**1. (μέχρι 1.8)** Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με f(0)=1 και $f^2(x)-2\sqrt{x}\cdot f(x)=x^2-x+1$, για $x\geq 0$ και η συνάρτηση $g(x)=x-\sqrt{x}$, για $x\geq 0$.

**Δ1.** Να δείξετε ότι : $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}$ για $x\geq 0$.

**Δ2.** Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} συν\left(f(x)-g(x)-2\sqrt{x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

**Δ3.** Έστω $h(x)=f(x)-g(x)-x^3-\dfrac{3}{2}$ με x≥0. Να δείξετε ότι :

- Η εξίσωση h(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ και μια τουλάχιστον στο $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.
- Η εξίσωση $\dfrac{h(x)-1}{x-\xi_1}+\dfrac{συν(\pi-h(x))}{x-\xi_2}=1821$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\xi_1,\xi_2)$, όπου $\xi_1$ και $\xi_2$ , οι ρίζες του προηγουμένου ερωτήματος.

Προσοχή: η ακόλουθη λύση είναι λάθος: ισχύει $f^2(x)-2\sqrt{x}\cdot f(x)=x^2-x+1 \Rightarrow$

$f^2(x)-2\sqrt{x}f(x)-(x^2-x+1)=0 \overset{f(x)=y}{\Longleftrightarrow} y^2-2\sqrt{x}\cdot y-(x^2-x+1)=0$

$\Delta=(-2\sqrt{x})^2+4(x^2-x+1)=4x+4(x^2-x+1)=4(x^2+1)>0$ άρα

$y_{1,2}=\dfrac{2\sqrt{x}\pm\sqrt{4(x^2+1)}}{2} \Rightarrow y_{1,2}=\sqrt{x}\pm\sqrt{x^2+1} \Rightarrow f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1}$ ή $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}$

όμως $f(0)=1$ άρα η πρώτη λύση απορρίπτεται

ΣΣ τελικά $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}$ με $x\geq 0$

Το λάθος έγκειται στο γεγονός ότι χρησιμοποίησα το εξής αν $f(x)\cdot g(x)=0$ τότε $f(x)=0$ ή $g(x)=0$ που είναι λάθος δεν ισχύει στις συναρτήσεις.

Δηλαδή έγραψα $\left[y-(\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1})\right]\left[y+(\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1})\right]=0 \Rightarrow$

$\left[f(x)-(\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1})\right]\cdot\left[f(x)-(\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1})\right]=0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1}$ ή $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1}$ που είναι λάθος

διότι $f_1(x)=\begin{cases}x & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$, $f_2(x)=\begin{cases}0 & x\geq 0\\ x & x<0\end{cases}$ ισχύει $f(x)\cdot g(x)=0$ και συνεχείς είναι, όμως $f(x)\neq 0$ και $g(x)\neq 0$

Υποδ.: Δ1 ισχύει: $f^2(x) - 2\sqrt{x}\cdot f(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow f^2(x) - 2\sqrt{x}f(x) + x = x^2 + 1 \Rightarrow$

$(f(x) - \sqrt{x})^2 = x^2 + 1 \Rightarrow |f(x) - \sqrt{x}|^2 = x^2 + 1 \Rightarrow |f(x) - \sqrt{x}| = \sqrt{x^2+1}$

έστω $\varphi(x) = f(x) - \sqrt{x}$, $x \geq 0$, $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 0$ αδύνατο άρα

η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ δεν έχει ρίζες και αφού είναι συνεχής

διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ όμως $\varphi(0) = f(0) - \sqrt{0} = f(0) = 1$ (υπόθ.)

άρα $\varphi(x) > 0$ παντού στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς $|\varphi(x)| = \sqrt{x^2+1} \xRightarrow{\varphi(x)>0}$

$\varphi(x) = \sqrt{x^2+1} \xRightarrow{\varphi(x) = f(x) - \sqrt{x}} \boxed{f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x},\ x \geq 0}$

Δ2 • $f(x) - g(x) - 2\sqrt{x} = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x} - x + \sqrt{x} - 2\sqrt{x} = \sqrt{x^2+1} - x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \underset{\text{συζυγή}}{\overset{(+\infty - \infty)}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1 - x}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1\right)} \overset{\frac{1}{(+\infty)\cdot(1+1)}}{=} 0$ Άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} συν\left(f(x) - g(x) - 2\sqrt{x}\right) =$

$= συν0 = 1$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{|x|}^{\,x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{x}}{x\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x}\right)} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} \underset{\frac{1+0}{1-0}}{=} 1$

**Δ3) α)** $h(x) = f(x) - g(x) - x^3 - \frac{3}{2} = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x} - x + \sqrt{x} - x^3 - \frac{3}{2} \Rightarrow$

$h(x) = \sqrt{x^2+1} + 2\sqrt{x} - x - x^3 - \frac{3}{2}, \quad x \geq 0$

- $h(0) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} < 0$
- $h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}+1} + 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{2} - \frac{17}{8}$

Έστω $\sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{2} > \frac{17}{8} \Leftrightarrow \frac{5}{4} + 2 + 2\sqrt{\frac{5}{4}\cdot 2} > \frac{17^2}{8^2} \Leftrightarrow$

$\frac{13}{4} + 2\sqrt{\frac{5}{2}} > \frac{289}{64} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{5}{2}} > \frac{289}{64} - \frac{13}{4} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{5}{2}} > \frac{81}{64} \Leftrightarrow$

$10 > \left(\frac{81}{64}\right)^2 \Leftrightarrow 10 \cdot 64^2 > 81^2 \Leftrightarrow 10 \cdot 8^4 > 9^4$ ισχύει άρα $h\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

- $h(1) = \sqrt{2} + 2 - 1 - 1 - \frac{3}{2} = \sqrt{2} - \frac{3}{2} < 0$ $\left(\sqrt{2} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 < \frac{9}{4} \Leftrightarrow 8 < 9 \text{ ισχύει}\right)$
- h συνεχής για $x \geq 0$ άρα από Θ.Β $\exists$ ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ : $h(\xi_1) = h(\xi_2) = 0$

**Δ3 β)** έστω $\varphi(x) = (x - \xi_2)\cdot(h(x) - 1) + (x - \xi_1)\cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - h(x)) - 1821(x-\xi_1)(x-\xi_2)$

- $\varphi(x)$ συνεχής στο $[0,+\infty)$ πράξεις συνεχών
- $\varphi(\xi_1) = (\xi_1 - \xi_2)(h(\xi_1) - 1) \overset{h(\xi_1)=0}{=\!=\!=} (\xi_1 - \xi_2)\cdot(-1) = \xi_2 - \xi_1 > 0$
- $\varphi(\xi_2) = (\xi_2 - \xi_1)\cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - h(\xi_2)) \overset{h(\xi_2)=0}{=\!=\!=} (\xi_2 - \xi_1)\,\sigma\upsilon\nu(\pi) =$

$= (\xi_2 - \xi_1)(-1) = \xi_1 - \xi_2 < 0$

Άρα από Θ.Β η $\varphi(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(\xi_1, \xi_2)$

**2.** Έστω συνάρτηση $x(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 1, t \in [0,4]$, η οποία καθορίζει τη θέση ενός κινητού πάνω στον άξονα χχ΄

**Δ1.** Πότε το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν, πότε κινείται δεξιά και πότε αριστερά;

**(Μονάδες 5)**

**Δ2.** Να βρεθεί το συνολικό διάστημα που διένυσε το κινητό.

**(Μονάδες 5)**

**Δ3**. Να δείξετε ότι κατά την διάρκεια κίνησης του κινητού μεταξύ των χρονικών στιγμών t=1 sec και t= 3 sec, υπάρχει μια τουλάχιστον χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού είναι ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το σώμα στο χρονικό διάστημα αυτό.

**(Μονάδες 5)**

**Δ4**. Να δείξετε ότι κατά την διάρκεια κίνησης του κινητού μεταξύ των χρονικών στιγμών t=1 sec και t= 3 sec, υπάρχει μια τουλάχιστον χρονική στιγμή κατά την οποία η επιτάχυνση του κινητού είναι ίση με το μηδέν.

**(Μονάδες 5)**

**Δ5.** Αφού αποδείξετε ότι η συνάρτηση της ταχύτητας υ(t) είναι γνησίως αύξουσα για $t \geq 2$ sec , να δείξετε ότι η εξίσωση $2S(t+1) = S(t) + S(t+2)$ είναι αδύνατη για $t \geq 2$ sec.

**(Μονάδες 5)**

Δ1) για $\forall t \in [0,4]$ έχουμε ότι: $\upsilon(t) = x'(t)$

άρα $\upsilon(t) = 3\frac{t^2}{3} - 4t + 3 = t^2 - 4t + 3 \Rightarrow \upsilon(t) = (t-1)(t-3)$

- $\upsilon(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ sec ή $t = 3$ sec
- $\upsilon(t) > 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3) > 0 \Leftrightarrow t \in (0,1) \cup (3,4)$
- $\upsilon(t) < 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3) < 0 \Leftrightarrow t \in (1,3)$

| $t$ | 0 | | 1 | | 3 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\upsilon(t)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

Άρα το κινητό είναι ακίνητο όταν $t=1$ ή $t=3$ sec

" " κινείται δεξιά όταν $t \in (0,1) \cup (3,4)$

" " " αριστερά " $t \in (1,3)$

Δ2) Από τη χρονική στιγμή $t=0$ sec έως $t=1$ sec το κινητό κινήθηκε προς τα δεξιά και έκανε διάστημα

$S_1 = |x(1) - x(0)| = \left|\frac{1}{3} - 2 + 3 + 1 - 1\right| = \left|\frac{1}{3} + 1\right| = \frac{4}{3}$ m

Από $t = 1$ sec $\rightarrow t = 3$ sec κινήθηκε αριστερά και έκανε διάστημα $S_2 = |x(3) - x(1)| = \left|\frac{27}{3} - 2 \cdot 9 + 9 + 1 - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 + 1\right)\right| =$

$= \left|9 - 18 + 9 + 1 - \left(\frac{1}{3} + 2\right)\right| = \left|1 - \frac{1}{3} - \frac{6}{3}\right| = \left|\frac{3}{3} - \frac{7}{3}\right| = \frac{4}{3}$ m

και τέλος Από $t = 3$ sec $\rightarrow t = 4$ sec κινήθηκε δεξιά και διένυσε διάστημα $S_3 = |x(4) - x(3)| =$

$|16 - 2 \cdot 16 + 12 + 1 - (9 - 2 \cdot 9 + 9 + 1)| = |-16 + 13 - 1| = |-4| = 4$ m

Άρα το συνολικό διάστημα είναι $S_{ολ} = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 4 =$

$\frac{8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{20}{3}$ m

Δ3) Η μέση ταχύτητα του κινητού μεταξύ $t=1sec$ και $t=3sec$ είναι $\bar{U}_{[1,3]}=\dfrac{x(3)-x(1)}{3-1}\dfrac{m}{sec^2}=\dfrac{1-\frac{7}{3}}{2}=\dfrac{-\frac{4}{3}}{2}=\dfrac{-4}{6}=-\dfrac{2}{3}m/sec$

Όμως η συνάρτηση $x(t)$ είναι συνεχής στο $[1,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ άρα από Θ.Μ.Τ έχω ότι $\exists\, t_0\in(1,3)$: $x'(t_0)=\dfrac{x(3)-x(1)}{3-1}\Rightarrow U(t_0)=-\frac{2}{3}\frac{m}{sec}$

Άρα $\exists$ μια τουλάχιστον χρονική στιγμή μεταξύ $t=1sec$ και $t=3sec$ που η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού είναι ίση με την μέση ταχύτητα στο διάστημα $[1,3]$

Δ4) $U(t)=t^2-4t+3$ συνεχής στο $[1,3]$, παραγ. στο $(1,3)$ και $U(1)=U(3)=0$ άρα από Θ. Rolle $\exists\, t_1\in(1,3)$: $U'(t_1)=0$ όμως $U'(t)=a(t)$ άρα $a(t_1)=0$

άρα τη χρονική στιγμή $t_1$ η επιτάχυνση είναι μηδέν

Αν θέλω βρίσκω τη στιγμή αυτή ως εξής:
$a(t)=2t-4$ $\quad a(t)=0\Leftrightarrow 2t-4=0\Leftrightarrow t=2sec$ και είναι μοναδική.

Δ5) $U(t)=t^2-4t+3=t^2-2t\cdot2+4-4+3=(t-2)^2-1$

για $2<t_1<t_2\Rightarrow 0<t_1-2<t_2-2\Rightarrow (t_1-2)^2<(t_2-2)^2\Rightarrow$
$(t_1-2)^2-1<(t_2-2)^2-1\Rightarrow U(t_1)<U(t_2)$ άρα
$U(t)\nearrow$ για $t\geq2$

η εξίσωση $2x(t+1)=x(t)+x(t+2)$ γίνεται:

$$\frac{x(t+1)-x(t)}{t+1-t}=\frac{x(t+2)-x(t+1)}{t+2-(t+1)}\xLeftrightarrow[\text{στα } (t,t+1),(t+1,t+2) \text{ με } t\geq2]{x(t) \text{ ικανοποιεί Θ.Μ.Τ}}$$

$x'(t_2)=x'(t_3)$ με $t_2\in(t,t+1)$, $t_3\in(t+1,t+2)$

δηλαδή $U(t_2)=U(t_3)\xLeftrightarrow[\text{"1-1" για } t\geq2]{U(t)\nearrow \text{ άρα}} t_2=t_3$ άτοπο

άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

**3.** Έστω η δίκλαδη συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\begin{cases}(x-2)\cdot\ln(x^2-3x+2), & x>2\\ 0, & x=2\end{cases}$

**Δ1.** Να δειχθεί ότι f είναι συνεχής στο 2.

**Δ2.** Να δειχθεί ότι η f είναι κυρτή στο [2,+∞] και ότι:

- $f'(e)<f'(\pi)$
- $\ln\left(\dfrac{e^2-3e+2}{\pi^2-3\pi+2}\right)<\dfrac{\pi-e}{(\pi-1)\cdot(e-1)}$

**Δ3.** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in\left(2,\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$\ln(\xi^2-3\xi+2)\cdot(\xi-1)=3-2\xi$ και ότι το ξ αυτό είναι θέση ακροτάτου για την f.

**Δ4.** Να δείξετε ότι η εξίσωση : $g(x)=(x-\pi)\cdot(f'(x)-f'(\pi))+(x-e)\cdot(f'(e)-f'(x))=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (e,π).

Λύση: Δ1)

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x-2)\cdot\ln(x^2-3x+2)=\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3x+2)}{\frac{1}{x-2}}\ \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{D.L'H}{=}}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)\cdot\left[\frac{-1}{(x-2)^2}\right]}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^{\cancel{2}}(2x-3)}{-(\cancel{x-2})(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x-3)}{-(x-1)}=0$$

Άρα $f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)$ άρα f συνεχής στο 2.

Δ2) για x>2 ισχύει: $f'(x)=\ln(x^2-3x+2)+\dfrac{\cancel{(x-2)}(2x-3)}{\cancel{(x-2)}(x-1)}\Rightarrow$

$$f'(x)=\ln(x^2-3x+2)+\frac{2x-3}{x-1}$$

$$f''(x)=\frac{2x-3}{(x-2)(x-1)}+\frac{2(x-1)-(2x-3)}{(x-1)^2}=\frac{2x-3+4(x-2)}{(x-1)^2(x-2)}=$$

$$\frac{2x-3+4x-8}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{6x-11}{(x-1)^2(x-2)}>0 \text{ για } x>2$$

Άρα f ∪ στο [2,+∞) γιατί f συνεχής στο 2.

Επίσης $e<\pi\Rightarrow f'(e)<f'(\pi)$ γιατί $f'(x)\uparrow$

Ισχύει: $f'(e) < f'(\pi) \Rightarrow \ln(e^2-3e+2) + \frac{2e-3}{e-1} > \ln(\pi^2-3\pi+2) + \frac{2\pi-3}{\pi-1} \Rightarrow$

$\ln\left(\frac{e^2-3e+2}{\pi^2-3\pi+2}\right) > \frac{2\pi-3}{\pi-1} - \frac{2e-3}{e-1} \Rightarrow \ln\left(\frac{e^2-3e+2}{\pi^2-3\pi+2}\right) > \frac{\cancel{2\pi e}-2\pi-3e\cancel{+3}-\cancel{2e\pi}+2e+3\pi\cancel{-3}}{(\pi-1)(e-1)} \Rightarrow$

$\ln\left(\frac{e^2-3e+2}{\pi^2-3\pi+2}\right) > \frac{\pi-e}{(\pi-1)(e-1)}$

Δ3) $f(x) = (x-2)\cdot\ln(x^2-3x+2)$ για $x>2$

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(2)=0 \\ \bullet\ f\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right) = \left(\frac{3+\sqrt5}{2}-2\right)\cdot\ln\left[\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{(3+\sqrt5)}{2}+2\right] = \\ \quad = \frac{\sqrt5-1}{2}\cdot\ln1 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[f\ \text{συνεχής}]{\text{Θ. Rolle}}$

$\exists\ \xi\in\left(2, \frac{3+\sqrt5}{2}\right): f'(\xi)=0 \xRightarrow{f'(x)=\ln(x^2-3x+2)+\frac{2x-3}{x-1}} \ln(\xi^2-3\xi+2) = \frac{3-2\xi}{\xi-1}$

$\Rightarrow (\xi-1)\ln(\xi^2-3\xi+2) = 3-2\xi$. Το $\xi$ είναι μοναδικό γιατί $f'(x)\nearrow$

Δ4) $\left.\begin{array}{l} \bullet\ g(e) = \underset{(-)}{(e-\pi)}\cdot\left[\underset{(-)}{f'(e)-f'(\pi)}\right]+0 > 0 \\ \bullet\ g(\pi) = 0 + \underset{+}{(\pi-e)}\underset{-}{(f'(e)-f'(\pi))} < 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[g\ \text{συνεχής}]{\text{Θ. Bolzano}}$

η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(e,\pi)$.

• αν $x_1<0<x_2$ τότε (2) $x_2\sqrt{x_1^2+5} > x_1\sqrt{x_2^2+5}$ ισχύει

γιατί $x_2>0$ και $x_1<0$ $\quad (+) \quad (-)$

άρα σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $x_1<x_2 \Rightarrow f'(x_1)>f'(x_2)$

Συνεπώς $-f'(x_1) < -f'(x_2) \Rightarrow 1-f'(x_1) < 1-f'(x_2) \xrightarrow[2^x \uparrow]{3^x \uparrow}$

$$\left.\begin{array}{l} 3^{1-f'(x_1)} < 3^{1-f'(x_2)} \\ 2^{1-f'(x_1)} < 2^{1-f'(x_2)} \\ x_1 < x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1+3^{1-f'(x_1)}+2^{1-f'(x_1)}-5 < x_2+3^{1-f'(x_2)}+2^{1-f'(x_2)}-5 \Rightarrow$$

$h(x_1)<h(x_2) \Rightarrow h(x)\uparrow$ άρα

η ρίζα $x=0$ είναι μοναδική.

Αν θέλαμε μπορούσαμε να βρούμε το πρόσημο της $f''(x)$ εύκολα ($f''(x)<0$) για να βρούμε την μονοτονία της $f'(x)$ αλλά αυτό είναι σε πιο κάτω παράγραφο.

**4.** Έστω η συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)\to \Re$, ώστε να ισχύει: $f(x+\psi)=\frac{f(x)+f(\psi)}{1-f(x)\cdot f(\psi)}$ για κάθε $x,\psi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

**Δ1.** Αν f συνεχής στο 0 να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

**Δ2.** Αν ισχύει $f'(0)=1$, να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$ και να δειχθεί ότι $f'(x)=1+f^2(x)$

**Δ3.** Αν $f(x)=\varepsilon\varphi(u(x))$, να δειχθεί ότι $f(x)=\varepsilon\varphi x$

**Δ4.** Να υπολογιστεί το εμβαδόν μεταξύ της $C_f$, της εφαπτομένης της $C_f$ στη θέση μηδέν και της ευθείας $x=\pi/4$

**Δ5.** Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2$ στο διάστημα $(0,\pi/3)$ ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$$

α) Η σχέση(1) για $x=\psi=0$ γίνεται: $f(0)=\dfrac{f(0)+f(0)}{1-f(0)\cdot f(0)} \Rightarrow$

$f(0)\left[-f^2(0)-1\right]=0 \Rightarrow f(0)=0$ ή $f^2(0)=-1$ (άτοπο). Άρα $f(0)=0$.

Αφού η f είναι συνεχής στο 0 ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$.

Στη τυχαία θέση $x_0$ έχουμε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \overset{x=x_0+h}{=} \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)+f(h)}{1-f(x_0)\cdot f(h)}=\frac{f(x_0)+\lim\limits_{h\to 0} f(h)}{1-f(x_0)\cdot \lim\limits_{h\to 0} f(h)}=f(x_0).$$

Άρα η f είναι συνεχής για κάθε $x\in\Re$.

β) $f'(0)=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1 \overset{f(0)=0}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

Για την τυχαία θέση $x_0$ έχουμε ότι:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x_0)+f(h)}{1-f(x_0)f(h)}-f(x_0)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\cdot\frac{1+f^2(x_0)}{1-f(x_0)\cdot f(h)}=f'(0)\cdot\frac{1+f^2(x_0)}{1}=1+f^2(x_0)$$

Άρα: $f'(x)=1+f^2(x) \Rightarrow \dfrac{df(x)}{dx}=1+f^2(x)$ (1)

Δ3) Έστω $f(x)=\varepsilon\varphi(u(x))$. Από προηγούμενο ερώτημα ισχύει:

$$f'(x)=1+f^2(x) \xRightarrow[f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(u(x))}\cdot u'(x)]{f(x)=\varepsilon\varphi(u(x))} \frac{u'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2(u(x))}=1+\varepsilon\varphi^2(u(x)) \Rightarrow$$

$u'(x)=\sigma\upsilon\nu^2(u(x))+\eta\mu^2(u(x)) \Rightarrow u'(x)=1 \Rightarrow u(x)=x+c$ άρα

$f(x)=\varepsilon\varphi(x+c) \xRightarrow{f(0)=0} \varepsilon\varphi c=0 \Rightarrow c=\kappa\pi$ άρα $f(x)=\varepsilon\varphi(\kappa\pi+x) \Rightarrow$

$\boxed{f(x)=\varepsilon\varphi x}$

Δ4) $f'(0)=1$ η εξίσωση της εφαπτομένης της $f$ στο $(0,0)$ είναι

$\psi - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow \psi = x$

$f'(x) = 1+f^2(x) \Rightarrow f''(x) = 2f(x)\cdot f'(x) = 2\,\varepsilon\varphi x \cdot f'(x) \geq 0$ για

$x\in[0,\frac{\pi}{2})$ το "=" για $x=0$ άρα η $f$ στρέφει τα κοίλα άνω

άρα $f(x)\geq x \ \forall x\in[0,\frac{\pi}{2})$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(f(x)-x)\,dx =$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx - \frac{x^2}{2}\Big/_0^{\frac{\pi}{4}} =$

$\left[-\ln|\sigma\upsilon\nu x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = -\ln\sqrt{2}+\ln 2 - \frac{\pi^2}{16} =$

$-\frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi^2}{16}$

Δ5) στο $(0,\frac{\pi}{6})$ από Θ.Μ.Τ.Δ.Λ έχω: $\exists\, \xi_1 \in (0,\frac{\pi}{6})$:

$f'(\xi_1) = \frac{f(\frac{\pi}{6})-f(0)}{\frac{\pi}{6}} = \frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} - \varepsilon\varphi 0}{\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}-0}{\frac{\pi}{6}} = \frac{6\sqrt{3}}{3\pi} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$

στο $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ από Θ.Μ.Τ.Δ.Λ έχω: $\exists\, \xi_2 \in (\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$:

$f'(\xi_2) = \frac{f(\frac{\pi}{3})-f(\frac{\pi}{6})}{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{12\sqrt{3}}{3\pi} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχω ότι: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2) = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}$

**5.** Έστω η παρ/μη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$, ώστε $x\cdot f'(x)+\ln x-1=f(x)$ και $f(1)=-1$

**Δ1.** Να βρεθεί ο τύπος της f.

**Δ2.** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται για $x\in(0,1]$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

**Δ3.** Να λυθούν οι εξισώσεις $f^{-1}(x)=2$ και $f^{-1}(x)=x$

**Δ4.** Έστω $g(x)=e^{f(x)}$. Να δείξετε ότι:

- $g(x)<x$, για $x\in(0,+\infty)$
- $2\int_1^{\alpha} g(x)\,dx < \alpha^2-1$ για $\alpha>1$
- $\int_1^{2} g(x)\,dx < e^{-1}$

**Λύση: Δ1)** Ισχύει $x\cdot f'(x)-f(x)=1-\ln x \overset{x\neq 0}{\Longrightarrow} \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\ln x}{x}+c \overset{x=1}{\Longrightarrow} f(1)=c \Rightarrow c=-1$

Άρα $\boxed{f(x)=\ln x-x}$

**Δ2)** $f(x)=\ln x-x$ , $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f$ | $-\infty$ ↗ | $f(1)=-1$ | ↘ $-\infty$ |

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x-x)=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x}-1\right)$

όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L'H}{=\!=}} 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Επομένως αν $x\in(0,1]$ τότε $f((0,1])=(-\infty,-1]$

Συνεπώς η $f$ αντιστρέφεται για $x\in(0,1]$ και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $(-\infty,-1]$

**Δ3)** • $f^{-1}(x)=2$ επειδή το πεδίο τιμών της $f^{-1}$ είναι το $(0,1]$ δεν μπορεί η $f^{-1}(x)$ να πάρει την τιμή 2 άρα αδύνατη.

• $f^{-1}(x)=x$ . Το $x$ πρέπει να παίρνει τιμές από το $(-\infty,-1]$ γιατί αυτό είναι το Π.Ο της αντίστροφης. Όμως η αντίστροφη έχει Π.Τ το $(0,1]$ δηλαδή $0<f^{-1}(x)\leq 1$

Άρα δεν μπορεί να έχει λύση η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$

**Δ4)** • $g(x)=e^{f(x)}=e^{\ln x-x}=\dfrac{e^{\ln x}}{e^x}=\dfrac{x}{e^x}$

Άρα $g(x)<x \Leftrightarrow \dfrac{x}{e^x}<x \Leftrightarrow x<xe^x \Leftrightarrow x(e^x-1)>0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow}$

$e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$ ισχύει.

• Ισχύει: $g(x) < x \Rightarrow \int_1^{a} g(x)dx < \int_1^{a} x\,dx \Rightarrow$

$\int_1^{a} g(x)dx < \frac{x^2}{2}\Big/_1^{a} \Rightarrow \int_1^{a} g(x)dx < \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\boxed{2\int_1^{a} g(x)dx < a^2 - 1}$

• Από τη μονοτονία της $f$ παρατηρούμε ότι παρουσιάζει ο. μέγιστο για $x=1$ το $f(1)=-1$ άρα $f(x) \le -1 \Rightarrow$

$e^{f(x)} \le e^{-1} \Rightarrow g(x) \le e^{-1} \xrightarrow[\text{για } x=1]{\text{το "=" μόνο}} \int_1^{2} g(x)dx < \int_1^{2} e^{-1}dx \Rightarrow$

$\int_1^{2} g(x)dx < \left[e^{-1}x\right]_1^{2} \Rightarrow \boxed{\int_1^{2} g(x)dx < e^{-1}}$

**6.** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty]\to\Re$ ,με $f(x) > 0$ για $x > 0$. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$ , τους άξονες xx΄, ψψ΄και την ευθεία x=u είναι

$E(u) = u^2 + u - f(u), \forall u \ge 0$

**Δ1.** Να δειχθεί ότι $f(0)=0$ και $f΄(0)=1$

**Δ2.** Να υπολογιστεί το $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+x^2-5\eta\mu x}{x}$

**Δ3.** Να βρεθεί ο τύπος της f.

**Δ4.** Να δειχθεί ότι: $f(x) \ge \eta\mu x, \forall x \in [0,+\infty]$

**Δ5.** Να λυθεί η εξίσωση : $f(x) = 2x + e^x + \eta\mu x - 1$

Λύση: Δ1) για $u=0$ στον τύπο του εμβαδού έχω

$E(0) = -f(0) \Rightarrow f(0)=0$ γιατί $E(0)=0$

επίσης $E(u) = u^2+u-f(u) \longrightarrow \int_0^{u} f(x)dx = u^2+u-f(u) \xrightarrow[\text{ως προς } u]{\text{Παραγ.}}$

$f(u) = 2u+1-f'(u) \xRightarrow{x=0} f(0) = 1-f'(0) \Rightarrow f'(0)=1$

Δ2) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+x^2-5\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x} + x - 5\frac{\eta\mu x}{x}\right] = f'(0)+0-5\cdot 1 =$

$1-5 = -4$

Δ3) Ισχύει: $E(u)=u^2+u-f(u) \Rightarrow \int_0^u f(x)dx = u^2+u-f(u) \xRightarrow{\text{παραγ. ως προς } (u)}$

$f(u)=2u+1-f'(u) \xRightarrow{u:x} f(x)+f'(x)=2x+1 \xRightarrow{\cdot e^x}$

$e^x f(x)+e^x\cdot f'(x)=e^x(2x+1) \Rightarrow \left[e^x\cdot f(x)\right]'=e^x+2xe^x$ (*)

Θα βρω την αρχική της $e^x+2xe^x$ δηλαδή το $\int_0^x (e^t+2t\cdot e^t)dt$

Πράγματι: $\int_0^x e^t dt+\int_0^x 2t(e^t)'dt = \int_0^x e^t dt + e^t\cdot 2t\Big|_0^x-\int_0^x 2e^t dt =$

$-\int_0^x e^t dt + e^x 2x = 2xe^x - e^t\Big|_0^x = 2xe^x-e^x+1$

Άρα $\left[\int_0^x (e^t+2te^t)dt\right]'=(2xe^x-e^x+1)'=e^x+2xe^x$

Συνεπώς: $\xRightarrow{(*)} \left[e^x\cdot f(x)\right]'=(2xe^x-e^x+1)' \Rightarrow e^x f(x)=2xe^x-e^x+1+c \xRightarrow{x=0} c=0$

$\boxed{f(x)=2x-1+e^{-x}}$

Δ4) $f(x)\geq ημx \Leftrightarrow 2x-1+e^{-x}\geq ημx \Leftrightarrow 2x-1+e^{-x}-ημx\geq 0$

Έστω $g(x)=2x-1+e^{-x}-ημx$, $g'(x)=2-e^{-x}-συνx$

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \Rightarrow -x\leq 0 \Rightarrow e^{-x}\leq 1 \\ -1\leq συνx\leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$e^{-x}+συνx\leq 2$ Άρα $g'(x)\geq 0$ το "=" για $x=0$ άρα $g\uparrow$

συνεπώς $x\geq 0 \Rightarrow g(x)\geq g(0) \Rightarrow 2x-1+e^{-x}-ημx\geq 0 \Rightarrow \boxed{f(x)\geq ημx}$

Δ5) $f(x)=2x+e^x+ημx-1 \Leftrightarrow \cancel{2x}-\cancel{1}+e^{-x}=\cancel{2x}+e^x+ημx-\cancel{1} \Leftrightarrow$

$e^{-x}=e^x+ημx \Leftrightarrow \boxed{e^{-x}-e^x=ημx} \Leftrightarrow e^{-x}-e^x-ημx=0$

$h(x)=e^{-x}-e^x-ημx$ πιθανή ρίζα $x=0$

$h'(x)=-e^{-x}-e^x-συνx$

$$\left.\begin{array}{l} \text{όμως } e^x+\frac{1}{e^x}\geq 2 \Rightarrow -e^x-e^{-x}\leq -2 \\ -1\leq -συνx\leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$-e^x-e^{-x}-συνx\leq -1<0 \Rightarrow h'(x)<0 \Rightarrow$

$h(x)\downarrow$ άρα η ρίζα $x=0$ είναι μοναδική


**7.** Έστω η συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,e]$ συνεχής και παραγωγίσιμη ώστε

$f(x)-f(\psi)\geq x\cdot e^x-\psi\cdot e^\psi$ για κάθε $x,\psi\in\Re$

**Δ1.** Να δείξετε ότι $f(1)-f(0)=e$

**Δ2.** Να δείξετε ότι : $\exists\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,1): f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=3e$

**Δ3.** Να βρεθεί ο τύπος της f

**Δ4.** Να δειχθεί ότι αντιστρέφεται.

**Δ5.** Να υπολογιστεί το $\int_0^e f^{-1}(x)dx$

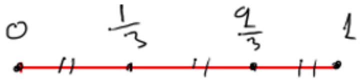
Δ1.

Ισχύει ότι $f(x)-f(\psi)\ge xe^{x}-\psi e^{\psi}$. Γιά x=1, ψ=0 έχουμε ότι $f(1)-f(0)\ge e$ $(2)$.

Όμως $f(x)\in[0,\ e]\Rightarrow \begin{Bmatrix} 0\le f(1)\le e \\ 0\le f(0)\le e \end{Bmatrix}\Rightarrow \begin{Bmatrix} 0\le f(1)\le e \\ -e\le -f(0)\le 0 \end{Bmatrix}\overset{(+)}{\Rightarrow} f(1)-f(0)\le e\ (3)$

Από $(2),\ (3)\Rightarrow f(1)-f(0)=e$

Δ2.




Χωρίζουμε το [0,1] σε τρία ίσα διαστήματα

από Θ.Μ.Τ για την f έχω ότι: $\exists\, \xi_1\in\left(0,\frac{1}{3}\right),\ \xi_2\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\ \xi_3\in\left(\frac{2}{3},1\right)$:

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)-f(0)}{\frac{1}{3}}+\frac{f\left(\frac{2}{3}\right)-f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}}+\frac{f(1)-f\left(\frac{2}{3}\right)}{\frac{1}{3}}=$$

$$3\left(f(1)-f(0)\right)=3e$$

Δ3.

Αν η f παραγωγίσιμη, η αρχική σχέση γιά $\psi=x_0$ γίνεται:

$$f(x)-f(x_0)\ge xe^{x}-x_0e^{x_0}\Rightarrow\begin{Bmatrix} \text{αν } x>x_0 \text{ τότε } \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge\dfrac{xe^{x}-x_0e^{x_0}}{x-x_0} \\ \text{αν } x<x_0 \text{ τότε } \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\dfrac{xe^{x}-x_0e^{x_0}}{x-x_0} \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix} \lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{xe^{x}-x_0e^{x_0}}{x-x_0} \\ \lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{xe^{x}-x_0e^{x_0}}{x-x_0} \end{Bmatrix}$$

Όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ άρα:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{xe^{x}-x_0e^{x_0}}{x-x_0}\Rightarrow f'(x)=\left(xe^{x}\right)'\Rightarrow f(x)=xe^{x}+c$$

Αλλά $f'(x)=e^{x}+xe^{x}>0$ για κάθε $x\ge 0$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0,\ 1]$.

Δηλαδή f(0)=0 και f(1)=e.

$$\text{Συνεπώς: }\begin{Bmatrix} f(x)=xe^{x}+c \\ f(0)=0 \end{Bmatrix}\Rightarrow c=0\Rightarrow f(x)=xe^{x}$$

Δ4.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι και "1-1" άρα υπάρχει η αντίστροφη $f^{-1}$.

Δ5.

$$\int_0^e f^{-1}(x)dx \quad \frac{f^{-1}(x)=u \Rightarrow x=f(u)}{\frac{dx}{du}=f'(u)\Rightarrow dx=f'(u)\cdot du} \quad \int_0^1 u f'(u)du = uf(u)\Big/_0^1 - \int_0^1 f(u)du=$$

$x=0 \to 0=f(u) \to u=0$

$x=e \to e=f(u) \to u=1$

$$f(1) - \int_0^1 ue^u du = e - \int_0^1 u(e^u)'du = e - ue^u\Big/_0^1 + \int_0^1 e^u du =$$

$$e - e + e^u\Big/_0^1 = +e - e^0 = e-1$$

**8.** Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\Re$ με f(0)=0 και παραγωγίσιμη, στρέφοντας τα κοίλα προς τα κάτω.

**Δ1**. Ν.δ.ο: $f(x)-f(x-1)>f'(x)$ για κάθε x≥1 (για να έχει νόημα το f(x-1))

**Δ2.** Ν.δ.ο: $2f(x)>f(x+1)+f(x-1)$ για κάθε x≥1

**Δ3.** Ν.δ.ο: $f(x)>\frac{3}{4}\cdot f\left(\frac{4}{3}x\right)$ για κάθε x>0

**Δ4**. Ν.δ.ο: $f(x)\ge x\cdot f'(x)$ για x≥0 και ότι : $\int_0^2 f(x)dx > f(2)$

Λύση: Α) Απο Θ.Μ.Τ.Δ.Λ έχω οτι $\exists\, \xi\in(x-1,x): f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)} \Rightarrow$

$f'(\xi)=f(x)-f(x-1)$ όμως $f \frown \Rightarrow f'(x)\downarrow$ αρα

για $\xi<x \Rightarrow f'(\xi)>f'(x) \Rightarrow \boxed{f(x)-f(x-1)>f'(x)}$

Β) στα διαστήματα $(x-1,x)$, $(x,x+1)$ απο Θ.Μ.Τ.Δ.Λ έχω:

$f'(\xi_1)=f(x)-f(x-1)$, $f'(\xi_2)=f(x+1)-f(x)$ όμως $f'(x)\downarrow$ αρα

$\xi_1<\xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Rightarrow f(x)-f(x-1)<f(x+1)-f(x) \Rightarrow$

$\boxed{2f(x)<f(x+1)-f(x)}$

Γ) Εστω $g(x)=f(x)-\frac{3}{4}f\left(\frac{4}{3}x\right), x>0$. $g'(x)=f'(x)-f'\left(\frac{4}{3}x\right)>0$ $\left[ x<\frac{4}{3}x \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'\left(\frac{4}{3}x\right) \right]$

αρα $x>0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x)>g(0) \Rightarrow g(x)>0 \Rightarrow \boxed{f(x)>\frac{3}{4}f\left(\frac{4}{3}x\right)}$

Δ) η σχέση $f(x) \geq x f'(x)$ για $x=0$ ισχύει σαν ισότητα.
για $x>0$ έχω από Θ.Μ.Τ.Δ.Λ στο $(0,x)$ : $f'(u) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x}$
$u<x \xrightarrow{f'\uparrow} f'(u) > f'(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} > f'(x) \xRightarrow{x>0} f(x) > f'(x)\cdot x$
άρα τελικά $\boxed{f(x) \geq x f'(x) \text{ για } x \geq 0}$

ισχύει: $f(x) \geq x f'(x) \xRightarrow[\text{για } x=0]{\text{η "=" ισχύει}} \int_0^2 f(x)dx > \int_0^2 x f'(x)dx \Rightarrow$
$\int_0^2 f(x)dx > x f(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 x' \cdot f(x)dx \Rightarrow 2\int_0^2 f(x)dx > 2f(2) \Rightarrow$
$\boxed{\int_0^2 f(x)dx > f(2)}$

**9**. Έστω η συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ ώστε $2f(x) + \ln(f(x)) = x+1$ και $f(x)>0$.

**Δ1.** Ν.δ.ο: Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι γνησίως αύξουσα.

**Δ2.** Ν.δ.ο : η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(1,1).

**Δ3**. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στους πραγματικούς αριθμούς

α) Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f ως συνάρτηση της f(x).

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α(1,1)

γ) Να δειχθεί ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

δ) Ν.δ.ο: $3f(x) \geq x+2, \forall x \in \Re$

ε) Αν η γραφική παράσταση διέρχεται από σημείο Α(0,α) , να δείξετε ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2 - \alpha^2 - \alpha$$

Λύση: Δ1) Έστω ότι η f είναι ↓ τότε αν $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$
$\Rightarrow 2f(x_1) > 2f(x_2)$ (1)
επίσης $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow \ln f(x_1) > \ln f(x_2)$ (2)
από (1),(2) $\Rightarrow 2f(x_1) + \ln f(x_1) > 2f(x_2) + \ln f(x_2) \Rightarrow$
$x_1+1 > x_2+1 \Rightarrow x_1 > x_2$ άτοπο. άρα f ↑

Δ2) Θα δείξω ότι $f(1)=1$. Πράγματι για $x=1$ στην αρχική σχέση έχω $2f(1) + \ln f(1) = 2$. Θεωρώ την εξίσωση:
$2x + \ln x = 2$ και προσπαθώ να την λύσω.
προφανής λύση $x=1$. Έστω $g(x) = 2x + \ln x - 2$. $g'(x) = 2 + \frac{1}{x} > 0$ για $x>0$
Άρα η λύση είναι μοναδική. Τελικά $\boxed{f(1)=1}$

άλλος τρόπος: Έστω $g(x)=2x+\ln x$, $x>0$ τότε $g\uparrow$ άρα $x_1<x_2 \Rightarrow x_1+1<x_2+1 \Rightarrow$
$2f(x_1)+\ln(f(x_1)) < 2f(x_2)+\ln(f(x_2)) \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \xRightarrow{g\uparrow}$
$f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\uparrow$

Δ3)α) ισχύει: $2f(x)+\ln(f(x)) = x+1 \Rightarrow$
$2f'(x)+\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow 2f'(x)\cdot f(x)+f'(x)=f(x) \Rightarrow$
$f'(x)(2f(x)+1)=f(x) \Rightarrow \boxed{f'(x)=\dfrac{f(x)}{2f(x)+1}}$

Δ3)β) η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Rightarrow$
$y-1=\dfrac{f(1)}{2f(1)+1}\cdot(x-1) \xRightarrow{f(1)=1} y-1=\dfrac{1}{3}(x-1) \Rightarrow \boxed{y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{3}}$ $(\varepsilon_1)$

Δ3)γ) $f''(x)=\dfrac{f'(x)(2f(x)+1)-f(x)\cdot 2f'(x)}{(2f(x)+1)^2}=\dfrac{f'(x)}{(2f(x)+1)^2}>0$
άρα $f \cup$

Δ3)δ) Αφού $f\cup$ ισχύει: $f(x)\geq(\varepsilon_1) \Leftrightarrow f(x)\geq\dfrac{x+2}{3} \Rightarrow$
$3f(x)\geq x+2$.

Δ3)ε) $f'(x)=\dfrac{f(x)}{2f(x)+1} \Rightarrow 2f(x)f'(x)+f'(x)=f(x) \Rightarrow \int_0^1 2f(x)f'(x)dx+$
$\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 (f^2(x))'dx+f(x)\big|_0^1=\int_0^1 f(x)dx \Rightarrow$
$\int_0^1 f(x)dx=\left[f^2(x)+f(x)\right]_0^1=f^2(1)+f(1)-f^2(0)-f(0) \xRightarrow[f(0)=\alpha]{f(1)=1} \boxed{2-\alpha^2-\alpha}$

**10.** Έστω η συνάρτηση $f:\Re^* \to \Re$ ώστε $f(x)=e^{1-x}-\frac{1}{x}-\kappa$, και η f παρουσιάζει στο διάστημα $(0,+\infty)$ μέγιστο το 0.

**Δ1.** Να δειχθεί ότι η $C_{f'}$ (η γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου), έχει τρείς εφαπτομένες παράλληλες στον άξονα χχ΄, στα σημεία $x_1$, 1, $x_2$ και ότι η εξίσωση $\sqrt{x_1\cdot x_2}\cdot x = 1453$ είναι αδύνατη.

**Δ2.**

**α)** Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την $f'(x)$ στο διάστημα $(x_1,x_2)$.

**β)** Να δείξετε ότι ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle για την $f'(x)$ στο διάστημα $(x_1,x_2)$.

**Δ3**. Να δειχθεί ότι κ=0 και ότι η εξίσωση $f(x)=e^{1-\frac{x_1}{2}}-\frac{2}{x_1}$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $(-\infty,0)$.

**Δ4.** Να δείξετε ότι: $-2\cdot\int_0^{1-x_2}\left(e^x-\frac{1}{1-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{(1-x)^2}-e^x\right)dx=\frac{(1-x_2)^2}{(x_2)^4}$, όπου το $x_2$ του ερωτήματος $\Delta_1$.

**10.** Έστω η συνάρτηση $f:\Re^*\to\Re$ ώστε $f(x)=e^{1-x}-\frac{1}{x}-\kappa$, και η f παρουσιάζει στο διάστημα $(0,+\infty)$ μέγιστο το 0.

**Δ1.** Να δειχθεί ότι η $C_f$, έχει τρείς εφαπτομένες παράλληλες στον άξονα χχ΄, στα σημεία $x_1$, 1, $x_2$ και ότι η εξίσωση $\sqrt{x_1\cdot x_2}\cdot x=1453$ είναι αδύνατη.

Υποδ: Δ1) $f(x)=e^{1-x}-\frac{1}{x}-\kappa,\ x\neq0$ $\quad f'(x)=-e^{1-x}+\frac{1}{x^2},\ x\neq0$

αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τρείς ρίζες τις $x_1, 1, x_2$. Πράγματι $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}=e^{1-x} \Leftrightarrow x^2\cdot e^{1-x}-1=0$

Έστω $\varphi(x)=x^2e^{1-x}-1$

προφανής ρίζα είναι το 1. Θα δείξω ότι έχει άλλες 2 ρίζες τις $x_1, x_2$.

$\varphi'(x)=2xe^{1-x}+x^2e^{1-x}(-1)=e^{1-x}(2x-x^2)=e^{1-x}(2-x)\cdot x$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^{1-x}-1\right)=+\infty$
- $\varphi(0)=-1$
- $\varphi(1)=0$
- $\varphi(2)=2^2e^{1-2}-1=4e^{-1}-1=\frac{4}{e}-1>0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{1-x}-1\right)$

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'$ | | − | | 0 | + | | + | 0 | − | | |
| $\varphi$ | $+\infty$ | ↘ | | $-1$ | ↗ | 0 | ↗ | $\frac{4}{e}-1$ | ↘ | | $-1$ |

όπου $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\frac{1}{e^{1-x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x-1}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L'H}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x-1}}=0$

Άρα τελικά $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-1$. Από τον πίνακα μεταβολών βλέπουμε ότι η $\varphi(x)=0$ έχει μια ρίζα $x_1\in(-\infty,0)$, το 1 και μια άλλη ρίζα $x_2\in(2,+\infty)$. Προφανώς $x_1\cdot x_2<0$ άρα η εξίσωση $\sqrt{x_1 x_2}\cdot x=1453$ είναι αδύνατη.

Δα

**Δ2.**
**α)** Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f΄(x) στο διάστημα $(x_1,x_2)$.
**β)** Να δείξετε ότι ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle για την f΄(x) στο διάστημα $(x_1,x_2)$.

$f'(x)=\frac{1}{x^2}-e^{1-x}$, $x\neq 0$. Αφού δεν ορίζεται το $f'(0)$ και το μηδέν ανήκει στο $(x_1,x_2)$ η $f'(x)$ δεν είναι συνεχής στο 0 άρα δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle.

αν και $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

| $x_1$ | $0$ | $1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|

όμως στο $[1,x_2]$ η $f'$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,x_2)$ και $f'(1)=f'(x_2)=0$ άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle επομένως $\exists\ \xi\in(1,x_2)\subset(x_1,x_2)$ ώστε $f''(\xi)=0$ δηλαδή ισχύει το συμπέρασμα του Θ. Rolle στο $(x_1,x_2)$.

Δ3

**Δ3**. Να δειχθεί ότι κ=0 και ότι η εξίσωση $f(x)=e^{1-\frac{x_1}{2}}-\frac{2}{x_1}$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $(-\infty,0)$.

$f(x)=e^{1-x}-\frac{1}{x}+\kappa$, $x\neq 0$ η f παρουσιάζει στο $(0,+\infty)$ μέγιστο 0

$f'(x)=\frac{1}{x^2}-e^{1-x}$, $x\neq 0$ $\quad f'(x)=0 \iff x=x_1, 1, x_2$

$f'(x)>0 \iff \frac{1}{x^2}-e^{1-x}>0 \iff e^{1-x}<\frac{1}{x^2} \overset{x^2>0}{\iff} x^2e^{1-x}-1<0 \overset{\varphi(x)=x^2e^{1-x}-1}{\iff}$

$\varphi(x)<0 \overset{\text{στο Δ1 έχω}}{\iff} x\in(x_1,1)\cup(x_2,+\infty)$

το Σ.Τ και τη μονοτονία της φ

$f'(x)<0 \iff \dots \iff \varphi(x)>0 \overset{Δ1}{\iff} x\in(-\infty,x_1)\cup(1,x_2)$

Άρα έχω τον πίνακα

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $0$ | | $1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | ↘ | | ↗ | ‖ | ↗ | τ.Μ $f(1)=\kappa$ | ↘ | | ↗ | |

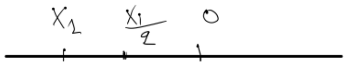
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{1-x}-\frac{1}{x}+\kappa\right)=\kappa$

Άρα η μέγιστη τιμή της f στο $(0,+\infty)$ είναι το κ που από υπόθεση ξέρω ότι $\kappa=0$

Τώρα θα λύσω την εξίσωση: $f(x) = e^{1-\frac{x_1}{2}} - \frac{2}{x_1} \Leftrightarrow$

$$f(x) = e^{1-\frac{x_1}{2}} - \frac{1}{\frac{x_1}{2}} \Leftrightarrow f(x) = f\left(\frac{x_1}{2}\right)$$

όμως $x_1 < 0 \Rightarrow \frac{x_1}{2} < 0$



- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{1-x} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{1-x} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$

Άρα λόγω της μονοτονίας της f (βλέπε Δ3) έχω ότι

$f((-\infty,x_1]) = [f(x_1),+\infty)$ και $f([x_1,0)) = [f(x_1),+\infty)$

όμως $f(x_1) < f\left(\frac{x_1}{2}\right)$ γιατί στη θέση $x_1$ παρουσιάζει τ. ελάχιστο άρα το $f\left(\frac{x_1}{2}\right)$ ανήκει στα δύο Σ. τιμών της f άρα η εξίσωση $f(x) = f\left(\frac{x_1}{2}\right)$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $(-\infty,0)$

Δ4

**Δ4.** Να δείξετε ότι: $-2\cdot\int_0^{1-x_2}\left(e^x-\frac{1}{1-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{(1-x)^2}-e^x\right)dx=\frac{(1-x_2)^2}{(x_2)^4}$, όπου το $x_2$ του ερωτήματος Δ1.

το ολοκλήρωμα έχει νόημα γιατί η συνάρτηση που είναι μέσα στο ολοκλήρωμα είναι συνεχής στο $(0,1-x_2)$ γιατί δεν περιλαμβάνει το 1.

έχω $-2\int_0^{1-x_2}\left(e^x-\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{(1-x)^2}-e^x\right)dx$

$1-x=u \Rightarrow du=-dx$

$x=0 \to u=1$

$x=1-x_2 \to u=x_2$

$$-2\int_1^{x_2}\left(e^{1-u}-\frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{u^2}-e^{1-u}\right)(-du)=$$

$$2\int_1^{x_2} f(u)\cdot f'(u)\,du = \int_1^{x_2}\left[f^2(u)\right]'du = \left[f^2(u)\right]_1^{x_2} =$$

$$f^2(x_2)-f^2(1) \overset{f(1)=0}{=} f^2(x_2) = \left(e^{1-x_2}-\frac{1}{x_2}\right)^2 \underset{\frac{1}{x_2^2}-e^{1-x_2}=0}{\overset{x_2 \text{ ρίζα της } f'}{=}} \left(\frac{1}{x_2^2}-\frac{1}{x_2}\right)^2 = \frac{(1-x_2)^2}{x_2^4}$$

άλλος τρόπος:

$$-2\int_0^{1-x_2}\left(e^x-\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{(1-x)^2}-e^x\right)dx$$

$$u=e^x-\frac{1}{1-x}\Rightarrow du=\left(e^x-\frac{1}{(1-x)^2}\right)dx$$

$x=0\to u=0$

$x=1-x_2\to u=e^{1-x_2}-\frac{1}{x_2}$

$$+2\int_0^{e^{1-x_2}-\frac{1}{x_2}}u\,du=\left[u^2\right]_0^{e^{1-x_2}-\frac{1}{x_2}}=$$

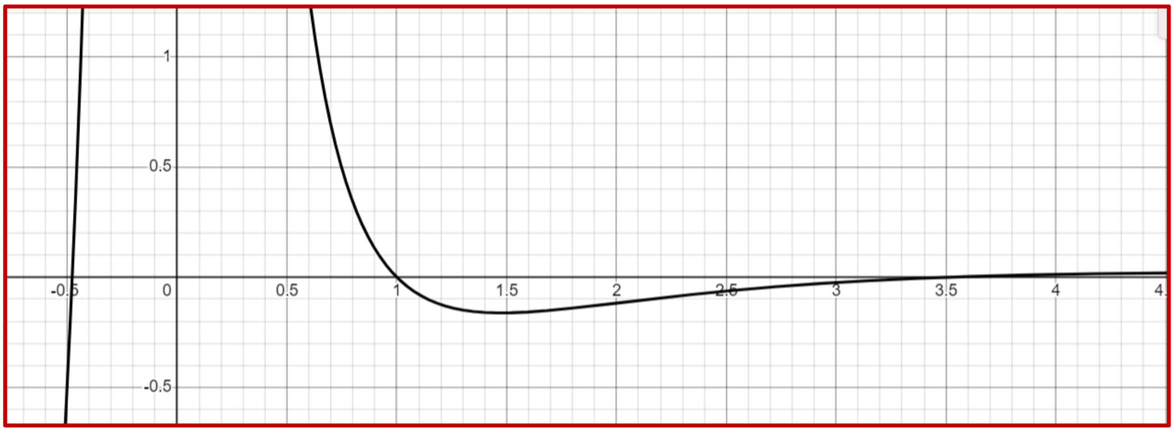
$$\left(e^{1-x_2}-\frac{1}{x_2}\right)^2-0$$

$x_2$ ρίζα της $f'$

$e^{1-x_2}=\frac{1}{x_2^2}$

$$\left(\frac{1}{x_2^2}-\frac{1}{x_2}\right)^2=\frac{(1-x_2)^2}{x_2^4}$$

Ακολουθεί η γραφική παράσταση της f΄.




Ακολουθεί η γραφική παράσταση της f.

**11.** Έστω η συνεχή συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ ώστε $x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = ημx + ημ\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0$.

**Δ1.** Να δειχθεί ότι: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot ημ\frac{1}{x} + x^2 ημx, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

**Δ2.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο $O(0,0)$

**Δ3.**

**α)** Να δείξετε ότι υπάρχει $ξ_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right): f'(ξ_1) = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$

**β)** Να δείξετε ότι υπάρχει $ξ_2 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right): f'(ξ_2) = 10f\left(\frac{1}{2}\right)$

**γ)** Να δείξετε ότι υπάρχει $ξ_3 \in (0,2): f''(ξ_3) > 4f\left(\frac{1}{2}\right)$

**Δ4.** Να υπολογιστεί το $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

**11.** Έστω η συνεχή συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ ώστε $x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = ημx + ημ\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0$.

**Δ1.** Να δειχθεί ότι: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot ημ\frac{1}{x} + x^2 ημx, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Ο χρήστης ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΚΟΛΛΙΝΤΖΑ

Δ1

Ισχύει $x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = ημx + ημ\frac{1}{x}, x \neq 0 \xrightarrow{\frac{1}{x} = ω}$ $x = \frac{1}{ω}, ω \neq 0$

$\frac{1}{ω^2} f(ω) = ημ\frac{1}{ω} + ημω \Rightarrow f(ω) = ω^2 ημ\frac{1}{ω} + ω^2 ημω \xrightarrow{ω:x}$

$f(x) = x^2 ημ\frac{1}{x} + x^2 ημx, x \neq 0$. Όμως f συνεχής στο 0

άρα $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x^2 ημ\frac{1}{x} + x^2 ημx\right)$

όμως $\left.\begin{array}{l} |x^2 ημ\frac{1}{x}| \leq |x|^2 \\ |x^2 ημx| \leq |x|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -|x|^2 \leq x^2 ημ\frac{1}{x} \leq |x|^2 \\ -|x|^2 \leq x^2 ημx \leq |x|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x^2 \leq x^2 ημ\frac{1}{x} \leq x^2 \\ -x^2 \leq x^2 ημx \leq x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0$

καθώς $x \to 0$

Άρα $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Τελικά $f(x) = \begin{cases} x^2 ημ\frac{1}{x} + x^2 ημx, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Δ2)

**Δ2.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο O(0,0)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}+x\eta\mu x\right)=0$$

απο κριτήριο παρεμβολής όπως και στο Δ1

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο $O(0,0)$ είναι:

$$\psi-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow \boxed{\psi=0}$$

Δ3) α)

**Δ3.**

**α)** Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right): f'(\xi_1)=2f\left(\frac{1}{2}\right)$

**β)** Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi_2\in\left(\frac{1}{2},2\right): f'(\xi_2)=10f\left(\frac{1}{2}\right)$

**γ)** Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi_3\in(0,2): f''(\xi_3)<4f\left(\frac{1}{2}\right)$

η f είναι παραγ. στο $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ και συνεχής στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

άρα από Θ.Μ.Τ έχω ότι

$\exists\ \xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$:

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)}{\frac{1}{2}-0}\Rightarrow f'(\xi_1)=2f\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

β) Θ.Μ.Τ για την f στο $\left(\frac{1}{2},2\right)$: $\exists\ \xi_2\in\left(\frac{1}{2},2\right)$: $f'(\xi_2)=\dfrac{f(2)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{2-\frac{1}{2}}\Rightarrow$

$$f'(\xi_2)=\frac{2\cdot\left[f(2)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]}{3}\quad (1)$$

όμως $x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)=\eta\mu x+\eta\mu\frac{1}{x}$

και ($x\neq 0$) $\dfrac{f(x)}{x^2}=\eta\mu x+\eta\mu\dfrac{1}{x}$

$$\Rightarrow x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x^2}\xrightarrow{x=2}4f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f(2)}{4}$$

$$\Rightarrow 16\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)$$

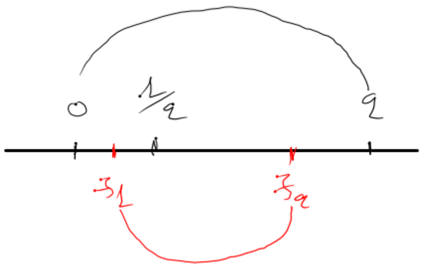
Άρα η (1) $\Rightarrow$ $f'(\xi_2)=\dfrac{2\left(16\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{3}=\dfrac{2\cdot 15\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)}{3}=10f\left(\frac{1}{2}\right)$

Τελικά $f'(\xi_2)=10f\left(\frac{1}{2}\right)$.

γ) στο $(\xi_1, \xi_2)$ εφαρμόζω Θ.Μ.Τ για την $f'(x)$.

$$\exists\, \xi_3 \in (\xi_1,\xi_2):\ f''(\xi_3) = \frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1} = \frac{10f(\frac{1}{2})-2f(\frac{1}{2})}{\xi_2-\xi_1} \Rightarrow$$

$$f''(\xi_3) = \frac{8f(1/2)}{\xi_2-\xi_1} \quad (*)$$




Προφανώς ισχύει ότι:

$$\xi_2-\xi_1 < 2-0 \Rightarrow \xi_2-\xi_1<2$$

Άρα από $(*)$ έχω ότι:

$$f''(\xi_3) > \frac{8f(1/2)}{2} \Rightarrow$$

$$f''(\xi_3) > 4f(1/2)$$

Δ4

**Δ4.** Να υπολογιστεί το $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

Θέλω να υπολογίσω το $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}\left(x^2 ημ\frac{1}{x} + x^2 ημx\right)dx$

Παρατηρώ ότι $f(-x) = (-x)^2 ημ\left(-\frac{1}{x}\right) + (-x)^2 ημ(-x) = -x^2 ημ\frac{1}{x} - x^2 ημx = -f(x)$

άρα $f$ περιττή συνεπώς έχω

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \overset{\substack{x=-u \\ x=-1,\ u=1 \\ x=1,\ u=-1 \\ dx=-du}}{=} \int_{1}^{-1} f(-u)(-du) = \int_{-1}^{1} f(-u)\,du = -\int_{-1}^{1} f(u)\,du \Rightarrow$$

$$2\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x) = 0$$

**12.** Δίνεται η συνάρτηση f , ώστε $f(x)=\begin{cases} e^{e^x-x}-e, & x\ge 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$.

**Δ1.** Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο O(0,0).

**Δ2.** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία τα κοίλα και τα κυρτά.

**Δ3.** Να δείξετε ότι:

**α)** για κάθε x>0 ισχύει: $f'(x)<f(x+1)-f(x)$

**β)** $\forall \alpha,\beta\in[0.1]$ , $\exists \xi\in[0.1]$ ώστε $f(\xi)=\dfrac{1821\cdot f(\alpha)+119\cdot f(\beta)}{1940}$

**Δ4.** Να δείξετε ότι : $\int_0^1 \big((f(x)+e\big)\cdot x dx<\frac{e^e-e^2}{2}$

Δ1

**12.** Δίνεται η συνάρτηση f με ώστε $f(x)=\begin{cases} e^{e^x-x}-e, & x\ge 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$.

**Δ1.** Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο O(0,0).

για x>0 και για x<0 η f είναι συνεχής (σύνθεση συνεχών πολυωνυμική)

για x=0 έχω: $f(0)=e^{e^0-0}-e=e-e=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x^2)=0$ , $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{e^x-x}-e\right)=0$ αρα f συνεχής στο μηδέν.

$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$

$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{e^x-x}-e}{x}\ \underset{D.L'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{e^x-x}\cdot(e^x-1)}{1}=$

$e\cdot 0=0$ αρα $f'(0)=0$

η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow$ $\boxed{y=0}$

Δ2

**Δ2.** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία τα κοίλα και τα κυρτά.

$$f(x)=\begin{cases} e^{e^x-x}-e & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases} e^{e^x-x}\cdot\left(e^x-1\right), & x\geq 0 \\ -2x & x<0 \end{cases}$$

για $x<0$ $f''(x)=-2<0$

για $x>0$ $f''(x)=e^{e^x-x}\cdot\left(e^x-1\right)\left(e^x-1\right)+e^{e^x-x}\cdot e^x=$

$e^{e^x-x}\cdot\left(e^x-1\right)^2+e^{e^x-x}\cdot e^x>0$

$$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\overset{f'(0)=0}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{-2x}{x}=-2$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{e^x-x}\cdot\left(e^x-1\right)}{x}\underset{D.L'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{e^x-x}\left(e^x-1\right)^2+e^{e^x-x}\cdot e^x}{1}\to$$

$f''_+(0)=e$ άρα $\nexists\ f''(0)$

για $x<0$, $f'(x)>0$

για $x>0 \Rightarrow e^x>e^0 \Rightarrow e^x-1>0 \Rightarrow e^{e^x-x}\left(e^x-1\right)>0 \Rightarrow f'(x)>0$

Άρα έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών της f.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f''$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f$ | | ↗ | | ↗ | |

Σ.Κ.

**Δ3. Να δείξετε ότι:**

**α)** για κάθε x>0 ισχύει: $f'(x) < f(x+1) - f(x)$

**β)** $\forall \alpha, \beta \in [0.1]$ , $\exists \xi \in [0.1]$ ώστε $f(\xi) = \dfrac{1821 \cdot f(\alpha) + 119 \cdot f(\beta)}{1940}$

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Έστω μια συνάρτηση $f$ *συνεχής* σ' ένα διάστημα $\Delta$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο *εσωτερικό* του $\Delta$.

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο $x$ του $\Delta$, τότε η $f$ είναι κυρτή στο $\Delta$.
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο $x$ του $\Delta$, τότε η $f$ είναι κοίλη στο $\Delta$.

Δ3)

α) Αφού $f \cup$ για $x \geq 0$ έχω ότι $f' \nearrow$ στο $[0, +\infty)$

Έστω $x > 0$. Από Θ.Μ.Τ στο $(x, x+1)$ έχω ότι $\exists \xi \in (x, x+1)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} \Rightarrow f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$$

όμως $x < \xi \xRightarrow{f' \nearrow} f'(x) < f'(\xi) \Rightarrow f'(x) < f(x+1) - f(x)$

β)

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 0 \leq \beta \leq 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{f \nearrow} \left.\begin{array}{l} 0 \leq f(\alpha) \leq f(1) \\ 0 \leq f(\beta) \leq f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 \leq 1821 f(\alpha) \leq 1821 f(1) \\ 0 \leq 119 f(\beta) \leq 119 f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$0 \leq 1821 f(\alpha) + 119 f(\beta) \leq 1940 f(1) \Rightarrow 0 \leq \frac{1821 f(\alpha) + 119 f(\beta)}{1940} \leq f(1)$$

Επειδή $f \nearrow$ στο $[0,1]$ ισχύει $f([0,1]) = [0, f(1)]$

Αφού $\dfrac{1821 f(\alpha) + 119 f(\beta)}{1940} \in f([0,1])$ από Θ.Ε.Τ : $\exists \xi \in [0,1] : f(\xi) = \dfrac{1821 f(\alpha) + 119 f(\beta)}{1940}$.

**Δ4. Να δείξετε ότι :** $\int_0^1 ((f(x)+e) \cdot x dx < \dfrac{e^e - e^2}{2}$

Δ4) για $x \geq 0$

$$(f(x)+e) \cdot x = \left(e^{e^x - x} - e + e\right) \cdot x = e^{e^x - x} \cdot x \overset{(*)}{\leq} e^{e^x - x} \cdot (e^x - 1) \Rightarrow$$

(*) (όμως ισχύει: $e^x \geq x+1 \Rightarrow e^x - 1 \geq x$)

$(f(x)+e) \cdot x \leq f'(x)$, $x \geq 0$   το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$

άρα $\int_0^1 (f(x)+e) \cdot x < \int_0^1 f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 (f(x)+e) \cdot x < f(x)\Big|_0^1 \Rightarrow$

$$\int_0^1 (f(x)+e) \cdot x < f(1) - \cancelto{0}{f(0)} \Rightarrow \int_0^1 (f(x)+e) \cdot x < e^{e-1} - e = \frac{e^e}{e} - e =$$

$$\frac{e^e - e^2}{e} \Rightarrow \boxed{\int_0^1 (f(x)+e) \cdot x < \frac{e^e - e^2}{e}}$$

**13. (παραλλαγή του Δ θέματος 2021)**

**Δ1.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = \frac{1}{x}$ έχει μοναδική ρίζα $x_0$ και να προσδιορίσετε το ανοιχτό διάστημα πλάτους ½ στο οποίο ανήκει .

**Δ2.** Έστω $f(x) = e^{x_0}(x+1) - e^x - 1$. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, όπου $x_0$ η ρίζα του προηγούμενου ερωτήματος.

**Δ3.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{x+1}\right)$ και η ευθεία $y = x_0$ εφάπτονται, όπου $x_0$ η ρίζα του **Δ1** ερωτήματος.

**Δ4. α)** Έστω συνάρτηση φ(x) με φ(x)>f(x) για όλα τα πραγματικά x και τα σημεία A(x,f(x)) και B(x,φ(x)). Αν η απόσταση των σημείων A,B γίνεται ελάχιστη για $x = x_0$ , να δειχθεί ότι το $x_0$ είναι κρίσιμο σημείο για την φ(x).

**β)** Να βρεθεί η ελάχιστη κατακόρυφη απόσταση των συναρτήσεων f(x) και g(x) των ερωτημάτων **Δ2** και **Δ3**.

Δ1

**13.**

**Δ1.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = \frac{1}{x}$ έχει μοναδική ρίζα $x_0$ και να προσδιορίσετε το ανοιχτό διάστημα πλάτους ½ στο οποίο ανήκει .

Έστω $h(x) = e^x - \frac{1}{x}$ $x \neq 0$ $h'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^*$

Άρα $h(x) \uparrow$ στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

για $x<0$ η εξίσωση $e^x = \frac{1}{x}$ δεν έχει ρίζα γιατί το 1ο μέλος είναι θετικό ενώ το 2ο αρνητικό.

άρα η ρίζα θα είναι θετική

$h(1) = e - \frac{1}{1} = e - 1 > 0$

$h(1/2) = e^{1/2} - \frac{1}{1/2} = \sqrt{e} - 2 < 0$ γιατί $\sqrt{e} - 2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{e} < 2 \Leftrightarrow e < 4$ ισχύει.

άρα από Θ.Bolzano $\exists\, x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ώστε $h(x_0) = 0$

η ρίζα $x_0$ είναι μοναδική γιατί $h \uparrow$ στο $(0, +\infty)$.

Δ2

**Δ2**. Έστω $f(x)=e^{x_0}(x+1)-e^x-1$. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, όπου $x_0$ η ρίζα του προηγούμενου ερωτήματος.

$f(x)=e^{x_0}(x+1)-e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$ $\quad f'(x)=e^{x_0}-e^x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}=e^x \Leftrightarrow x=x_0$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{x_0}>e^x \Leftrightarrow x<x_0$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow e^{x_0}<e^x \Leftrightarrow x>x_0$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | + | 0 | − | |
| $f$ | | ↗ | Ο.Μ. $f(x_0)=0$ | ↘ | |

$f(x_0)=e^{x_0}(x_0+1)-e^{x_0}-1=$

$e^{x_0}\cdot x_0+\cancel{e^{x_0}}-\cancel{e^{x_0}}-1=e^{x_0}\cdot x_0-1\ \overset{Δ1}{\underset{e^{x_0}=\frac{1}{x_0}}{=\!=\!=}}\ \frac{1}{x_0}\cdot x_0-1=0$

Δ3

**Δ3.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln\left(\frac{e^x+1}{x+1}\right)$ και η ευθεία ψ=x₀ εφάπτονται, όπου $x_0$ η ρίζα του **Δ₁** ερωτήματος.

Θα βρω τα κοινά σημεία της g(x) και της ευθείας

$g(x)=\psi \overset{x>-1}{\Leftrightarrow} \ln\left(\frac{e^x+1}{x+1}\right)=x_0 \Leftrightarrow \frac{e^x+1}{x+1}=e^{x_0} \Leftrightarrow e^x+1=e^{x_0}(x+1) \Leftrightarrow$

$e^{x_0}(x+1)-e^x-1=0 \overset{f(x)=e^{x_0}(x+1)-e^x-1}{\Longleftrightarrow} f(x)=0 \overset{f(x_0)=0}{\Longleftrightarrow} f(x)=f(x_0)$

$x=x_0$ (βλέπε τη συμπεριφορά της f στο Δ2) μοναδική θέση. Άρα η ευθεία $\psi=x_0$ ή τέμνεται με την g(x) για $x=x_0$ ή εφάπτεται της ευθείας

δηλαδή $g(x_0)=x_0$ για Δ4

Θα βρω το $g'(x_0)$ και πρέπει να είναι μηδέν για να εφάπτεται της οριζόντιας ευθείας. Πράγματι:

$g'(x)=\frac{x+1}{e^x+1}\cdot\frac{(e^x+1)'(x+1)-(e^x+1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{x+1}{e^x+1}\cdot\frac{e^x(x+1)-e^x-1}{(x+1)^2}$.

Προφανώς $g'(x_0)=\frac{x_0+1}{e^{x_0}+1}\cdot\frac{f(x_0)}{(x_0+1)^2}\ \overset{f(x_0)=0}{\underset{Δ2}{=\!=\!=}}\ 0$ άρα η $C_g$ εφάπτεται της ευθείας $\psi=x_0$

Δ4

**Δ4. α)** Έστω συνάρτηση φ(x) με φ(x)>f(x) για όλα τα πραγματικά x και τα σημεία A(x,f(x)) και B(x,φ(x)). Αν η απόσταση των σημείων A,B γίνεται ελάχιστη για x=$x_0$ , να δειχθεί ότι το $x_0$ είναι κρίσιμο σημείο για την φ(x).
**β)** Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση των συναρτήσεων f(x) και g(x) των ερωτημάτων $\Delta_2$ και $\Delta_3$.

α) Τα σημεία A, B είναι κατακόρυφα άρα η απόστασή τους ισούται με $d(x) = |\varphi(x) - f(x)| \overset{\varphi(x) > f(x)}{=\!=} \varphi(x) - f(x)$

• Αν η φ(x) δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ τότε $x_0$ κρίσιμο σημείο της φ(x)

• Αν φ(x) παραγωγίσιμη στο $x_0$ τότε d(x) παραγωγίσιμη στο $x_0$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0$ άρα Θ. Fermat ισχύει ότι $d'(x_0) = 0 \Rightarrow \varphi'(x_0) - f'(x_0) = 0 \xRightarrow[\Delta_2]{f'(x_0)=0} \varphi'(x_0) = 0$ άρα το $x_0$ κρίσιμο σημείο της φ (σε κάθε περίπτωση)

β) $f(x) = e^{x_0}(x+1) - e^x - 1 \quad x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \ln\left(\frac{e^x+1}{x+1}\right)$
η $C_f$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = x_0$ το $f(x_0) = 0$ επομένως είναι αρνητική $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$ και στο $x_0$ μηδενίζεται.

η $C_g$ εφάπτεται στην ευθεία $\psi = x_0$ στη θέση $x_0$. Επίσης $g(x) > x_0 \Leftrightarrow$

$$\ln\frac{e^x+1}{x+1} > \ln e^{x_0} \Leftrightarrow \frac{e^x+1}{x+1} > e^{x_0} \xLeftrightarrow{x+1>0}$$

$$e^{x_0}(x+1) < e^x + 1 \Leftrightarrow e^{x_0}(x+1) - e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$$

αυτή η σχέση ισχύει πάντα βλέπε Δ2
άρα για $x > -1$ η $g(x) > x_0$ δηλαδή η $C_g$ είναι πάνω από την ευθεία $\psi = x_0$ και στο $x_0$ εφάπτεται
Άρα η ελάχιστη απόσταση της $C_f$ και $C_g$ είναι η διαφορά $g(x_0) - f(x_0) \overset{f(x_0)=0}{\underset{\Delta_2}{=\!=}}$

$g(x_0) - 0 = g(x_0) \overset{\Delta_3}{=\!=} x_0$

**14. (παραλλαγή του Δ θέματος 2022)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+2-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\cdot e^x$ όπου $\kappa=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^3 x}{x\cdot\eta\mu 2x}$

**Δ1. α)** Να δειχθεί ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο ρίζες $x_1$ , $x_2$ με $x_1 < -1$ και $x_2 > 1$.

**β)** Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.

**Δ2.** Αν Ε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$ και τον άξονα x΄x, τότε να δείξετε ότι $E=\frac{(x_2-x_1)\cdot(x_1+x_2+2)}{2}$

**Δ3.** Να δείξετε ότι $f(-2-x_1)>0$

**Δ4.** Να εξετάσετε αν η εξίσωση $2f(x)=1+f'(x_2)\cdot(x-x_2)$ έχει λύση.

Δ1

α)


**14. (παραλλαγή του Δ θέματος 2022)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+2-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\cdot e^x$ όπου $\kappa=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^3 x}{x\cdot\eta\mu 2x}$

**Δ1. α)** Να δειχθεί ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο ρίζες $x_1$ , $x_2$ με $x_1 < -1$ και $x_2 > 1$.

**β)** Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.


$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^3 x}{x\cdot\eta\mu 2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x)}{x\cdot\eta\mu 2x} \qquad \frac{\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)}{\text{πάνω-κάτω}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x)}{x\,\eta\mu 2x\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x\,(1+\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x)}{x\cdot\frac{\eta\mu 2x}{2x}\cdot 2x\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}}_{\to 1}\cdot\frac{1+\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\underbrace{\frac{\eta\mu 2x}{2x}}_{\to 1}\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)} = \frac{3}{2} = \kappa$$

Άρα η f(x) γίνεται $f(x)=x+2-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot e^x \Rightarrow$

$$\boxed{f(x)=x+2-e^x}$$

$f(x) = x+2-e^x$

$f'(x) = 1-e^x$

$f'(x)=0 \iff e^x = 1 \iff x=0$

$f'(x)>0 \iff 1-e^x>0 \iff 1>e^x \iff x<0$

$f'(x)>0 \iff \dots \quad x>0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+2-e^x) = -\infty+2-0 = -\infty$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+2-e^x) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^x}{x}\right) = (+\infty)\cdot(1+0-\infty) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} \underset{\text{D.L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$f(0)=1$

$f(1) = 3-e>0$

$f(-1) = -1+2-e^{-1} = 1-\frac{1}{e}>0$ γιατί $1>\frac{1}{e} \iff e>1$ ισχύει

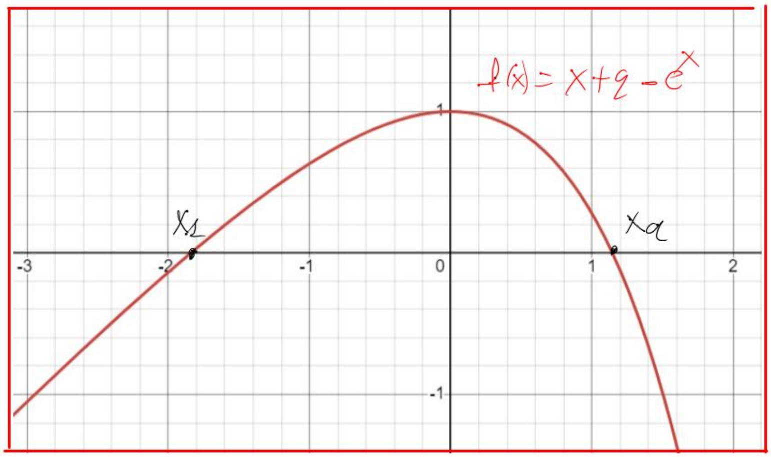
Άρα $f((-\infty,-1]) = (-\infty, 1-\frac{1}{e}]$ και το 0 ανήκει στο $f((-\infty,-1])$ η εξίσωση έχει ρίζα $x_1$ στο $(-\infty,-1]$

ομοίως $f([1,+\infty)) = (-\infty, 3-e]$ και το 0 ανήκει στο $f([1,+\infty))$ άρα η εξίσωση έχει ρίζα $x_2$ στο $[1,+\infty)$

(β) $f(x) = x+2-e^x$, $f'(x) = 1-e^x$, $f''(x) = -e^x<0$

άρα $f$ $\cap$ κοίλη

οι ρίζες στο (α) ερώτημα είναι και μοναδικές λόγω μονοτονίας



Δ2

**Δ2.** Αν Ε το εμβαδό του χωρίου που περικλείετε από την $C_f$ και τον άξονα x΄x, τότε να δείξετε ότι $E=\frac{(x_2-x_1)\cdot(x_1+x_2+2)}{2}$

$f(x)=x+2-e^x$ η $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες $x_1,x_2$
Αφού f συνεχής διατηρεί πρόσημο μεταξύ των ριζών $f(0)=1>0$ και $x_1<0<x_2$ άρα $f(x)>0$ στο $(x_1,x_2)$

$$E=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}(x+2-e^x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-e^x\right]_{x_1}^{x_2}=$$

$$\frac{x_2^2}{2}+2x_2-e^{x_2}-\frac{x_1^2}{2}-2x_1+e^{x_1}$$

$\dfrac{f(x_1)=f(x_2)=0}{x_1+2=e^{x_1},\ x_2+2=e^{x_2}}$

$$\frac{x_2^2-x_1^2}{2}+2x_2-x_2-2-2x_1+x_1+2=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{2}+x_2-x_1\Rightarrow$$

$$E=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1+2)}{2}$$

Δ3 αρκεί $x_1<-2-x_1<x_2$

**Δ3.** Να δείξετε ότι $f(-2-x_1)>0$

- $x_1<-2-x_1 \Leftrightarrow 2x_1<-2 \Leftrightarrow x_1<-1$ ισχύει.
- $-2-x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1+x_2+2>0$ ισχύει γιατί από το Δ2

έχω ότι $E>0\Rightarrow \frac{(x_2-x_1)(x_1+x_2+2)}{2}>0 \xRightarrow{x_2-x_1>0} x_1+x_2+2>0$

Άρα από το πρόσημο της f ισχύει ότι $f(-2-x_1)>0$

$\Delta_4$ $f(x) = x+2-e^x$

**Δ4.** Να εξετάσετε αν η εξίσωση $2f(x)=1+f'(x_2)\cdot(x-x_2)$ έχει λύση.

$2f(x) = 1 + f'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow f(x) + f(x) = f(0) + f'(x_2)(x-x_2)$

όμως στο μηδέν η $f$ παρουσιάζει μέγιστο το $f(0)=1$ άρα

$f(x) \le f(0) \Rightarrow f(x) \le 1$ το "=" για $x=0$ (1)

επίσης $f$ ∪ άρα η εφαπτομένη στη θέση $x_2$ είναι πιο πάνω από την $C_f$. η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y - f(x_2) = f'(x_2)(x-x_2) \xRightarrow{f(x_2)=0} y = f'(x_2)(x-x_2)$

άρα $f(x) \le f'(x_2)(x-x_2)$ το "=" για $x = x_2$ (2)

Από $\xRightarrow[(+)]{(1),(2)}$ $2f(x) \le 1 + f'(x_2)(x-x_2)$ το "=" ισχύει αν και οι δύο σχέσεις πάρουν "=" αυτό όμως γίνεται για διαφορετικά $x$ άρα τελικά η εξίσωση η αρχική δεν έχει λύση.

**15. (παραλλαγή του Δ θέματος 8 Σεπτεμβρίου 2020)**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\Re$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\cdot ημx\cdot συνx = f(x) - 2συν^2x\cdot f(x) \quad \forall x\in\left(0.\frac{\pi}{2}\right)$
- $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot ημx\cdot συνx$, $x\in\left(0.\frac{\pi}{2}\right)$ είναι σταθερή. Στη συνέχεια να δείξετε ότι $f(x)=εφx+σφx$, $x\in\left(0.\frac{\pi}{2}\right)$

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο στο $x_0=\frac{\pi}{4}$ το οποίο και να βρείτε.

**Δ3.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e$ στο διάστημα $\left(0.\frac{\pi}{2}\right)$ έχει δύο ρίζες $ρ_1$, $ρ_2$ με $ρ_1 < ρ_2$

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι:

1) $f'(\rho_1)\cdot(\pi-4\rho_1)<8-4e$

2) $f'(\rho_2)\cdot(4\rho_2-\pi)>4e-8$ όπου $\rho_1$ , $\rho_2$ οι ρίζες του $\Delta_3$.

**15. (παραλλαγή του Δ θέματος 8 Σεπτεμβρίου 2020)**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\Re$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=f(x)-2\sigma\upsilon\nu^2x\cdot f(x)\quad\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (1)
- $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι σταθερή. Στη συνέχεια να δείξετε ότι $f(x)=\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Δ1

$g'(x)=f'(x)\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+f(x)\cdot(\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x)\Rightarrow$

$g'(x)=f'(x)\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+f(x)(\sigma\upsilon\nu^2x-1+\sigma\upsilon\nu^2x)\Rightarrow$

$g'(x)=f'(x)\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+f(x)(2\sigma\upsilon\nu^2x-1)\Rightarrow$

$g'(x)=f'(x)\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-f(x)+2f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu^2x=0$ από (1) υπόθεση

άρα από συνέπεια του Θ.Μ.Τ ισχύει $g(x)=c$

$g(x)=c\xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}}g\left(\frac{\pi}{6}\right)=c\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\eta\mu\frac{\pi}{6}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=c\xrightarrow{f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}}$

$\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}=c\Rightarrow\frac{4\cdot3}{3\cdot4}=c\Rightarrow c=1$. Άρα $g(x)=1\xRightarrow{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}$

$f(x)\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=1\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}\Rightarrow f(x)=\frac{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}\Rightarrow$

$f(x)=\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x\ ,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Δ2

**Δ2**. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$ το οποίο και να βρείτε.

$f(x) = εφx + σφx \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{συν^2 x} - \frac{1}{ημ^2 x} = \frac{ημ^2 x - συν^2 x}{ημ^2 x\, συν^2 x}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow ημ^2 x - συν^2 x = 0 \Leftrightarrow |ημx| = |συνx| \xLeftrightarrow[\substack{ημx>0 \\ συνx>0}]{x \in (0, \pi/2)}$

$ημx = συνx \xLeftrightarrow{συνx \neq 0} εφx = 1 \Leftrightarrow$

$x = \frac{\pi}{4}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow εφx > 1 \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{4}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow εφx < 1 \Leftrightarrow x < \frac{\pi}{4}$

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | Ο.Ε. $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

για $x = \frac{\pi}{4}$ η f έχει ελάχιστο το

$f_{min} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = εφ\frac{\pi}{4} + σφ\frac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2$

Δ3

**Δ3.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχει δύο ρίζες $\rho_1$, $\rho_2$ με $\rho_1 < \rho_2$

$f(x) = εφx + σφx \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (εφx + σφx) = 0 + \infty = +\infty$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (εφx + σφx) = +\infty + 0 = +\infty$

Άρα $f\left(\left(0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = [2, +\infty)$, $f\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [2, +\infty)$

το e ανήκει και στα 2 διαστήματα άρα από Θ.Ε.Τ

$\exists\, 0 < \rho_1 < \frac{\pi}{4}$ και $\frac{\pi}{4} < \rho_2 < \frac{\pi}{2}$ ώστε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = e$

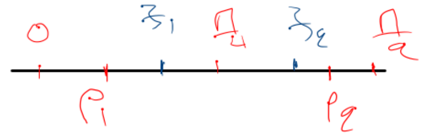
οι ρίζες είναι μοναδικές λόγω μονοτονίας.

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι:

1) $f'(\rho_1)\cdot(\pi-4\rho_1)<8-4e$

2) $f'(\rho_2)\cdot(4\rho_2-\pi)>4e-8$   όπου $\rho_1$, $\rho_2$ οι ρίζες του $\Delta_3$.

Δ4 Για την $f$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ άρα $\exists\ \xi_1 \in \left(\rho_1, \frac{\pi}{4}\right)$ και $\exists\ \xi_2 \in \left(\frac{\pi}{4}, \rho_2\right)$: $f'(\xi_1) = \dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f(\rho_1)}{\frac{\pi}{4}-\rho_1} \Rightarrow$




$$\xrightarrow[f(\rho_1)=e]{f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2} f'(\xi_1) = \frac{2-e}{\frac{\pi}{4}-\rho_1} \Rightarrow$$

$$f'(\xi_1) = \frac{8-4e}{\pi-4\rho_1} \xrightarrow[\substack{\rho_1<\frac{\pi}{4} \Rightarrow 4\rho_1-\pi<0 \Rightarrow \\ \pi-4\rho_1>0}]{\substack{\rho_1<\xi_1 \Rightarrow f'(\rho_1)<f'(\xi_1) \\ f \cup}} f'(\rho_1)\cdot(\pi-4\rho_1)<8-4e.$$

ομοίως

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\rho_2)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\rho_2-\frac{\pi}{4}} \xrightarrow[f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2]{f(\rho_2)=e} \frac{e-2}{\rho_2-\frac{\pi}{4}} = \frac{4e-8}{4\rho_2-\pi} \xrightarrow[f'(\xi_2)<f'(\rho_2)]{\xi_2<\rho_2 \ \xrightarrow{f\cup}}$$

$$f'(\rho_2) > \frac{4e-8}{4\rho_2-\pi} \xrightarrow[\substack{\pi<4\rho_2 \Rightarrow \\ 4\rho_2-\pi>0}]{\frac{\pi}{4}<\rho_2 \Rightarrow} f'(\rho_2)(4\rho_2-\pi)>4e-8$$

Θα δείξω τώρα γιατί $f \cup$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$f(x) = εφx + σφx$, $f'(x) = \dfrac{1}{συν^2x} - \dfrac{1}{ημ^2x}$

$$f''(x) = \left(συν^{-2}x - ημ^{-2}x\right)' = +2\,συν^{-3}x\cdot ημx + 2\,ημ^{-3}x\cdot συνx =$$

$$\frac{2ημx}{συν^3x} + \frac{2συνx}{ημ^3x} > 0$$ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $ημx>0$, $συνx>0$ άρα

$f \cup$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

**16. (μέχρι 2.3)**

Έστω συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για τη οποία ισχύουν :

- Η f είναι συνεχής , παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\cdot f(x)-f(1)}{x-1}=4$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3\cdot f(1)-f(x)}{x-1}=0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=+\infty$
- $\lim\limits_{h\to 0} f(2+h)=8$

**Δ1.** Να δείξετε ότι f(1)=1 και ότι $f'(1)=3$

**(Μονάδες 5)**

**Δ2.** Να υπολογιστούν τα όρια

i. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)+2h-1}{h}$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{2-x}}{x-1}$

**(Μονάδες 5)**

**Δ3.** Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $h(x)=f(x)+\ln(x-1)-\dfrac{3}{2}$ και να δειχθεί ότι η εξίσωση h(x)=0 έχει ακριβώς μια λύση στο (1,2)

**(Μονάδες 5)**

**Δ4.** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(1,\pi): f(\xi)=\dfrac{f(1)+f(e)+f(\pi)}{3}$

**(Μονάδες 5)**

**Δ5.** Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x}{e^x(x+\sigma\upsilon\nu x)}\cdot\left[f(1+e^x)-f(1)\right]$

**(Μονάδες 5)**

**16. (μέχρι 2.3)**

Έστω συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για τη οποία ισχύουν :

- Η f είναι συνεχής , παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\cdot f(x)-f(1)}{x-1}=4$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3\cdot f(1)-f(x)}{x-1}=0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=+\infty$
- $\lim\limits_{h\to 0} f(2+h)=8$

**Γ1.** Να δείξετε ότι f(1)=1 και ότι $f'(1)=3$

Λύση: Γ1

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x f(x) - f(1)}{x-1} = 4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x f(x) - x f(1) + x f(1) - f(1)}{x-1} = 4$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x\left(f(x)-f(1)\right)}{x-1} + \frac{(x-1)\cdot f(1)}{x-1}\right] = \lim_{x\to 1}\left[x\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right) + f(1)\right] = 4$$

$$1\cdot f'(1) + f(1) = 4 \Rightarrow \boxed{f'(1) + f(1) = 4}$$

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 f(1) - f(x)}{x-1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 f(1) - x^3 f(x) + x^3 f(x) - f(x)}{x-1} = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 1} -x^3\frac{\left(f(x)-f(1)\right)}{x-1} + f(x)\left(x^2+x+1\right) = 0 \xrightarrow[\text{και παραγ.}]{\text{f συνεχής}} \boxed{-f'(1) + 3f(1) = 0}$$

Άρα από τις σχέσεις $\left.\begin{aligned} f'(1)+f(1)&=4 \\ \text{και} \quad -f'(1)+3f(1)&=0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} f(1)&=1 \\ f'(1)&=3 \end{aligned}$

Γ2

i) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)+2h-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(1+h)-1}{h} + 2\right) = f'(1) + 2 = 5$

ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - \sqrt{2-x}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1) + f(1) - \sqrt{2-x}}{x-1} =$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1} + \frac{1-\sqrt{2-x}}{x-1}\right) = f'(1) + \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{2-x}}{x-1} =$$

$$3 + \lim_{x\to 1}\frac{1-2+x}{(x-1)\left(1+\sqrt{2-x}\right)} = 3 + \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{2-x}} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

**Γ3.** Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $h(x)=f(x)+\ln(x-1)-\frac{3}{2}$ και να δειχθεί ότι η εξίσωση h(x)=0 έχει ακριβώς μια λύση στο (1,2)

Γ3 $\quad h(x)=f(x)+\ln(x-1)-3/2 \qquad A_h=(1,+\infty)$

$h(x)\uparrow$ στο $(1,+\infty)$ γιατί $f\uparrow$ και $\ln(x-1)\uparrow$

$$\lim_{x\to 1} h(x)=\lim_{x\to 1}\left(f(x)+\ln(x-1)-3/2\right)\ \underset{\substack{f(1)=1\\ \lim_{x\to 1}\ln(x-1)=-\infty}}{\overset{f\ \text{συνεχής}}{=\!=\!=}}\ -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(f(x)+\ln(x-1)-3/2\right)=+\infty$$

γιατί από υπόθεση έχω $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=+\infty$. Έστω $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}\Rightarrow$ $f(x)=x^2\cdot g(x)\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)(+\infty)=+\infty$ άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

και $\lim_{x\to+\infty}\ln(x-1)=+\infty$

άρα $h\left((1,+\infty)\right)=\mathbb{R}$

Από την υπόθεση έχω ότι: $\lim_{h\to 0} f(2+h)=8 \xrightarrow{f\ \text{συνεχής}} f(2)=8$

άρα $h(2)=f(2)+\ln(2-1)-3/2=8+0-3/2=\frac{13}{2}>0$

και επειδή $\lim_{x\to 1} h(x)\ \underset{\text{ερώτημα}}{\overset{\text{προηγούμ.}}{=\!=\!=}}\ -\infty$ $\quad\exists\ \kappa$ κοντά στο $1^+$ ώστε $h(\kappa)<0$ άρα από Bolzano έχω μία τουλάχιστον ρίζα στο $(\kappa,2)\subset(1,2)$, η μοναδικότητα λόγω μονοτονίας.

**Γ4.** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (e,\pi): f(\xi) = \dfrac{f(1)+f(e)+f(\pi)}{3}$

Γ4 $f \nearrow$ άρα

$$\left.\begin{aligned} 1 \le 1 < \pi &\Rightarrow f(1) \le f(1) < f(\pi) \\ 1 < e < \pi &\Rightarrow f(1) < f(e) < f(\pi) \\ 1 < \pi \le \pi &\Rightarrow f(1) < f(\pi) \le f(\pi) \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$f(1) < \dfrac{f(1)+f(e)+f(\pi)}{3} < f(\pi)$ άρα από Θ.Ε.Τ

$\exists$ μοναδικό $\xi \in (1,\pi) : f(\xi) = \dfrac{f(1)+f(e)+f(\pi)}{3}$

η μοναδικότητα λόγω μονοτονίας

**Γ5.** Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{e^x(x+\sigma\upsilon\nu x)} \cdot \left[f(1+e^x) - f(1)\right]$

Γ5 το όριο γίνεται: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x+\sigma\upsilon\nu x} \cdot \left[\dfrac{f(1+e^x)-f(1)}{e^x}\right]$ $(***)$

όμως $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x+\sigma\upsilon\nu x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x\left(1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}} = 2$

γιατί $\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right| \le \dfrac{1}{|x|} \Rightarrow -\dfrac{1}{|x|} \le \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \le \dfrac{1}{|x|} \overset{\kappa.\pi}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

και $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(1+e^x)-f(1)}{e^x} \underset{\substack{x\to-\infty \\ u\to 0}}{\overset{e^x=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{f(1+u)-f(1)}{u} = f'(1) = 3$

Άρα η $(***)$ γίνεται ίση με $2 \cdot 3 = 6$