

1. (μέχρι 1.8) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f^2(x) - 2\sqrt{x} \cdot f(x) = x^2 - x + 1$, για $x \geq 0$ και η συνάρτηση $g(x) = x - \sqrt{x}$, για $x \geq 0$.

Δ1. Να δείξετε ότι : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}$ για $x \geq 0$.

Δ2. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(f(x) - g(x) - 2\sqrt{x})$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

Δ3. Έστω $h(x) = f(x) - g(x) - x^3 - \frac{3}{2}$ με $x \geq 0$. Να δείξετε ότι :

- Η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ και μια τουλάχιστον στο $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.
- Η εξίσωση $\frac{h(x)-1}{x-\xi_1} + \frac{\sin(\pi-h(x))}{x-\xi_2} = 1821$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ξ_1, ξ_2) , όπου ξ_1 και ξ_2 , οι ρίζες του προηγούμενου ερωτήματος.

2. Έστω συνάρτηση $x(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 1$, $t \in [0, 4]$, η οποία καθορίζει τη θέση ενός κινητού πάνω στον άξονα xx'

Δ1. Πότε το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν, πότε κινείται δεξιά και πότε αριστερά;

(Μονάδες 5)

Δ2. Να βρεθεί το συνολικό διάστημα που διένυσε το κινητό.

(Μονάδες 5)

Δ3. Να δείξετε ότι κατά την διάρκεια κίνησης του κινητού μεταξύ των χρονικών στιγμών $t=1$ sec και $t=3$ sec, υπάρχει μια τουλάχιστον χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού είναι ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το σώμα στο χρονικό διάστημα αυτό.

(Μονάδες 5)

Δ4. Να δείξετε ότι κατά την διάρκεια κίνησης του κινητού μεταξύ των χρονικών στιγμών $t=1$ sec και $t=3$ sec, υπάρχει μια τουλάχιστον χρονική στιγμή κατά την οποία η επιτάχυνση του κινητού είναι ίση με το μηδέν.

(Μονάδες 5)

Δ5. Αφού αποδείξετε ότι η συνάρτηση της ταχύτητας $v(t)$ είναι γνησίως αύξουσα για $t \geq 2$ sec, να δείξετε ότι η εξίσωση $2S(t+1) = S(t) + S(t+2)$ είναι αδύνατη για $t \geq 2$ sec.

(Μονάδες 5)

3. Έστω η δίκλαδη συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \begin{cases} (x-2) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2), & x > 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$

Δ1. Ναδειχθεί ότι f είναι συνεχής στο 2.

Δ2. Ναδειχθεί ότι η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty]$ και ότι:

$$\triangleright f'(e) < f'(\pi)$$

$$\triangleright \ln\left(\frac{e^2 - 3e + 2}{\pi^2 - 3\pi + 2}\right) < \frac{\pi - e}{(\pi - 1) \cdot (e - 1)}$$

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in \left(2, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$\ln(\xi^2 - 3\xi + 2) \cdot (\xi - 1) = 3 - 2\xi \text{ και ότι το } \xi \text{ αυτό είναι θέση ακροτάτου για την } f.$$

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $g(x) = (x - \pi) \cdot (f'(x) - f'(\pi)) + (x - e) \cdot (f'(e) - f'(x)) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (e, π) .

4. Έστω η συνάρτηση $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $f(x + \psi) = \frac{f(x) + f(\psi)}{1 - f(x) \cdot f(\psi)}$ για κάθε $x, \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Δ1. Αν f συνεχής στο 0 ναδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Δ2. Αν ισχύει $f'(0) = 1$, ναδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και ναδειχθεί ότι $f'(x) = 1 + f^2(x)$

Δ3. Αν $f(x) = \varepsilon \phi(u(x))$, ναδειχθεί ότι $f(x) = \varepsilon \phi x$

Δ4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν μεταξύ της C_f , της εφαπτομένης της C_f στη θέση μηδέν και της ευθείας $x = \pi/4$

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 στο διάστημα $(0, \pi/3)$ ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}$$

5. Έστω η παρ/μη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $x \cdot f'(x) + \ln x - 1 = f(x)$ και $f(1) = -1$

Δ1. Να βρεθεί ο τύπος της f .

Δ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται για $x \in (0, 1]$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

Δ3. Να λυθούν οι εξισώσεις $f^{-1}(x) = 2$ και $f^{-1}(x) = x$

Δ4. Έστω $g(x) = e^{f(x)}$. Να δείξετε ότι:

$$\triangleright g(x) < x, \text{ για } x \in (0, +\infty)$$

$$\triangleright 2 \int_1^\alpha g(x) dx < \alpha^2 - 1 \text{ για } \alpha > 1$$

$$\triangleright \int_1^2 g(x) dx < e^{-1}$$

6. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) > 0$ για $x > 0$. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τους άξονες xx' , $\psi\psi'$ και την ευθεία $x=u$ είναι

$$E(u) = u^2 + u - f(u), \forall u \geq 0$$

Δ1. Ναδειχθεί ότι $f(0)=0$ και $f'(0)=1$

Δ2. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x^2 - 5\eta\mu x}{x}$

Δ3. Να βρεθεί ο τύπος της f .

Δ4. Ναδειχθεί ότι: $f(x) \geq \eta\mu x, \forall x \in [0, +\infty]$

Δ5. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = 2x + e^x + \eta\mu x - 1$

7. Έστω η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow [0, e]$ συνεχής και παραγωγίσιμη ώστε

$$f(x) - f(\psi) \geq x \cdot e^x - \psi \cdot e^\psi \text{ για κάθε } x, \psi \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(1) - f(0) = e$

Δ2. Να δείξετε ότι: $\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0, 1) : f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 3e$

Δ3. Να βρεθεί ο τύπος της f

Δ4. Ναδειχθεί ότι αντιστρέφεται.

Δ5. Να υπολογιστεί το $\int_0^e f^{-1}(x) dx$

8. Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και παραγωγίσιμη, στρέφοντας τα κοίλα προς τα κάτω.

Δ1. Ν.δ.ο: $f(x) - f(x-1) > f'(x)$ για κάθε $x \geq 1$ (για να έχει νόημα το $f(x-1)$)

Δ2. Ν.δ.ο: $2f(x) > f(x+1) + f(x-1)$ για κάθε $x \geq 1$

Δ3. Ν.δ.ο: $f(x) > \frac{3}{4} \cdot f\left(\frac{4}{3}x\right)$ για κάθε $x > 0$

Δ4. Ν.δ.ο: $f(x) \geq x \cdot f'(x)$ για $x \geq 0$ και ότι: $\int_0^2 f(x) dx > f(2)$

9. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $2f(x) + \ln(f(x)) = x + 1$ και $f(x) > 0$.

Δ1. Ν.δ.ο: Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2. Ν.δ.ο: η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$.

Δ3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στους πραγματικούς αριθμούς

α) Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f ως συνάρτηση της $f(x)$.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(1, 1)$

γ) Ναδειχθεί ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

δ) Ν.δ.ο: $3f(x) \geq x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$

ε) Αν η γραφική παράσταση διέρχεται από σημείο $A(0, \alpha)$, να δείξετε ότι

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 - \alpha^2 - \alpha$$

10. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = e^{1-x} - \frac{1}{x} - \kappa$, και η f παρουσιάζει στο διάστημα $(0, +\infty)$ μέγιστο το 0.

Δ1. Ναδειχθεί ότι η C_f' (η γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου), έχει τρεις εφαπτομένες παράλληλες στον άξονα $\chi\chi'$, στα σημεία $x_1, 1, x_2$ και ότι η εξίσωση $\sqrt{x_1 \cdot x_2} \cdot x = 1453$ είναι αδύνατη.

Δ2.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την $f'(x)$ στο διάστημα (x_1, x_2) .

β) Να δείξετε ότι ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle για την $f'(x)$ στο διάστημα (x_1, x_2) .

Δ3. Ναδειχθεί ότι $\kappa=0$ και ότι η εξίσωση $f(x) = e^{1-\frac{x_1}{2}} - \frac{2}{x_1}$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $(-\infty, 0)$.

Δ4. Να δείξετε ότι: $-2 \cdot \int_0^{1-x_2} \left(e^x - \frac{1}{1-x} \right) \cdot \left(\frac{1}{(1-x)^2} - e^x \right) dx = \frac{(1-x_2)^2}{(x_2)^4}$, όπου το x_2 του ερωτήματος Δ1.

11. Έστω η συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \eta\mu x + \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0$.

Δ1. Ναδειχθεί ότι: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} + x^2 \eta\mu x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Δ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0,0)$

Δ3.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right): f'(\xi_1) = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right): f'(\xi_2) = 10f\left(\frac{1}{2}\right)$

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi_3 \in (0, 2): f''(\xi_3) > 4f\left(\frac{1}{2}\right)$

Δ4. Να υπολογιστεί το $\int_{-1}^1 f(x) dx$

12. Δίνεται η συνάρτηση f , ώστε $f(x) = \begin{cases} e^{e^x - x} - e, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$.

Δ1. Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $O(0,0)$.

Δ2. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία τα κοίλα και τα κυρτά.

Δ3. Να δείξετε ότι:

α) για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f'(x) < f(x+1) - f(x)$

β) $\forall \alpha, \beta \in [0,1], \exists \xi \in [0,1]$ ώστε $f(\xi) = \frac{1821 \cdot f(\alpha) + 119 \cdot f(\beta)}{1940}$

Δ4. Να δείξετε ότι: $\int_0^1 ((f(x) + e) \cdot x) dx < \frac{e^e - e^2}{2}$

13. (παραλλαγή του Δ θέματος 2021)

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = \frac{1}{x}$ έχει μοναδική ρίζα x_0 και να προσδιορίσετε το ανοιχτό διάστημα πλάτους $\frac{1}{2}$ στο οποίο ανήκει.

Δ2. Έστω $f(x) = e^{x_0}(x+1) - e^x - 1$. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση

$x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, όπου x_0 η ρίζα του προηγούμενου ερωτήματος.

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{x + 1}\right)$ και η ευθεία $\psi = x_0$ εφάπτονται, όπου x_0 η ρίζα του Δ1 ερωτήματος.

Δ4. α) Έστω συνάρτηση $\varphi(x)$ με $\varphi(x) > f(x)$ για όλα τα πραγματικά x και τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(x, \varphi(x))$. Αν η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη για $x = x_0$, ναδειχθεί ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο για την $\varphi(x)$.

β) Να βρεθεί η ελάχιστη κατακόρυφη απόσταση των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ των ερωτημάτων Δ2 και Δ3.

14. (παραλλαγή του Δ θέματος 2022)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 - \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) \cdot e^x$ όπου $\kappa = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^3 x}{x \cdot \eta\mu 2x}$

Δ1. α) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < -1$ και $x_2 > 1$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.

Δ2. Αν E το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$, τότε να δεί-

ξετε ότι $E = \frac{(x_2 - x_1) \cdot (x_1 + x_2 + 2)}{2}$

Δ3. Να δείξετε ότι $f(-2 - x_1) > 0$

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $2f(x) = 1 + f'(x_2) \cdot (x - x_2)$ έχει λύση.

15. (παραλλαγή του Δ θέματος 8 Σεπτεμβρίου 2020)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\triangleright f'(x) \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = f(x) - 2\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot f(x) \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\triangleright f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι σταθερή. Στη

συνέχεια να δείξετε ότι $f(x) = \epsilon\phi x + \sigma\phi x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$ το οποίο και να βρείτε.

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

$$1) \quad f'(\rho_1) \cdot (\pi - 4\rho_1) < 8 - 4e$$

$$2) \quad f'(\rho_2) \cdot (4\rho_2 - \pi) > 4e - 8 \quad \text{όπου } \rho_1, \rho_2 \text{ οι ρίζες του } \Delta_3.$$

16. (μέχρι 2.3)

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τη οποία ισχύουν :

- Η f είναι συνεχής , παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x) - f(1)}{x - 1} = 4$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 \cdot f(1) - f(x)}{x - 1} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = +\infty$
- $\lim_{h \rightarrow 0} f(2 + h) = 8$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(1)=1$ και ότι $f'(1) = 3$

(Μονάδες 5)

Δ2. Να υπολογιστούν τα όρια

i. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) + 2h - 1}{h}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{2-x}}{x-1}$

(Μονάδες 5)

Δ3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $h(x) = f(x) + \ln(x-1) - \frac{3}{2}$ και ναδειχθεί ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(1,2)$

(Μονάδες 5)

Δ4. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, \pi) : f(\xi) = \frac{f(1) + f(e) + f(\pi)}{3}$

(Μονάδες 5)

Δ5. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^x(x + \sin x)} \cdot [f(1+e^x) - f(1)]$

(Μονάδες 5)

