

1. (μέχρι 2.8)

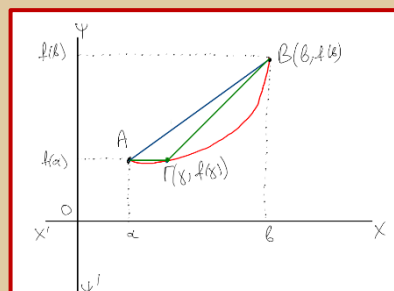
Έστω f , δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση που στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$, τότε να δείξετε ότι:

$$\Gamma 1. 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq f(\alpha) + f(\beta)$$

$\Gamma 2.$ Μεταξύ των σημείων A, B η γραφική παράσταση της f είναι πιο κάτω από την χορδή AB .

$\Gamma 3.$ $\lambda_{AG} < \lambda_{GB}$

$\Gamma 4.$ $\lambda_{AG} < \lambda_{AB}$, όπου Γ σημείο της C_f μεταξύ των A, B .



2. (μέχρι 2.7)

Έστω οι παραβολές $\psi = x^2$ και $\psi = (x - 4)^2$ και τα σημεία $A(\alpha, 0)$, B, Γ, Δ όπως στο σχήμα, ώστε το $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο και τα σημεία Γ, Δ πάνω στις παραβολές, με $0 < \alpha < 2$.

$\Gamma 1.$ Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων B, Γ, Δ συναρτήσει του α και ναδειχθεί ότι:

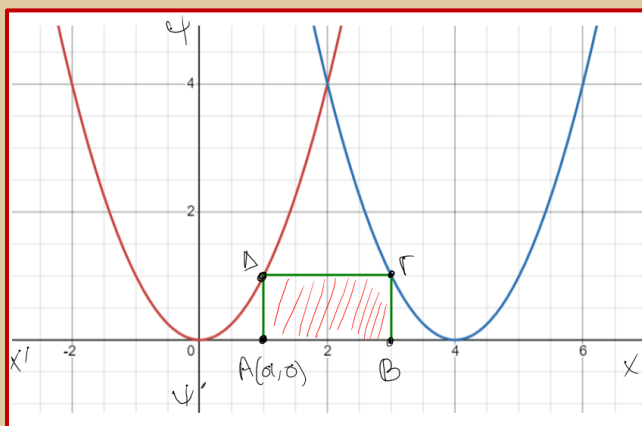
$$(AB\Gamma\Delta) = E(\alpha) = -2\alpha^3 + 4\alpha^2$$

$\Gamma 2.$ Να βρεθεί η θέση του σημείου A ώστε το εμβαδό του $AB\Gamma\Delta$ να γίνει μέγιστο.

$\Gamma 3.$ Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow a_0} \frac{E(\alpha)}{E(\alpha) - E(a_0)}$, όπου a_0 η θέση του τοπικού μεγίστου του $E(\alpha)$.

$\Gamma 4.$

- Υπάρχει τιμή του α που να ισχύει η σχέση: $E(\alpha) = \sqrt{2}$, αν ναι πόσες τιμές υπάρχουν; αν όχι γιατί;
- Υπάρχει τιμή του α που να ισχύει η σχέση: $E(\alpha) = 1,4$ αν ναι πόσες τιμές υπάρχουν; αν όχι γιατί;



3. (μέχρι 2.9)

Έστω $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[-1, 1]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$, διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και ισχύει: $f^2(x) - 4f(x) + x^2 + 3 = 0$

$\Gamma 1.$ Ναδειχθεί ότι η f δεν έχει ρίζες και σημεία καμπής στο $[-1, 1]$ και να βρεθεί ο τύπος της.

$\Gamma 2.$ Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα κυρτά και να γίνει γραφική παράσταση

$\Gamma 3.$ Ναδειχθεί ότι: $f(x) \leq 2 + \sin x$ και να υπολογιστούν τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1940}{f(x) - 2 - \sin x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sin x - f(x)}{x^2}$

$\Gamma 4.$ Ναλυθεί η εξίσωση: $e^x(e^{f(x)} + f(x) + x - 3) = e^3$

4. (μέχρι τέλους)

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $\int_a^b (2x \cdot F(x) + x^2 \cdot f(x)) dx = 0$, όπου $F(x)$ η αρχική της $f(x)$ και α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq \beta$.

Γ1. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta): 2\xi \cdot F(\xi) = -\xi^2 \cdot f(\xi)$.

$$\forall F(x) = x^{2024}$$

Γ2. Να δείξετε ότι τα α και β είναι αντίθετα.

Γ3. Να λυθεί η εξίσωση: $F(e^x + 5) - F(e^x + 4) = F(6) - F(5)$

Γ4. Έστω $h(x) = \frac{2024 \cdot F(x) \cdot e^x}{x \cdot f(x)}$, να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x) + h(-x)}{h(x) - h(-x)}$

5. (μέχρι 1.7)

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως μονότονη στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$. Επίσης η γραφική της παράσταση τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$

και $\Gamma(0, \gamma)$, όπου $\alpha = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-3(x+3)}{\exp(x+3)}$, $\beta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 10x}{\eta\mu 2x}$ και $\gamma = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{1 - x^3}$.

Γ1. Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$ καθώς και το πρόσημο της f για τις διάφορες τιμές του x .

Γ2. Να υπολογιστούν τα όρια :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0)}{f(-4) \cdot x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(6) \cdot x^5)$

Γ3. Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού: «η παράσταση $A = \sqrt{\frac{\eta\mu x}{x}} \cdot f(1)$

δεν έχει νόημα κοντά στο μηδέν ». Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

Γ4. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \eta\mu^2(f(x)) + \sigma\upsilon\nu^2(\pi - f(x))$, x πραγματικός αριθμός τέμνει την 1^{η} διχοτόμο σε τουλάχιστον ένα σημείο.

6. (μέχρι 1.8)

Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν:

$$g(g(x)) = \ln x + 1 + g(x) \text{ και } g(f(x-1) - \ln(x+1) - 1) = 1$$

Γ1. Να δείξετε ότι η $g(x)$ είναι «1-1» και ότι $g(1)=1$

Γ2. Να βρεθεί ο τύπος της f .

Γ3. Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}(x) = e^{x-2} - 2$.

Γ4. Να γίνει η γραφική παράσταση της f και της αντίστροφης και να αποδείξετε ότι το

πλήθος των κοινών τους σημείων είναι τουλάχιστον 2.

7. (μέχρι 2.4)

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις e^x , και $\ln x$. Το σημείο $A(x,0)$ κινείται πάνω στον άξονα xx' με $x > 1$ και η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό 2 cm/sec .

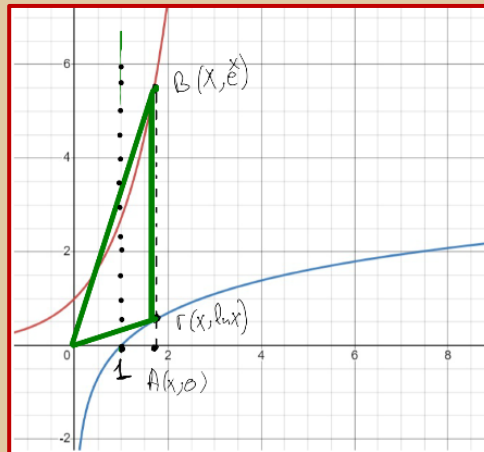
Γ1. Να λυθεί η εξίσωση: $x \cdot e^x + e^x = 4e^3$ με $x \geq 0$.

Γ2. Να βρεθεί η θέση του σημείου A τη στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου (OAB) είναι ίσος με $4e^3 \text{ cm}^2/\text{sec}$.

Γ3. Να βρεθεί η θέση του σημείου A τη στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου (OAG) είναι ίσος με $2 \text{ cm}^2/\text{sec}$.

Γ4. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού (OBΓ) τη χρονική στιγμή που το σημείο A βρίσκεται στη θέση $A(e,0)$.

Γ5. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του λόγου των εμβαδών των τριγώνων (OAB), (OAG) τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του σημείου A είναι 1 cm .



8. (γενική)

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

- $f(0)=1$
- $f(1)=0$
- $f''(x) > 0, \forall x \in [0,1]$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την πρώτη διχοτόμο.

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη ξ μεταξύ $(0,1)$, στο οποίο η κλίση της C_f είναι -1 και ότι ισχύει:

$$f(x) \geq -x + f(\xi) + \xi, \forall x \in [0,1]$$

Γ3. Να αποδείξετε ότι: $\frac{f(x)-1}{x} < \frac{f(x)}{x-1} \forall x \in (0,1)$ και $f(x) \leq -x+1 \forall x \in [0,1]$

Γ4. Να αποδείξετε ότι για το ξ του δεύτερου ερωτήματος ισχύει:

$$f(\xi) + \xi - \frac{1}{2} < \int_0^1 f(x) dx < \frac{1}{2}$$

9. (μέχρι 2.5)

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $(x-1) \cdot f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

Γ1. Να δειχθεί ότι $f(x) = x^3 + 2x - 1$ και ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$ την x_0 .

Για τη ρίζα αυτή την x_0 ,

Γ2. Να δείξετε ότι: $-2 < f(x_0 - 1) + f(x_0 + 1) < 10$

Γ3. Να δείξετε ότι : η εξίσωση $\frac{f(x_0 - 1)}{x} = \frac{f(x_0) - 1}{x - 1}$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

Γ4. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ στα διαστήματα $(0, x_0)$, $(x_0, 1)$, να δείξετε ότι υπάρχουν δυο τουλάχιστον αριθμοί ξ_1, ξ_2 στο διάστημα $(0,1)$ ώστε $9\xi_1^2 \cdot \xi_2^2 + 3 \cdot \xi_2^2 - 2 = 0$

10. (μέχρι 2.5)

Έστω $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(x-1)^4} + x, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^x + g(x+1) - 2, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$, όπου για $x > 1$ ισχύει $g(x) = E$, όπου E το εμβα-

δό που περικλείεται από την εφαπτομένη της $\psi = 1/x$ με $x > 1$ σε τυχαίο σημείο της (x_0, ψ_0) με τους άξονες xx' και $\psi\psi'$.

Γ1. Να βρεθεί η $f'(x)$ και να αποδείξετε ότι οι οι εφαπτομένες της C_f και της $\psi = 1/x$ τέμνονται κάθετα στο σημείο $(1,1)$.

Γ2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi_1 < 1 : f(\xi_1) = e$ και μοναδικό $\xi_2 > 1 : f(\xi_2) = \pi$

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει:

1. Τουλάχιστον ένα $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2) : f'(\xi_3) = \frac{1-e}{1-\xi_1}$
2. Τουλάχιστον ένα $\xi_4 \in (\xi_1, \xi_2) : f'(\xi_4) = \frac{1-\pi}{1-\xi_2}$

Γ4. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$

11. (Μέχρι 2.7)

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου φαίνεται στο διπλανό σχήμα και αποτελεί παραβολή.

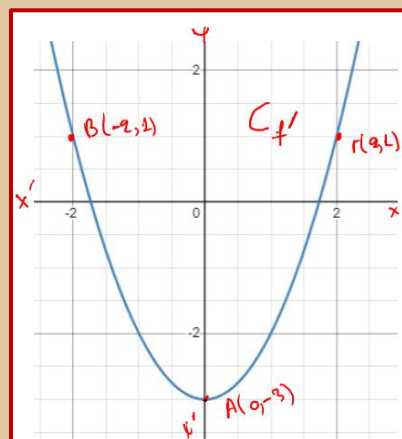
Γ1. Να βρείτε τα σημεία που τέμνει η γραφική παράσταση της $C_{f'}$ τον άξονα $x'x$ και να υπολογιστεί το $f''(0)$.

Γ2. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο της $(2, -10/3)$

Γ4. Να δείξετε ότι : $f(x+2) - f(x+1) \geq -3$

Γ5. Να βρεθεί ο τύπος της f .



12. (Μέχρι 2.7)

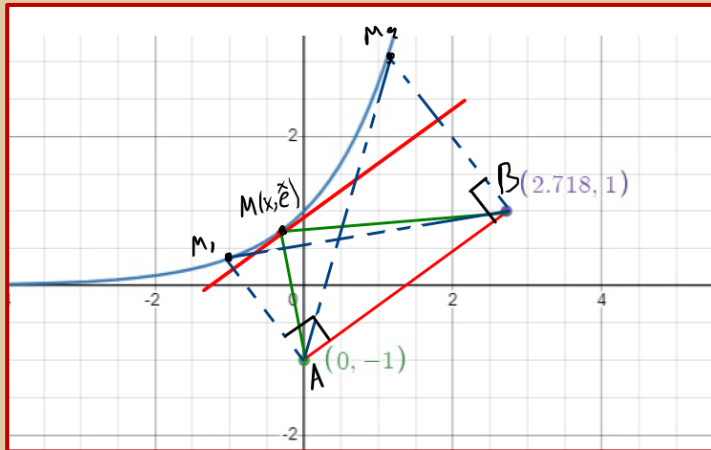
Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$, τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(e, 1)$ και το σημείο $M(x, e^x)$, πάνω στην C_f .

Γ1. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου (MAB) γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο M βρεθεί στη θέση όπου η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην AB.

Γ2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_1 της C_f με τετμημένη $x_1 \in (-2, -1)$, ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ορθογώνιο στο A.

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_2 της C_f με τετμημένη $x_2 \in (1, 2)$, ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ορθογώνιο στο B.

Γ4. Αν η τετμημένη x του σημείου M αυξάνεται με ρυθμό 2cm/sec, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού (MAB).



13. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και ισχύει: $f^2(x) - 6f(x) = x^2 - 4$ και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = 3 - \sqrt{x^2 + 5}$.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(3 - f(x))^2 + 2(3 - f(x)) - 3 = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x + (3 - f(x))^2 - 2x^2 + 0.1 \cdot x^3 - 6 = 0$, έχει το πολύ 3 ρίζες στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Γ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Γ5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x + 3^{1-f'(x)} + 2^{1-f'(x)} = 5$ έχει μοναδική ρίζα και να βρεθεί.

(Μονάδες 5)

14. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με : $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

Γ1. α) Ναδειχθεί ότι δεν υπάρχει το $f''(0)$.

β) Να βρεθεί η αντίστροφη της f και τα κοινά σημεία της f και της f^{-1} .

(Μονάδες 5)

Γ2. Ναδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 < 0$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να περνά από το $(1, 0)$.

(Μονάδες 5)

Γ3. Ναδειχθεί ότι η εφαπτομένη αυτή έχει και άλλο ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f με θετική τετμημένη και μάλιστα η τετμημένη αυτή είναι μεγαλύτερη από το $e^{-x_0} - 1$, όπου x_0 το x_0 του προηγούμενου ερωτήματος.

(Μονάδες 5)

Γ4. Να βρεθεί το όριο: $\lim_{\psi \rightarrow 0^-} \left(\frac{f^{-1}(\psi)}{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x + \psi)} \right)$

(Μονάδες 5)