ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, για κάποιο $c\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$$G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x), \text{ για κάθε } x\in\Delta.$$

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε

$$G'(x)=F'(x), \text{ για κάθε } x\in\Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x)=F(x)+c, \text{ για κάθε } x\in\Delta. \blacksquare$$

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

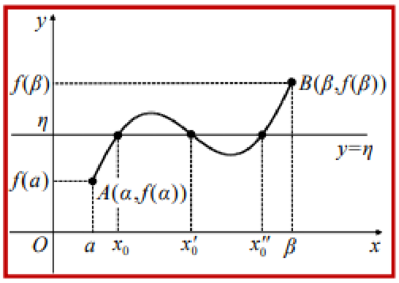
Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η *f* είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$ **(έχει απόδειξη)**



Α3. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της *f*.

Α4 Σ-Σ-Λ-Λ-Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3+\alpha x^2+9x-3$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$. Δίνεται ακόμα ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=1$.

Β1. Να βρείτε την τιμή του α.

Μονάδες 5

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=1$ από Θ. Fermat έχω: $f'(1)=0 \iff 3x^2+2\alpha x+9\big|_{x=1}=0 \iff 3+2\alpha+9=0 \iff 2\alpha=-12 \iff \alpha=-6$

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

Μονάδες 10

για $\alpha=-6$ ισχύει: $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)$

$f(0)=-3$, $f(1)=1-6+9-3=1>0$

$f(2)=8-6\cdot4+9\cdot2-3=8-24+18-3=-1<0$

$f(3)=3^3-6\cdot9+27-3=27-54+27-3=-3<0$

$f(4)=4^3-6\cdot16+36-3=64-96+36-3=100-99=1>0$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

Άρα από Θ.Β έχω τρεις τουλάχιστον ρίζες στα $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,4)$

οι ρίζες είναι μοναδικές γιατί $f(x)$ 3ου βαθμού πολυώνυμο συνεχής και με Σ.Τ και μονοτονία.

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

B3) $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$

$f'(x)=3x^2-12x+9$, $f''(x)=6x-12 \Rightarrow$

$f''(x)=6(x-2)$

$f(2)=8-24+18-3=-27+26=-1$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		−		+	
f		∩	Σκ	∪	

Σ.κ: $(2, f(2))=(2,-1)$

B4. Έστω $g(x)=x+f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Αν $\xi\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$, αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

Μονάδες 4

Β4) $g(x) = x + f(x)$

η εφαπτομένη της f στο $A(\cancel{z}, f(z))$ είναι

(ε_1): $\psi - f(z) = f'(z)(x - z)$

η εφαπτομένη της g στο $B(z, g(z))$ είναι

(ε_2): $\psi - g(z) = g'(z)(x - z)$ $\xrightarrow{g(z) = z + f(z)}$ $g'(z) = 1 + f'(z)$

$$\psi - (z + f(z)) = \left(1 + f'(z)\right)(x - z)$$

η (ε_1) για $x=0$ δίνει $\psi = -zf'(z) + f(z)$

η (ε_2) για $x=0$ δίνει $\psi = -z - zf'(z) + z + f(z) \Rightarrow$

$\psi = -zf'(z) + f(z)$

αρα το κοινό σημείο των (ε_1) (ε_2) είναι το

$\Gamma(0, -zf'(z) + f(z))$ το οποίο είναι

πάνω στον $\psi\psi'$ άξονα.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x \eta\mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (μονάδες 2) αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_0 (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Γ1) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x ημx = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^2+x} = 0$ $\Rightarrow f$ συνεχής στο $x_0 = 0$

$f(0) = 0$

$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x \cdot ημx}{x} = \lim_{x\to 0^-} e^x \cdot \frac{ημx}{x} = 1 \cdot 1 = 1$

$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = +\infty$

άρα $\nexists f'(0)$.

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

Γ2) $f(x) = \begin{cases} e^{x}\,ημx & x<0 \\ \sqrt{x^2+x} & x \geq 0 \end{cases}$

- κατακόρυφη στο μηδέν δεν έχει γιατί η f είναι συνεχής

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$ άρα στο $+\infty$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{x}ημx \xlongequal[\text{επί φραγμένη}]{\text{μηδενική}} 0$ άρα

$y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x}\cdot ημx}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x}}{x} \cdot ημx \xlongequal[\text{επί φραγ.}]{\text{μηδενική}} 0 = λ$

$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - 0\cdot x\right) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ άρα πλάγια στο $-\infty$ δεν έχει

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1=\lambda$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}=\beta$

άρα η $\psi=x+\frac{1}{2}$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y=x+\frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi\in(-\pi,0)$.

Μονάδες 5

Γ3) Έστω $f(x)=e^x\eta\mu x$, $\psi=x+\frac{1}{2}$

Θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=x+\frac{1}{2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\pi,0)$

$g(x)=e^x\eta\mu x-x-\frac{1}{2}$

• g συνεχής στο $[-\pi,0]$

• $g(-\pi)=\pi-\frac{1}{2}>0$

• $g(0)=-\frac{1}{2}<0$

$\xrightarrow{\Theta.B}$ το Σ

Γ4. Ένα κινητό Μ ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 0$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ, $x'(t)$, να είναι θετικός για κάθε $t \geq 0$. Να εξετάσετε εάν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του Μ να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του Μ.

Μονάδες 7

Γ4) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ $\quad x \geq 0$

το σημείο Μ έχει συντεταγμένες

$M(x(t), y(t))$

$$y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$$

$$y'(t) = \frac{(2x(t)+1) \cdot x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}}$$

Πρέπει $y'(t) = x'(t) \iff$

$$\frac{(2x(t)+1)\, x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} = x'(t) \Rightarrow$$

$$2x(t)+1 = 2\sqrt{x^2(t)+x(t)} \xLeftrightarrow{x(t)\geq 0}$$

$$4\cancel{x^2(t)} + 1 + \cancel{4x(t)} = \cancel{4x^2(t)} + \cancel{4x(t)} \iff$$

$1 = 0$ αδύνατη

άρα <u>δεν</u> υπάρχει τέτοια χρονική στιγμή t_0

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και μια παράγουσα, F, της f στο $(0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει ότι:

$$xf(x)=2F(x)\ln x \text{ , για κάθε } x>0.$$

Δίνεται ακόμα ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y=2x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{F(x)}{x^{\ln x}}$, $x>0$, είναι σταθερή.

Μονάδες 6

Δ1) ισχύει $xf(x)=2F(x)\ln x$ για $\forall x>0$

για $x=1$ έχω: $f(1)=2F(1)\ln 1 \Rightarrow \boxed{f(1)=0}$

και $\boxed{f'(1)=2}$

$g(x)=\dfrac{F(x)}{x^{\ln x}}=\dfrac{F(x)}{e^{\ln^2 x}}$, $x>0$

$g'(x)=\dfrac{f(x)\cdot x^{\ln x}-F(x)\left(e^{\ln^2 x}\right)'}{\left(x^{\ln x}\right)^2}=\dfrac{f(x)\cdot x^{\ln x}-F(x)\cdot x^{\ln x}\cdot\dfrac{2\ln x}{x}}{\left(x^{\ln x}\right)^2}=$

αρχική σχέση

$\dfrac{f(x)-\dfrac{F(x)\cdot 2\ln x}{x}}{\left(x^{\ln x}\right)^2}=\dfrac{f(x)-\dfrac{xf(x)}{x}}{\left(x^{\ln x}\right)^2}=0$

άρα $g(x)=C.$

Δ2. **i)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}$. (μονάδες 4)

ii) Να αποδείξετε ότι $F(1)=1$ (μονάδες 3) και $F(x)=x^{\ln x}$, για κάθε $x>0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 9

Δ2)

i) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x} \overset{f(1)=0}{=\!=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}} =$

$\frac{\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}}{\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}} \xrightarrow{D.L'H} = \frac{f'(1)}{1} = 2$

ii) ισχύει $x\cdot f(x)=2F(x)\cdot \ln x \xrightarrow[x>0]{\text{παραγωγ.}} f(x)+x\cdot f'(x)=2f(x)\cdot\ln x+2\frac{F(x)}{x}$

για $x=1$ έχω $f(1)+f'(1)=2F(1) \xrightarrow[f'(1)=2]{f(1)=0} F(1)=1$

έχουμε δείξει ότι $g(x)=c \Rightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}}=c \Rightarrow F(x)=x^{\ln x}\cdot c$

για $x=1$ έχω: $F(1)=1^0\cdot c \Rightarrow c=1$ άρα $\boxed{F(x)=x^{\ln x}}$

Δ3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση F (μονάδες 2) και να λύσετε την εξίσωση $F(x^2)=F(x)-(x-1)^2$ στο διάστημα $(0,+\infty)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 5

$$F'(x) = f(x) = \frac{2F(x)\cdot \ln x}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
F'		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$	

Προφανής λύση $x=1$

για $x>1 \Rightarrow x^2>x \xRightarrow{F\nearrow} F(x^2)>F(x) \Rightarrow F(x^2) > F(x)-(x-1)^2$

για $0<x<1 \Rightarrow x^2<x \xRightarrow{F\searrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2)>F(x)-(x-1)^2$

$\Rightarrow$ η λύση είναι μοναδική

Δ4. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F, τις ευθείες $x=1$, $x=e$ και τον άξονα $x'x$ ισχύει $E>2e-3$.

Μονάδες 5

$$E = \int_1^e |F(x)|dx \overset{F(x)>0}{=\!=} \int_1^e x^{\ln x}dx = \int_1^e e^{\ln^2 x}dx$$

όμως $e^x \geq x+1 \xRightarrow{x:\ln^2 x} e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x+1 \xRightarrow[\text{για } x=1]{\text{το "=" μόνο}} E > \int_1^e (\ln^2 x+1)dx$

όμως $\int_1^e (\ln^2 x+1)dx = \int_1^e \ln^2 x\,dx + \int_1^e 1dx = \int_1^e x' \ln^2 x\,dx + x\Big|_1^e =$

$x\ln^2 x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{2\ln x}{x}dx + x\Big|_1^e = \left[x\ln^2 x + x\right]_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx =$

$\left[x\ln^2 x + x\right]_1^e - 2\left[x\ln x - x\right]_1^e = \left[x\ln^2 x - 2x\ln x + 3x\right]_1^e = e - 2e + 3e - 3 = 2e-3$

Άρα $E > 2e-3$