

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

(Μονάδες 8)

Α2.

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος.
2. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ ;

(Μονάδες 4)

Α3. Υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις, που δεν υπολογίζονται οι παράγουσες τους;

Αν όχι γιατί; Αν ναι να αναφέρετε μερικές.

(Μονάδες 3)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x_0) > 0$.	Σ	Λ
β) Το αντίστροφο του θεωρήματος Rolle ισχύει πάντα.	Σ	Λ
γ) Το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης είναι πάντα αριθμός.	Σ	Λ
δ) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	Σ	Λ
ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι πάντοτε διάστημα.	Σ	Λ

(Μονάδες 2x5=10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}$

B1. Να υπολογιστεί το α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο 1.

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha = -2$.

(Μονάδες 4)

B2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$ και να δείξετε ότι: $\exists x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 4\right) : f'(x_0) = 0$

(Μονάδες 8)

B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f και να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

B4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του λ , γραφικά ή με οποιαδήποτε άλλο τρόπο.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

- $f(0)=1$
- $f(1)=0$
- $f''(x) > 0, \forall x \in [0,1]$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την πρώτη διχοτόμο.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη ξ μεταξύ $(0,1)$, στο οποίο η κλίση της C_f είναι -1 και ότι ισχύει: $f(x) \geq -x + f(\xi) + \xi$.

(Μονάδες 6)

Γ3. Να αποδείξετε ότι: $\frac{f(x)-1}{x} < \frac{f(x)}{x-1} \quad \forall x \in (0,1)$ και $f(x) \leq -x + 1 \quad \forall x \in [0,1]$.

(Μονάδες 7)

Γ4. Να αποδείξετε ότι για το ξ του δεύτερου ερωτήματος ισχύει:

$$f(\xi) + \xi - \frac{1}{2} < \int_0^1 f(x) dx < \frac{1}{2}.$$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 - \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) \cdot e^x$ όπου $\kappa = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^3 x}{x \cdot \ln 2x}$

Δ1. α) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < -1$ και $x_2 > 1$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.

(Μονάδες 6+3=9)

Δ2. Αν E το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$, τότε να

δείξετε ότι $E = \frac{(x_2 - x_1) \cdot (x_1 + x_2 + 2)}{2}$

(Μονάδες 6)

Δ3. Να δείξετε ότι $f(-2 - x_1) > 0$

(Μονάδες 4)

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $2f(x) = 1 + f'(x_2) \cdot (x - x_2)$ έχει λύση.

(Μονάδες 6)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

B1

f συνεχής στο 1 όταν

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$f(1) = 0 + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-2x}{x} = 1 - 2 = -1$$

$$\text{πρέπει } 0 + 1 = -1 \Rightarrow \alpha = -2$$

13. (παραλλαγή επαναληπτικής θέμα Β 2018)

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}$$

B1. Να υπολογιστεί το α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο 1.
Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha = -2$.

B2

B2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-\frac{1}{2}, 4]$ και να δείξετε ότι: $\exists x_0 \in (-\frac{1}{2}, 4) : f'(x_0) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{x}, & x > 1 \\ x^2 - 2, & x \leq 1 \end{cases} \quad f \text{ συνεχής στο } [-\frac{1}{2}, 4]$$

Θα εξετάσω αν είναι παραγωγίσιμη στο 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1-2x}{x} - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-2x+x}{x(x-1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

αρα f δεν παραγωγίζεται στο 1 αρα δεν ισχύει το B. Rolle.

$$\text{ομω } \text{για } x < 1 \quad f'(x) = 2x$$

$$\text{για } x > 1 \quad f'(x) = \frac{-2x - (1-2x)}{x^2} = \frac{-2x - 1 + 2x}{x^2} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

$$\text{Αρα για } x > 1 \quad f'(x) \neq 0$$

$$\text{ομω } \text{για } x < 1 \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{αρα } \exists x_0 \in (-\frac{1}{2}, 4) : f'(x_0) = 0 \text{ να το } x_0 = 0$$

B3

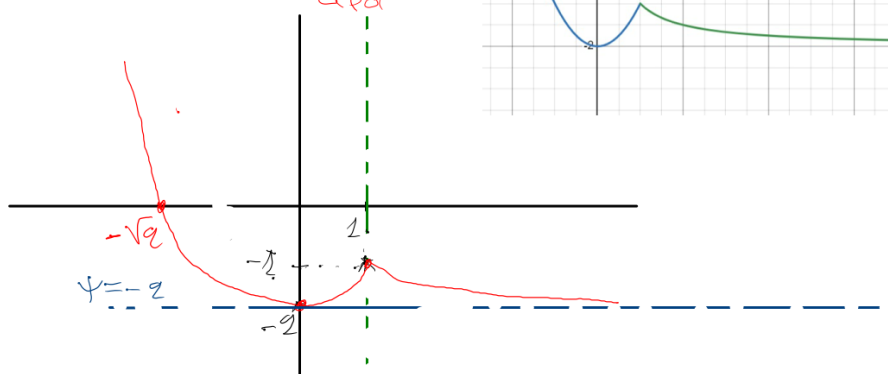
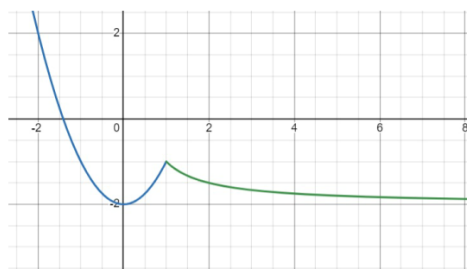
B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f και να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} - 2 & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \text{ αρα } \psi = -2 \text{ οριζόντια ασύμπτοτη}$$

$$f(x) = 0 \stackrel{x \leq 1}{\Leftrightarrow} x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$$

$f(x) \neq 0$ για $x > 1$, f συνεχής



B4

B4. Να λυθεί η εξίσωση : $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του λ , γραφικά ή με οποιαδήποτε άλλο τρόπο.

Από την γραφική παράσταση έχω ότι:

- για $\lambda < -2$ η εξίσωση είναι αδύνατη
- για $\lambda = -2$,, έχει μία λύση
- για $-2 < \lambda < -1$,, ,, 3 λύσεις
- για $\lambda = -1$,, ,, 2 λύσεις
- για $\lambda > -1$,, ,, 1 λύση

Λύση: Γ₁) Θα δείξω ότι η εχίστη $f(x) = x$

έχει ένα το-λάχιον είδα στο $[0,1]$

Παρακαλ: έστω $g(x) = f(x) - x$

$$g(0) = f(0) = 1$$

$$g(1) = f(1) - 1 = -1$$

για το-λάχιον είδα στο $(0,1)$

$\Rightarrow$ από Θ. Bolzano η $f(x) = x$ έχει

Γ₂) για την $f(x)$ εφαρμόζω Θ.Μ.Τ στο $[0,1]$

$$\exists \xi \in (0,1) : f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Rightarrow f'(\xi) = \frac{0 - 1}{1} = -1$$

από $f'(\xi) = -1$ με $\xi \in (0,1)$

όπως $f''(x) > 0$ από $f'(x) \uparrow$ από $f'(x) \text{ "1-1"}$ από το ξ

είναι μονότονα γιναι αν $\exists \xi_a \in (0,1) : f'(\xi_a) = -1 = f'(\xi) \Rightarrow$

$\xi_a = \xi$ άρα-όχι

Από $f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup$ στο $[0,2]$ από η εφαρμόζω

βρίσκουμε πιο κάτω από την C_f από $f(x) \geq -x + f(\xi) + \xi$

γιατί η εφαρμόζω στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι η

$$\psi - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Rightarrow \psi = -x + \xi + f(\xi) \text{ γιατί } f'(\xi) = -1$$

Γ₃) Εφαρμόζω το Θ.Μ.Τ στα $[0, x], [x, 1]$
 με $x \in (0, 1)$ έχω ότι $\exists \xi_1 \in (0, x)$ και $\xi_2 \in (x, 1)$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(x)}{1-x}$$

$$\text{Εντάσσω } f'(\xi_1) = \frac{f(x)-1}{x}, \quad f'(\xi_2) = \frac{-f(x)}{1-x} = \frac{f(x)}{x-1}$$

οπότε $f'(x) \uparrow$ στα $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow$

$$\frac{f(x)-1}{x} < \frac{f(x)}{x-1} \xrightarrow[x-1 < 0]{x > 0} (x-1) \cdot (f(x)-1) > x f(x) \Leftrightarrow$$

$$x f(x) - x - f(x) + 1 > x f(x) \Rightarrow f(x) < 1-x \quad \forall x \in (0, 1]$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{για } x=0 \quad f(0) = 1-0=1 \\ \text{για } x=1 \quad f(1) = 1-1=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Αρα ισχύει η} \\ \text{συνθήκη στα άκρα} \\ f(x) = 1-x \end{array}$$

αρα τελικά $f(x) \leq 1-x \quad \forall x \in [0, 1]$.

Γ₄) Ισχύει από τα προηγούμενα θεωρήματα:
 $-x + f(\xi) + \xi \leq f(x) \leq -x + 1$ στο πεδίο " $=$ " ισχύει μόνο
 στο σημείο επαφής, άρα το $\xi =$ για $x=0$ ή $x=1$

$$\text{αρα έχω: } \int_0^1 (-x + f(\xi) + \xi) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 (-x + 1) dx =$$

$$\left[-\frac{x^2}{2} + f(\xi) \cdot x + \xi \cdot x \right]_0^1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 \Rightarrow$$

$$f(\xi) + \xi - \frac{1}{2} < \int_0^1 f(x) dx < -\frac{1}{2} + 1 \Rightarrow$$

$$f(\xi) + \xi - \frac{1}{2} < \int_0^1 f(x) dx < \frac{1}{2}$$

(Δ1)

α)

14. (παράλλαγή του Δ θέματος 2022)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 - \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) \cdot e^x$ όπου $\kappa = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^3 x}{x \cdot \eta\mu 2x}$

Δ1. α) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < -1$ και $x_2 > 1$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^3 x}{x \cdot \eta\mu 2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x + \sin^2 x)}{x \cdot \eta\mu 2x} \stackrel{\text{πλινω-νάρω}}{=} \frac{(1 + \sin x)}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)(1 + \sin^2 x)}{x \eta\mu 2x \cdot (1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x (1 + \sin x + \sin^2 x)}{x \cdot \eta\mu 2x \cdot 2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \cdot \frac{(1 + \sin x + \sin^2 x)}{2x} = \frac{3}{2} = \kappa$$

Άρα η $f(x)$ γίνεται $f(x) = x + 2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot e^x \Rightarrow$

$$f(x) = x + 2 - e^x$$

$$f(x) = x + 2 - e^x$$

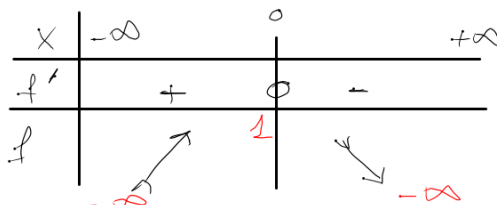
$$f'(x) = 1 - e^x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow 1 > e^x \Leftrightarrow x < 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dots \quad x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2 - e^x) = -\infty + 2 - 0 = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2 - e^x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right) = (+\infty) \cdot (1 + 0 - \infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\text{D.L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$$f(0) = 1$$

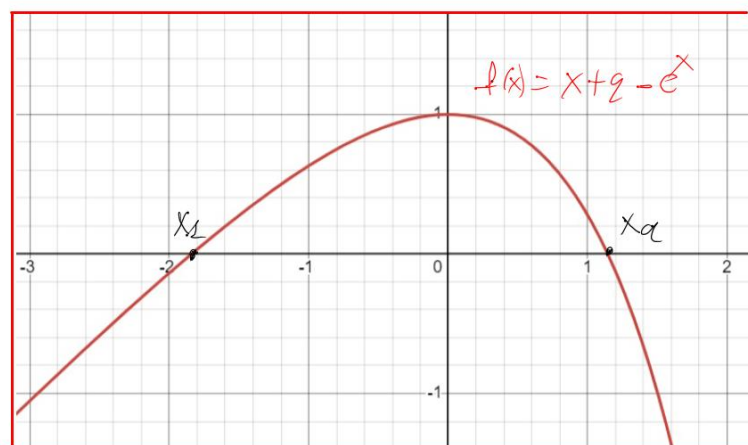
$$f(1) = 3 - e > 0$$

$$f(-1) = -1 + 2 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} > 0 \text{ γιατί } 1 > \frac{1}{e} \Leftrightarrow e > 1 \text{ ισχύει}$$

Άρα $f((-\infty, -1]) = (-\infty, 1 - \frac{1}{e}]$ και το 0 ανήκει στο $f((-\infty, -1])$ οπότε f έχει ρίζα x_1 στο $(-\infty, -1]$

ομοίως $f([1, +\infty)) = (-\infty, 3 - e]$ και το 0 ανήκει στο $f([1, +\infty))$ οπότε f έχει ρίζα x_2 στο $[1, +\infty)$

(b) $f(x) = x + 2 - e^x$, $f'(x) = 1 - e^x$, $f''(x) = -e^x < 0$
 άρα f $\cap$ κοίτη
 οι ρίζες στο (a) ερωτήματα είναι να μοναδικής
 λόγω μονοτονίας

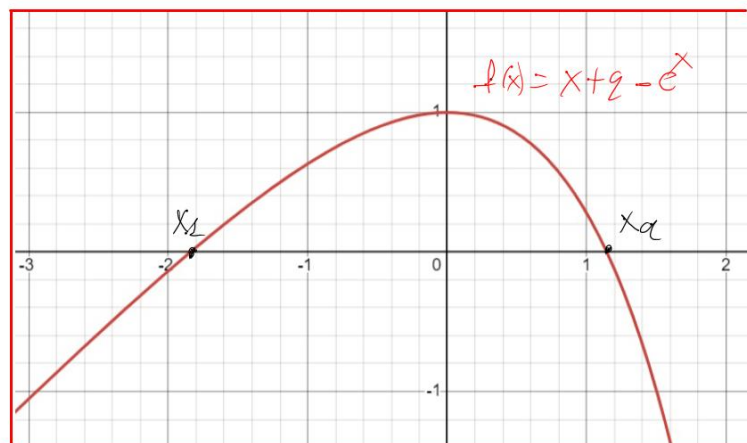


(Δ9)

Δ2. Αν E το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x' , τότε να δείξε-
 τε ότι $E = \frac{(x_2 - x_1) \cdot (x_1 + x_2 + 2)}{2}$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x + 2 - e^x \quad \text{η} \quad f(x) = 0 \quad \text{έχει δύο ρίζες } x_1, x_2 \\
 \text{Άρα } f &\text{ συνεχώς διατηρεί πρόσημο μεταξύ των} \\
 \text{ρίζων } f(0) &= 2 > 0 \quad \text{να } x_1 < 0 < x_2 \quad \text{άρα } f(x) > 0 \text{ στο} \\
 (x_1, x_2) \\
 E &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (x + 2 - e^x) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - e^x \right]_{x_1}^{x_2} = \\
 &= \frac{x_2^2}{2} + 2x_2 - e^{x_2} - \frac{x_1^2}{2} - 2x_1 + e^{x_1} \quad \frac{f(x_1) = f(x_2) = 0}{x_1 + 2 = e^{x_1}, x_2 + 2 = e^{x_2}} \\
 &= \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + 2x_2 - x_2 - 2 - 2x_1 + x_1 + 2 = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2} + x_2 - x_1 \Rightarrow \\
 E &= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2)}{2}
 \end{aligned}$$

(b) $f(x) = x+2-e^x$, $f'(x) = 1-e^x$, $f''(x) = -e^x < 0$
 αφού $f \wedge$ κοίτη
 οι ρίζες στο (a) εξισώθηκαν είναι να μοναδικής
 λόγω μονοτονίας



(Δ3) αρα $x_1 < -2 - x_1 < x_2$

Δ3. Να δείξετε ότι $f(-2-x_1) > 0$

• $x_1 < -2 - x_1 \Leftrightarrow 2x_1 < -2 \Leftrightarrow x_1 < -1$ ισχύει.
 • $-2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2 > 0$ ισχύει γιατί από το (Δ2)
 έχω ότι $E > 0 \Rightarrow \frac{(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 + 2)}{2} > 0 \xrightarrow{x_2 - x_1 > 0} x_1 + x_2 + 2 > 0$
 Αρα από το πρόσηφο του f ισχύει ότι $f(-2-x_1) > 0$

Δ4 $f(x) = x + 9 - e^x$

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $2f(x) = 1 + f'(x_2) \cdot (x - x_2)$ έχει λύση.

2 $f(x) = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow f(x) + f(x) = f(0) + f'(x_2)(x - x_2)$
 όπως στο κωδέν η f παρουσιάζει το γινόμενο $f(0) = 1$ από
 $f(x) \leq f(0) \Rightarrow f(x) \leq 1$ το " $=$ " για $x = 0$ (1)

Επίσης $f \cup$ από η εφαπτομένη στην θέση x_2 είναι
 πιο πάνω από την f , η εφαπτομένη έχει
 εξίσωση $\psi - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \xrightarrow{f(x_2)=0} \psi = f'(x_2)(x - x_2)$
 από $f(x) \leq f'(x_2)(x - x_2)$ το " $=$ " για $x = x_2$ (2)

Από (1), (2)
 (+) αν και οι δύο σχέσεις πάρουν " $=$ "
 αυτό όπως γίνεται για διαφορετικά x από
 τα ίδια η εξίσωση μακριά δεν έχει λύση.