left[u \varphi'(u) \right]_a^b - \int_a^b \varphi(u) du = \left[u \cdot \varphi'(u) \right]_a^b - \int_a^b (e^u + u) du =$
 $\left[u \varphi'(u) - e^u - \frac{u^2}{2} \right]_a^b = \left[u(e^u + 1) - e^u - \frac{u^2}{2} \right]_a^b = \left[ue^u + u - e^u - \frac{u^2}{2} \right]_a^b =$
 $\dots = \dots$

$(*)$ Αν $x = e^2 + 2 \xrightarrow{x = \varphi(u)} e^2 + 2 = e^u + u \Rightarrow \underbrace{e^u + u - e^2 - 2}_{h(u)} = 0$
 Προφανώς ρίζα $u = 2$
 $h'(u) = e^u + 1 > 0 \Rightarrow h \uparrow$ άρα $u = 2$ μοναδική ρίζα. Ομοίως όταν $x = e^3 + 3 \Rightarrow u = 3$.