ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$ Θεωρια σελ 111

Μονάδες 6

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της; Θεωρια σελ 104

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

Μονάδες 5

Θεωρια σελ 128

A4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$. Λ

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. Λ

γ) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Λ

δ) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια «ένα προς ένα» (“1-1”) συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. Σ

ε) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες. Σ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\dfrac{4-e^{2x}}{e^{x}}$ και η συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\ln x$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$.

Μονάδες 5

Λύση: $A_g=\mathbb{R}$, $A_h=(0,+\infty)$

Για το Π. ορισμού της $f(x)$ πρέπει: $x\in A_h$ και $h(x)\in A_g$

δηλαδή $x>0$ και $\ln x\in\mathbb{R}$ που ισχύει άρα $A_f=(0,+\infty)$

Εύρεση τύπου:

$$f(x)=g(h(x))=\frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\frac{4-e^{\ln x^2}}{x}=\boxed{\frac{4-x^2}{x}=f(x),\ x>0}$$

Έστω $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x}$, $x>0$.

B2. **i)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2}>\dfrac{\pi}{e}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Λύση:

i) $f'(x)=\dfrac{-2x\cdot x-(4-x^2)}{x^2}=\dfrac{-2x^2-4+x^2}{x^2}=\dfrac{-4-x^2}{x^2}<0$

για $x>0$ άρα $f\downarrow$ στο $(0,+\infty)$

ii) $\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2}>\dfrac{\pi}{e} \overset{4-e^2<0}{\underset{\pi>0}{\Longleftrightarrow}} \dfrac{4-\pi^2}{\pi}<\dfrac{4-e^2}{e} \Leftrightarrow$

$f(\pi)<f(e) \overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow} \pi>e$ που ισχύει.

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Λύση:

$$f(x)=\frac{4-x^2}{x}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{4-x^2}{x} \overset{\frac{4}{0^+}}{=} +\infty$ άρα $\boxed{x=0}$ κατακόρυφη ασυμπτ.

- $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{4-x^2}{x^2}=-1$

- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+\frac{x^2}{x}\right)=$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{4}{x}=0$ Άρα η ευθεία $\boxed{y=-x}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη.

B4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{συν(1+x^2)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

Λύση:

$$\frac{συν(1+x^2)}{f(x)} = \frac{x\cdot συν(1+x^2)}{4-x^2}$$

ισχύει:

$$\left|\frac{x\cdot συν(1+x^2)}{4-x^2}\right| \le \left|\frac{x}{4-x^2}\right| \Rightarrow$$

$$-\left|\frac{x}{4-x^2}\right| \to 0 \le \frac{x\cdot συν(1+x^2)}{4-x^2} \le \left|\frac{x}{4-x^2}\right| \to 0$$

γιατί

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{-x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3\,, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}+\alpha\,, & x\geq 1 \end{cases},$$

όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 x\,f(x)\,dx=1.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$.

Μονάδες 4

Λύση:

Ισχύει:

$$\int_2^3 x\cdot f(x)\,dx=1 \Leftrightarrow \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+a\right)dx=1 \Leftrightarrow$$

$$\int_2^3 (1+ax)\,dx=1 \Leftrightarrow \left[x+\frac{ax^2}{2}\right]_2^3=1 \Leftrightarrow 3+\frac{a\cdot 9}{2}-2-\frac{a\cdot 4}{2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{9a}{2}-2a=0 \Leftrightarrow 9a-4a=0 \Leftrightarrow 5a=0 \Leftrightarrow \boxed{a=0}$$

Γ2. i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x'x (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Λύση: i) Θα βρούμε το $f'(1)$. όπου $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}, & x\geq 1 \end{cases}$

• f συνεχής στο 1 γιατί $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1$

• $f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-3x+3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} =$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}} = -1$

• $f'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\frac{1-x}{x}}{x-1} =$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(1-x)}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-1}{x} = -1$ Άρα $\boxed{f'(1) = -1}$

ii) $(\varepsilon): \ y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = -(x-1)+1 \Leftrightarrow \boxed{y = -x+2}$

Άρα $\varepsilon\varphi\hat{\omega} = -1 \Leftrightarrow \boxed{\hat{\omega} = 135^\circ}$

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» (“1-1”) (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Λύση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-3x-3, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & x<1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & x>1 \end{cases}$$ και αφού $f'(1)=-1$ έχω $$f'(x) = \begin{cases} 2x-3, & x<1 \\ -\dfrac{1}{x^2}, & x \geq 1 \end{cases}$$

- για $x<1 \Rightarrow 2x<2 \Rightarrow 2x-3<2-3 \Rightarrow 2x-3<-1<0$
- για $x \geq 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{x^2}<0$

Άρα $f \downarrow$ στο $(-\infty, 1]$ και $f \downarrow$ στο $[1,+\infty)$ όμως f συνεχής στο 1 άρα $f \downarrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα $\boxed{\text{“1-1”}}$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}(x^2-3x-3) = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0 \end{aligned}\right\} \overset{f\downarrow}{\Longrightarrow} \boxed{f(A) = (0,+\infty)}$$

Γ4. Έστω $(\varepsilon): y = -x + 2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x \geq 1$, την ευθεία (ε), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

Μονάδες 7

Λύση:

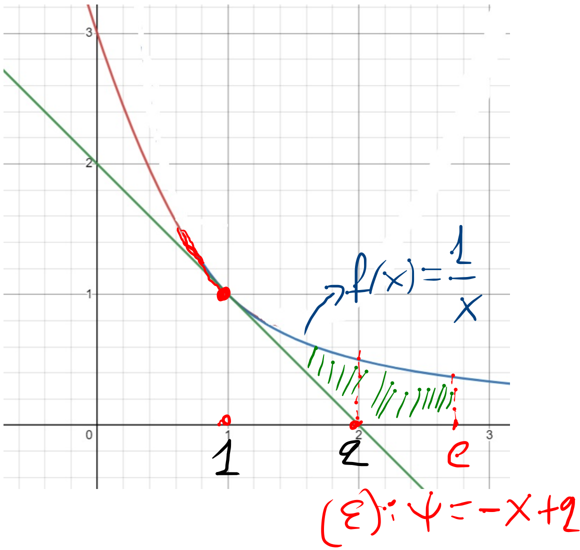
$$E = \int_1^2 \left(f(x) - (-x+2)\right)dx + \int_2^e f(x)\,dx =$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2\right)dx + \int_2^e \frac{1}{x}\,dx =$$

$$\left[\ln x + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 + \left[\ln x\right]_2^e =$$

$$\cancel{\ln 2} + \frac{2^2}{2} - 2\cdot 2 - \cancel{\ln 1} - \frac{1}{2} + 2 + \ln e - \cancel{\ln 2} =$$

$$2 - 4 - \frac{1}{2} + 2 + 1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa,\ \text{όπου}\ \kappa\in\mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\ell\in\mathbb{R}..$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=3$.

Μονάδες 4

Λύση:

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1} \Rightarrow f(x)=g(x)(x-1)+2x$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left[g(x)(x-1)+2x\right]\overset{\ell\cdot 0+2}{=\!=\!=}2$$

όμως f συνεχής στο 1 άρα $f(1)=2 \iff \ln(2-1)-\dfrac{1}{1}+\kappa=2 \iff$

$\kappa=2+1 \iff \boxed{\kappa=3}$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1<1<x_2$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1<\frac{1}{3}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Λύση:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \quad x \in (0,2).$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2+2-x}{x^2(2-x)} = \frac{-x^2-x+2}{x^2(2-x)} = \frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$
- $f(1) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$

x	0	x_1	$\frac{1}{3}$	1	x_2	2
x^2+x-2			$-$	0	$+$	
$x-2$			$-$		$-$	0
f'			$+$		$-$	
f	$-\infty$		$\nearrow$	$2 \quad 2$	$\searrow$	$-\infty$

Άρα $f((0,1]) = (-\infty,2]$ και $f([1,2)) = (-\infty,2]$ και επειδή το μηδέν ανήκει στο πεδίο τιμών 2 φορές και f συνεχής στο $(0,2)$ η $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες τις x_1, x_2 γιατί f γνησίως μονότονη στα υποδιαστήματα αυτά.

Επίσης: $f(1/3) = \ldots \ln\frac{5}{3} > 0 \xrightarrow{f(x_1)=0} f(\frac{1}{3}) > f(x_1) \xrightarrow[(0,1]]{f \nearrow} \boxed{\frac{1}{3} > x_1}$

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με

$$\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Μονάδες 6

Λύση:

Αρκεί να δείξω ότι $\exists$ μοναδικό $\xi \in (0,1)$: $f'(\xi) = \dfrac{3 f(1/3)}{1-3x_1}$

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0 \text{ για } x \in (0,1)$$

άρα f' ↓ στο $(0,1)$

- $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$
- $f(1) = 0$ άρα το Σ. τιμών της $f'(x)$ στο $(0,1)$ είναι το $(0,+\infty)$

Επίσης: $\dfrac{3\cdot f(1/3)}{1-3x_1} = \dfrac{3\cdot \ln 5/3}{1-3x_1} > 0$ γιατί $\ln 5/3 > 0$ και $x_1 < \frac{1}{3}$

Άρα ο αριθμός αυτός ανήκει στο Σ. Τιμών της (συνεχούς) f' άρα $\exists\ \xi \in (0,1)$: $f'(\xi) = \dfrac{3 f(1/3)}{1-3x_1}$ και αυτό είναι μοναδικό λόγω μονοτονίας της f'

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα (0,2) με $F(x_1)=G(x_2)=0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2)+G(x_1)=0$

(μονάδες 4)

ii) η εξίσωση

$$x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2).

(μονάδες 5)

Μονάδες 9

Λύση: i)

Ισχύει $F(x)-G(x)=C$

για $x=x_1$ έχω:

$F(x_1)-G(x_1)=C \xRightarrow{F(x_1)=0}$

$C=-G(x_1)$ (1)

για $x=x_2$ έχω: $F(x_2)-G(x_2)=C \xRightarrow{G(x_2)=0}$

$C=F(x_2)$ (2) Από (1) (2) $\Rightarrow$ $F(x_2)=-G(x_1) \Rightarrow$

$\boxed{F(x_2)+G(x_1)=0}$

ii) Έστω $g(x)=x_1F(x)+x_2G(x)+2x-x_1-x_2$

$g'(x)=x_1f(x)+x_2f(x)+2=(x_1+x_2)f(x)+2>0$ γιατί $x_1,x_2\in(0,2)$

και $f(x)>0$ για $x\in(x_1,x_2)$ από προηγούμενο ερώτημα

• $g(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)+x_1-x_2=x_2G(x_1)+x_1-x_2<0$

γιατί $G'(x)=f(x)>0$ στο (x_1,x_2) άρα $x_1<x_2 \xRightarrow{G\uparrow} G(x_1)<G(x_2) \Rightarrow$

$G(x_1)<0$ γιατί $(G(x_2)=0)$ και $x_1-x_2<0$

• $g(x_2)=x_1F(x_2)+x_2G(x_2)+x_2-x_1=x_1\cdot F(x_2)+x_2-x_1>0$ γιατί

$F'(x)=f(x)>0$ στο (x_1,x_2) άρα $x_1<x_2 \xRightarrow{F\uparrow} F(x_1)<F(x_2) \Rightarrow 0<F(x_2)$

Άρα από Θ.B έχω το (Σ) και η μοναδικότητα λόγω μονοτονίας της g

Μουρ...