

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ 1

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \Lambda + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \Lambda + \alpha_0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{v-1} x^{v-1}) + \Lambda + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0$$

$$= \alpha_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + \alpha_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \Lambda + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1} x_0^{v-1} + \Lambda + \alpha_0 = P(x_0). \text{ Επομένως,}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

ΘΕΩΡΙΑ 2

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με

$$Q(x_0) \neq 0. \text{ Τότε ισχύει : } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με τις ιδιότητες ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0) \neq 0$

ΘΕΩΡΙΑ 3

Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ είναι συνεχής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Προφανώς γιατί $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

ΘΕΩΡΙΑ 4

Κάθε ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, είναι συνεχής

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι γιατί $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0)$

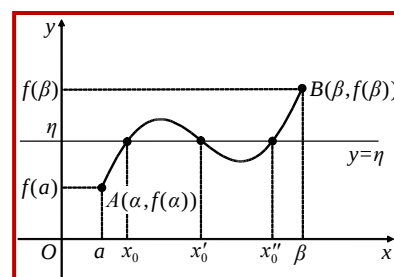
ΘΕΩΡΙΑ 5

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ. (2024, 2020, 2015, 2005)

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι $f(a) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(a) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [a, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

• η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και

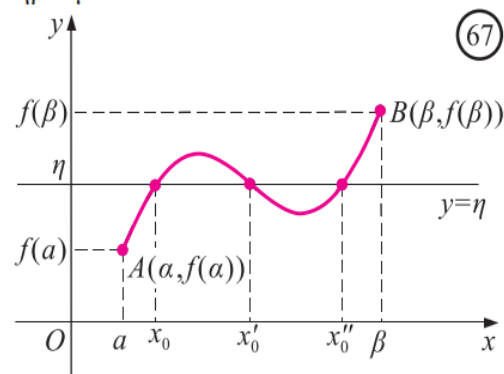
• $g(a)g(\beta) < 0$,

αφού

$$g(a) = f(a) - \eta < 0 \text{ και}$$

$$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■



ΘΕΩΡΙΑ 6

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. (2018, 2003, Επαν.2023, Επαν.2022, Επαν.2013, Επαν.2007)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0),$$

οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 . ■

ΘΕΩΡΙΑ 7

• Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή

$$(c)' = 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

δηλαδή $(c)' = 0$. ■

ΘΕΩΡΙΑ 8

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή

$$(x)' = 1$$

(Επαν.2024, Ομογ.2024)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1,$$

δηλαδή $(x)' = 1$. ■

ΘΕΩΡΙΑ 9

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$, δηλαδή

$$(x^v)' = vx^{v-1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1},$$

δηλαδή $(x^v)' = vx^{v-1}$. ■

ΘΕΩΡΙΑ 10

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(Επαν.2005, Επαν.2009, Ομογ.2020 – Παλαιό)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

$$\text{δηλαδή } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.1 η $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. ■

ΘΕΩΡΙΑ 11

Παράγωγος αθροίσματος

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(2023, Επαν.2020)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0). \quad \blacksquare$$

ΘΕΩΡΙΑ 12

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή

$$(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}} \right)' = \frac{(1)'x^{\nu} - 1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}. \quad \blacksquare$$

ΘΕΩΡΙΑ 13

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή

$$(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

(Ομογ.2016)**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (\varepsilon\phi x)' &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}. \blacksquare \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΙΑ 14

- Η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (1)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

ΘΕΩΡΙΑ 15

- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$, δηλαδή

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha.$$

ΘΕΩΡΙΑ 16

- Η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

(2008)**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Πράγματι:

— αν $x > 0$, τότε $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x < 0$, τότε $\ln |x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

ΘΕΩΡΙΑ 17

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

(Επαν.2021, Επαν.2004, 2014, 2009)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$. ■

ΘΕΩΡΙΑ 18

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

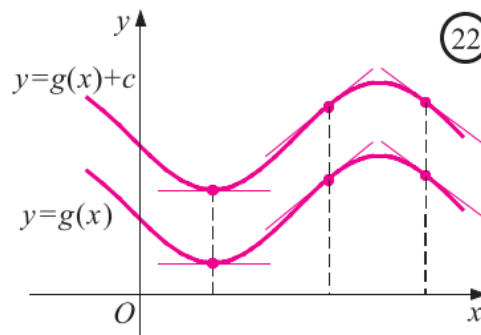
$$f(x) = g(x) + c$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$. ■



ΘΕΩΡΙΑ 19

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

(2021, 2019, 2017, 2012, 2006, Επαν.2023-Ομογ.2023)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

ΘΕΩΡΙΑ 20

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

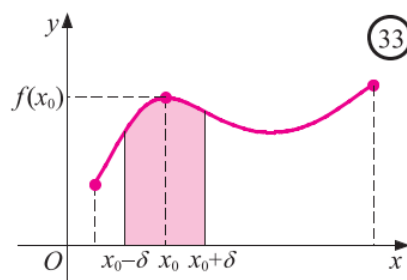
(2011, 2004, Επαν.2016, Επαν.2017-Ομογεν.2017)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \text{ και}$$

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1)$$



Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

ΘΕΩΡΙΑ 21

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

- i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f . (Σχ. 35α)
- ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f . (Σχ. 35β)
- iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) . (Σχ. 35γ).

(Το i) Επαν.2019, Ομογ.2017, Επαν.2012, 2016, Το iii) Επαν.2018, Επαν.2013)

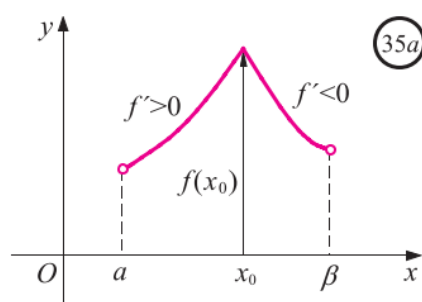
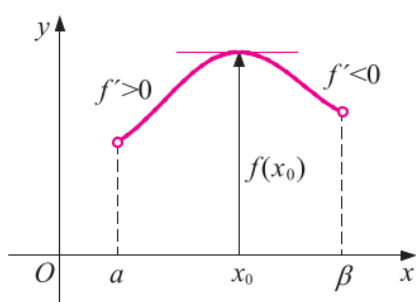
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0]. \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta). \quad (2)$$

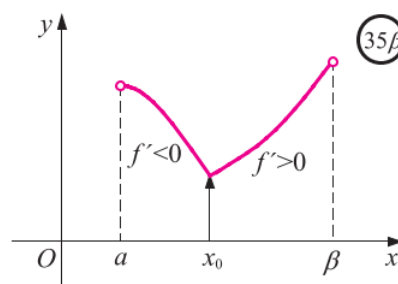
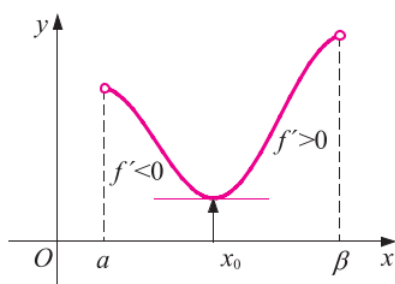


Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta),$$

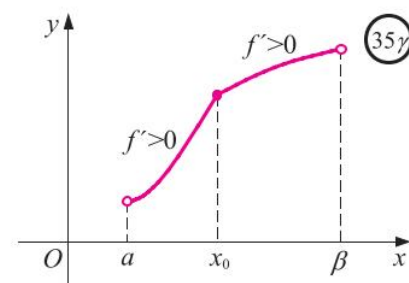
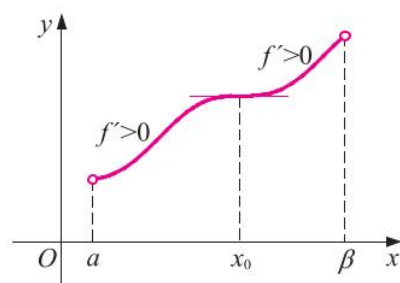
που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.



iii) Έστω ότι

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta).$$



Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

- Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

ΘΕΩΡΙΑ 22**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα $c \in \mathbb{R}$ της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(2022, 2010, Επαν.2015)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta. \blacksquare$$

ΘΕΩΡΙΑ 23

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in \Delta,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ . Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(Γεωμετρική ερμηνεία)

- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει (Σχ. 14) ως εξής:

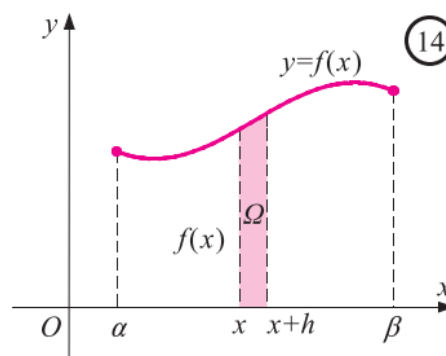
$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_x^{x+h} f(t) dt \\ &= \text{Εμβαδόν του χωρίου } \Omega \\ &\approx f(x) \cdot h, \text{ για μικρά } h > 0. \end{aligned}$$

Άρα, για μικρά $h > 0$ είναι

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x),$$

οπότε

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$



ΘΕΩΡΙΑ 24

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε

$$\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$$

(2013, 2002, Επαν.2008)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c. \quad (1)$$

Από την (1), για $x = a$, έχουμε $G(a) = F(a) + c = \int_a^a f(t) dt + c = c$, οπότε $c = G(a)$. Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(a),$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(a) = \int_a^\beta f(t) dt + G(a)$$

και άρα

$$\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a). \blacksquare$$

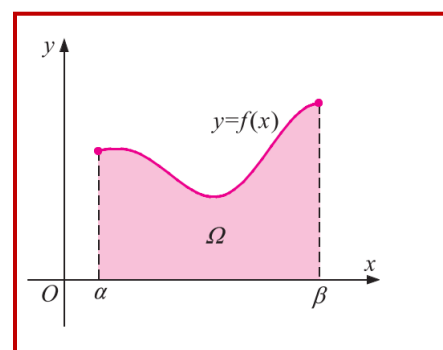
ΘΕΩΡΙΑ 25

Να αναφέρεται το τύπο του εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ και τον άξονα xx' , με $f(x) \geq 0$ και συνεχή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γνωρίζουμε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ και τον άξονα xx' είναι

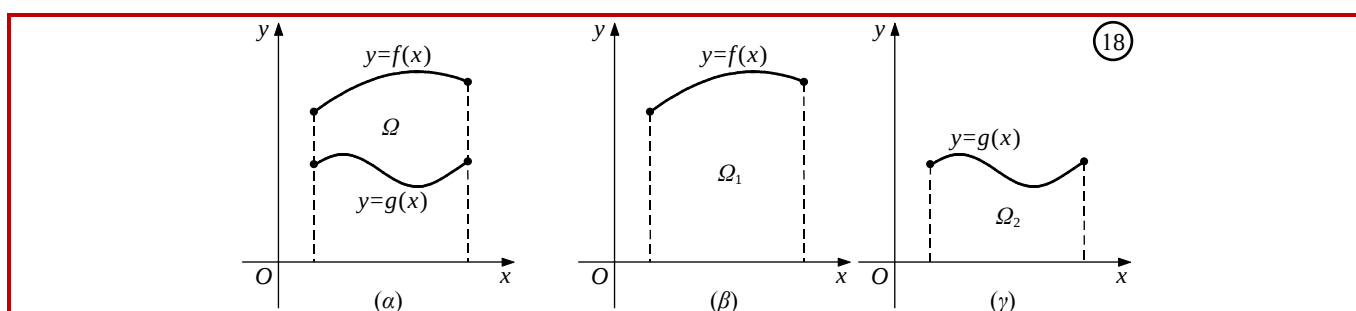
$$E(\Omega) = \int_a^\beta f(x) dx$$

**ΘΕΩΡΙΑ 26**

Να αποδείξετε ότι για δυο συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[a, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ το χωρίο Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι $E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω δυο συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[a, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ (Σχ. 18α).



Παρατηρούμε ότι

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx.$$

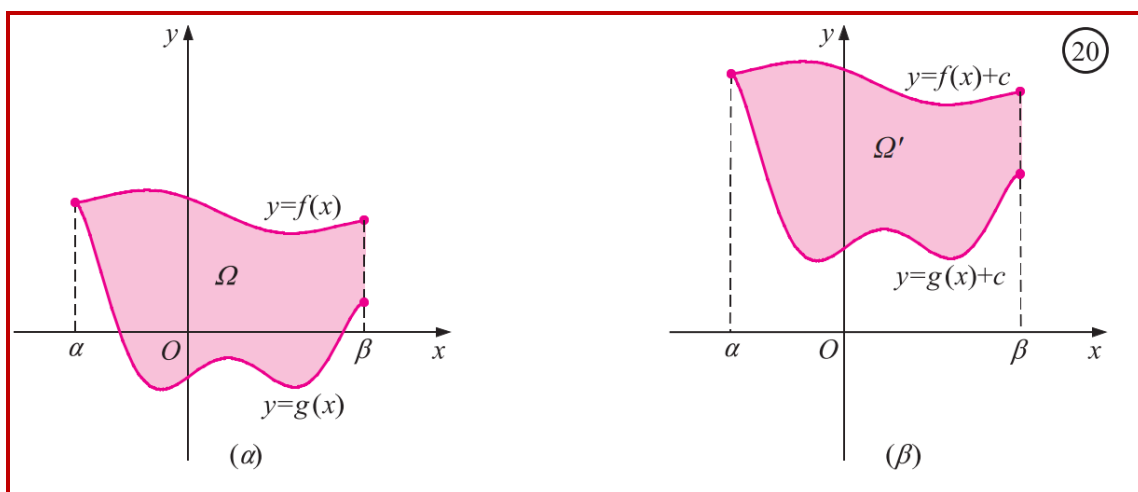
Επομένως, $E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$ (1)

• Ο τύπος (1) βρέθηκε με την προϋπόθεση ότι:

(i) $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και

(ii) οι f, g είναι μη αρνητικές στο $[\alpha, \beta]$.

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι ο τύπος (1) ισχύει και χωρίς την υπόθεση (ii). Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' (Σχ. 20β).



Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε:

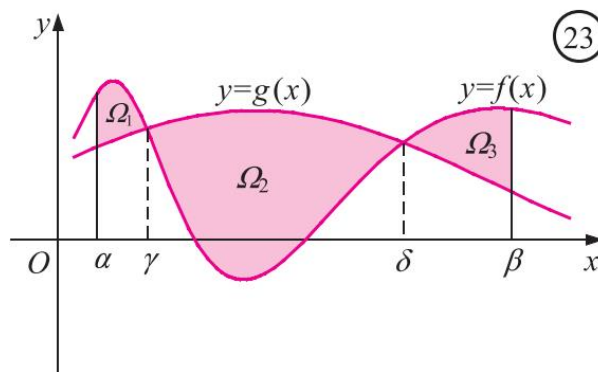
$$E(\Omega) = E(\Omega') = \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x) + c) - (g(x) + c)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx.$$

Άρα,

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$$

ΣΧΟΛΙΟ

• Όταν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, \beta]$, όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 . Δηλαδή,



$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3)$$

$$= \int_a^\gamma (f(x) - g(x))dx + \int_\gamma^\delta (g(x) - f(x))dx + \int_\delta^\beta (f(x) - g(x))dx$$

$$= \int_a^\gamma |f(x) - g(x)| dx + \int_\gamma^\delta |f(x) - g(x)| dx + \int_\delta^\beta |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$$

Επομένως,

$$E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$$

ΘΕΩΡΙΑ 27

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g , με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ δίνεται από τον τύπο :

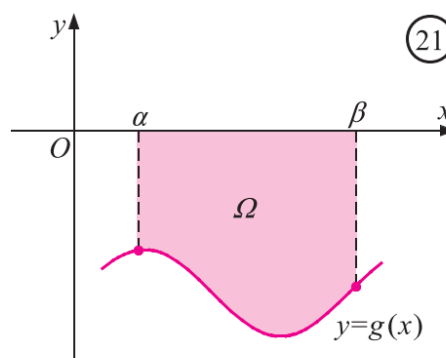
$$E(\Omega) = -\int_a^\beta g(x)dx$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι με τη βοήθεια του προηγούμενου τύπου ($E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))dx$)

• Με τη βοήθεια του προηγούμενου τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g , με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (Σχ. 21). Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [-g(x)] dx = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx. \end{aligned}$$

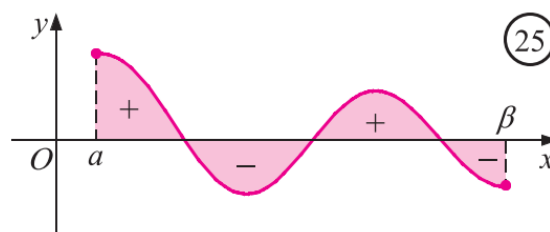


Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε

$$E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ (Σχ. 25)



ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΕΚΤΟΣ ΣΧΟΛΙΚΟΥ

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Αν η f είναι «1-1» τότε και η f^{-1} είναι «1-1»

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\forall x_1, x_2 \in A_{f^{-1}}$ με $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2) \Rightarrow f(f^{-1}(x_1)) = f(f^{-1}(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$. Άρα η αντίστροφη είναι «1-1» και ισχύει: $(f^{-1})^{-1} = f$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2

Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο A . Έστω ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα υπάρχουν ψ_1 και ψ_2 στο $f(A)$ ώστε με $\psi_1 < \psi_2 \Rightarrow f^{-1}(\psi_1) \geq f^{-1}(\psi_2) \xrightarrow{f \uparrow} \psi_1 \geq \psi_2$ άτοπο.

Επομένως η αντίστροφη μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης είναι γνησίως αύξουσα. Ομοίως αποδεικνύεται η πρόταση και για γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3

Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι γνησίως αύξουσα τότε οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$ (1) και $f(x) = x$ (2) και $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες (έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων) Άρα αντί να λύσω την (1) λύνω την (2)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ευθύ:

Έστω x_0 ένας αριθμός έτσι ώστε να είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$ δηλαδή

ισχύει: $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$. Θα δείξουμε ότι ο αριθμός x_0 είναι και ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$ δηλαδή θα ισχύει $f(x_0) = x_0$. Έστω ότι

$$f(x_0) > x_0 \xRightarrow[\text{από υποθεση}]{f(x_0) = f^{-1}(x_0)} f^{-1}(x_0) > x_0 \xrightarrow{f \uparrow} f(f^{-1}(x_0)) > f(x_0) \Rightarrow x_0 > f(x_0) \text{ άτοπο.}$$

Το ίδιο ισχύει αν $f(x_0) < x_0$

Αντίστροφο:

Έστω x_0 ένας αριθμός έτσι ώστε να είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = x$. Δηλαδή ισχύει

$f(x_0) = x_0$. Θα δείξουμε ότι ο αριθμός x_0 είναι και ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$ δηλαδή ότι ισχύει $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$.

Πράγματι: $f(x_0) = x_0 \Rightarrow f^{-1}(f(x_0)) = f^{-1}(x_0) \Rightarrow x_0 = f^{-1}(x_0) \stackrel{f(x_0)=x_0}{\Rightarrow} f(x_0) = f^{-1}(x_0)$

Άλλος τρόπος

Έστω $f(x) = f^{-1}(x)$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3

Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και ένα προς ένα. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη, δηλαδή αν $x_1 < x_2 < x_3$

τότε $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ ή $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$. Έστω ότι αληθεύει η δεύτερη, η f είναι συνεχής στο $[x_2, x_3]$ με $f(x_2) \neq f(x_3)$ (γιατί f «1-1») άρα από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών η f παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των $f(x_2), f(x_3)$ άρα θα παίρνει και την τιμή $f(x_1)$ δηλαδή

$\exists x_0 \in (x_2, x_3): f(x_0) = f(x_1) \stackrel{f^{-1}-1}{\Rightarrow} x_0 = x_1$ άτοπο γιατί $x_1 \notin (x_2, x_3)$ άρα καταλήξαμε σε άτοπο δηλαδή f γνησίως μονότονη. Ομοίως αν είχαμε υποθέσει ότι ίσχυε η πρώτη σχέση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4

Έστω f μια γνησίως μονότονη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ . Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 με $f'(x_0) \neq 0$, και η αντίστροφη f^{-1} , είναι συνεχής στο ψ_0 , τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0) = \psi_0 \in f(\Delta)$ και ισχύει

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = (f^{-1})'(\psi_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\psi_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ισχύει:

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = (f^{-1})'(\psi_0) = \lim_{\psi \rightarrow \psi_0} \frac{f^{-1}(\psi) - f^{-1}(\psi_0)}{\psi - \psi_0} \stackrel{\substack{\text{αν } \psi \rightarrow \psi_0 \\ \text{αφού } f^{-1} \text{ συνεχής στο } \psi_0 \\ \text{άρα } x \rightarrow x_0}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\psi_0))} \quad \text{όπου} \quad \left\langle \begin{array}{l} f(x) = \psi \Leftrightarrow x = f^{-1}(\psi) \\ f(x_0) = \psi_0 \Leftrightarrow x_0 = f^{-1}(\psi_0) \end{array} \right\rangle$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 5

Έστω f παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ , γνησίως μονότονη και $f'(x) \neq 0$. Αν η f^{-1} είναι και αυτή παραγωγίσιμη για κάθε ψ που ανήκει στο $f(\Delta)$ τότε ισχύει:

$$(f^{-1})'(\psi) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\psi))}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) = x &\Rightarrow [f^{-1}(f(x))]' = x' \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \stackrel{f'(x) \neq 0}{\Rightarrow} \\ (f^{-1})'(f(x)) &= \frac{1}{f'(x)} \stackrel{\substack{f(x)=\psi \\ x=f^{-1}(\psi)}}{\Rightarrow} (f^{-1})'(\psi) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\psi))} \end{aligned}$$

Άλλος τρόπος :

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(\psi)) = \psi &\stackrel[\text{ως προς } \psi]{\text{παραγωγίζω}} [f(f^{-1}(\psi))]' = \psi' \Rightarrow (f)'(f^{-1}(\psi)) \cdot (f^{-1})'(\psi) = 1 \stackrel{\substack{f^{-1}(\psi)=x \\ f'(x) \neq 0}}{\Rightarrow} \\ (f^{-1})'(\psi) &= \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(\psi) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\psi))} \end{aligned}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6 (είναι και σε εφαρμογή του σχολικού)

- Για κάθε $x > 0$ να δείξετε ότι $\ln x \leq x - 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Αν $x = 1$, τότε η παραπάνω ισχύει σαν ισότητα.
 - Αν $x > 1$ τότε από Θ.Μ.Τ για την $f(x) = \ln x$ στο $[1, x]$ έχω ότι $\exists \xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε $\frac{\ln x - 0}{x - 1} = \frac{1}{\xi}$.
Όμως $\xi > 1$ άρα $\frac{1}{\xi} < 1$ άρα $\frac{\ln x}{x - 1} < 1 \Rightarrow \ln x < x - 1$
 - Αν $0 < x < 1$ τότε από Θ.Μ.Τ για την $f(x) = \ln x$ στο $[x, 1]$ έχω ότι $\exists \xi \in (x, 1)$ τέτοιο ώστε $\frac{\ln x - 0}{x - 1} = \frac{1}{\xi}$. Όμως $\xi < 1$ άρα $\frac{1}{\xi} > 1$ άρα $\frac{\ln x}{x - 1} > 1 \stackrel{x-1 < 0}{\Rightarrow} \ln x < x - 1$
- Άρα τελικά ισχύει ότι $\ln x \leq x - 1$ για $x > 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ 7

- Για κάθε x πραγματικό αριθμό να δείξετε ότι $e^x \geq x+1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν στη σχέση $\ln x \leq x-1$ θέσουμε $x : e^x$ έχουμε $\ln(e^x) \leq e^x - 1 \Rightarrow x+1 \leq e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Αλλιώς :

- Αν $x=0$, τότε η παραπάνω ισχύει σαν ισότητα.
- Αν $x>0$ τότε από Θ.Μ.Τ για την $f(x) = e^x$ στο $[0,x]$ έχω ότι $\exists \xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε $\frac{e^x - 1}{x} = e^\xi$.

Όμως $0 < \xi < x$ άρα $e^0 < e^\xi < e^x \Rightarrow 1 < e^\xi$ επομένως $\frac{e^x - 1}{x} > 1 \Rightarrow e^x > x+1$

- Αν $x < 0$ τότε από Θ.Μ.Τ για την $f(x) = e^x$ στο $[x,0]$ έχω ότι $\exists \xi \in (x,0)$ τέτοιο ώστε $\frac{e^x - 1}{x} = e^\xi$.

Όμως $x < \xi < 0$ άρα $e^x < e^\xi < e^0 \Rightarrow e^\xi < 1$ επομένως $\frac{e^x - 1}{x} < 1 \Rightarrow e^x > x+1$

Άρα τελικά ισχύει ότι $e^x \geq x+1$ για κάθε x πραγματικό αριθμό x .

ΠΡΟΤΑΣΗ 8 (είναι και σε εφαρμογή του σχολικού)

Αν για την f ισχύει: $f'(x) = \kappa \cdot f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και κ πραγματικός αριθμός τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R} : f(x) = c \cdot e^{\kappa x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned} \text{αν } f(x) \neq 0 \text{ έχω: } \frac{f'(x)}{f(x)} = \kappa &\Rightarrow (\ln(f(x)))' = (\kappa x)' \Rightarrow \ln(f(x)) = \kappa x + c_1 \Rightarrow \\ f(x) &= e^{\kappa x + c_1} \Rightarrow f(x) = c \cdot e^{\kappa x} \end{aligned}$$

Αλλιώς :

$$\begin{aligned} f'(x) = \kappa \cdot f(x) &\Rightarrow f'(x) - \kappa \cdot f(x) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} (e^{-\kappa x} \cdot f(x)) = 0 \Rightarrow \\ e^{-\kappa x} \cdot f'(x) - \kappa e^{-\kappa x} \cdot f(x) &= 0 \Rightarrow \left(e^{-\kappa x} \cdot f(x) \right)' = 0 \Rightarrow \\ e^{-\kappa x} \cdot f(x) = c &\Rightarrow f(x) = c \cdot e^{\kappa x} \end{aligned}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 9

ΧΡΗΣΙΜΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$ και η ισότητα $f'(x) = 0$ ισχύει για πεπερασμένο πλήθος τιμών του x , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο A και όχι απλώς αύξουσα.

Απόδειξη: Έστω $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$. Τότε σύμφωνα με γνωστό προηγούμενο θεώρημα η f είναι αύξουσα στο A δηλ. για κάθε:

$$x_1, x_2 \in A \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η ισότητα δεν ισχύει ποτέ. Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$

με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) = f(x_2) = \kappa$. Όμως η f στο $[x_1, x_2]$ είναι αύξουσα. Άρα

$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \Rightarrow \kappa \leq f(x) \leq \kappa \Rightarrow f(x) = \kappa$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$. Έτσι

$f'(x) = 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ άτοπα, γιατί η ισότητα $f'(x) = 0$ ισχύει μόνο

για πεπερασμένο πλήθος τιμών του x από υπόθεση

ΠΡΟΤΑΣΗ 10

Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε $x_0 \in \Delta$, βρίσκεται κάτω από την C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Δηλαδή: Για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εστω f κυρτή (κοίλα άνω) τότε το C_f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της f

$$(\xi): \psi - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\psi = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Θα δείξω ότι $f(x) \geq \psi$ δηλαδή

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

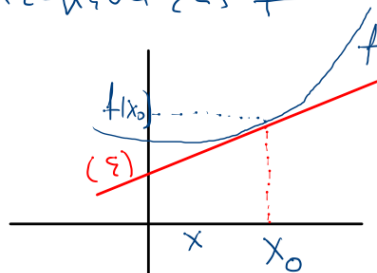
• για $x = x_0$ ισχύει το " $=$ "

• για $x < x_0$ έχω από Θ.Μ.Τ $\exists \xi_1 \in (x, x_0): f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$\text{οπω } \xi_1 < x_0 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(\xi_1) < f'(x_0) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) \xrightarrow{x - x_0 < 0} f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

• για $x > x_0$ ομοίως $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$



Αλλιώς

Θέλω να δείξω ότι $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$\text{Εστω } g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow x > x_0 \text{ γιατί } f' \uparrow$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow x < x_0 \text{ , , , }$$

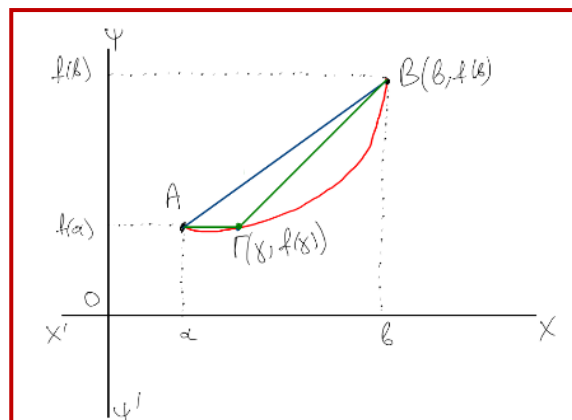
		x_0	
g'	-	+	
g	$\searrow$	$\nearrow$	

$$\text{Άρα } g(x) \geq g(x_0) \Rightarrow g(x) \geq 0 \Rightarrow$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 11

Έστω f , δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση που στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή), στο διάστημα $[a, b]$ και τα σημεία $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, τότε να δείξετε ότι: Μεταξύ των σημείων A, B η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πιο κάτω από την χορδή AB . (Ανάλογη πρόταση ισχύει αν f είναι κοίλη (κοίλα κάτω))



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

2) Θα δείξω ότι C_f είναι πιο κάτω από τη χορδή AB
 $(AB): \psi - f(a) = \lambda_{AB}(x-a) \implies \psi = \lambda_{AB}(x-a) + f(a) \quad \lambda_{AB} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
 $(AB): \psi = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$
 Θα δείξω ότι $f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \quad \forall x \in [a, b]$
 για $x=a, b$ ισχύει το " $=$ " για $x \in (a, b)$ έχω:
 Έστω $g(x) = f(x) - \lambda_{AB}(x-a) - f(a) \quad x \in (a, b)$
 $g'(x) = f'(x) - \lambda_{AB}$
 $g'(x) = 0 \implies f'(x) = \lambda_{AB} \implies f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \xrightarrow{\text{Θ.Μ.Τ}} f'(x) = f'(\xi) \iff \xi \in (a, b) \iff x = \xi$
 $g'(x) > 0 \implies \dots f'(x) > f'(\xi) \xrightarrow{f'' < 0} x > \xi$
 $g'(x) < 0 \implies \dots f'(x) < f'(\xi) \xrightarrow{f'' < 0} x < \xi$
 αφού $a < x < \xi \implies g(a) > g(\xi) \xrightarrow{g(a)=0} g(x) < 0$
 $\xi < x < b \xrightarrow{g(\xi)=0} g(x) < g(b) \xrightarrow{g(b)=0} g(x) < 0$
 άρα $g(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \implies f(x) < \lambda_{AB}(x-a) + f(a)$ Αυτός ο C_f είναι πιο κάτω από τη χορδή AB

ΠΡΟΤΑΣΗ 12

Αν η συνάρτηση f είναι άρτια τότε ισχύει $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

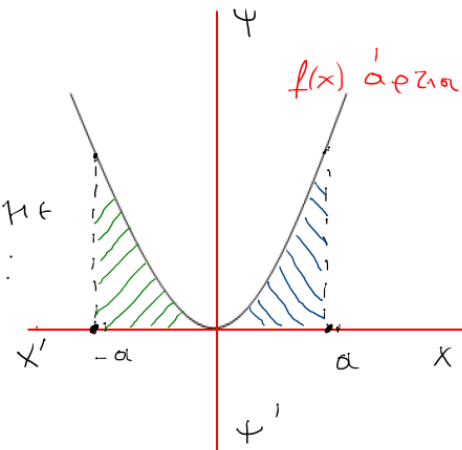
Ισχύει: $\int_{-a}^a f(x)dx =$

$$\int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \quad (1)$$

το πρώτο ολοκλήρωμα με αλληλοαπόσπαση γίνεται:

$$\int_{-a}^0 f(x)dx \quad \boxed{x = -u}$$

$\text{αν } x = -a, u = a$
 $\text{αν } x = 0, u = 0$
 $dx = -du$



$\int_{-a}^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)du \stackrel{f \text{ άρτια}}{=} \int_0^a f(x)dx \quad (2)$

Άρα τελικά $\int_{-a}^a f(x)dx \stackrel{(1),(2)}{=} \boxed{2\int_0^a f(x)dx}$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13

Αν η συνάρτηση f είναι περιττή τότε ισχύει $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

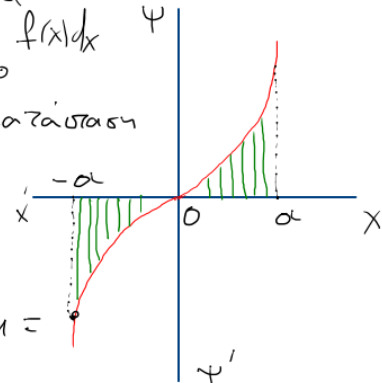
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι: $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

το πρώτο ολοκλήρωμα με αλληλοαπόσπαση γίνεται:

$$\int_{-a}^0 f(x)dx \quad \boxed{x = -u}$$

$\text{αν } x = -a, u = a$
 $\text{αν } x = 0, u = 0$
 $dx = -du$



$\int_{-a}^0 f(-u)(-du) \stackrel{f \text{ περιττή}}{=} \int_0^a f(u)du =$

$-\int_0^a f(x)dx$ Άρα η αρεχική σχέση γίνεται

$$\int_{-a}^a f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 14

Έστω f (συνεχής στο x_0) και παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Προϊγματι: Έστω $f'(x) = \begin{cases} f'_1(x) & \text{για } x < x_0 \\ f'_2(x) & \text{για } x > x_0 \end{cases}$

Θα δείξουμε ότι η $f'(x)$ είναι συνεχής στο x_0

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 άρα ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{\text{D.L'H}} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'_1(x)$$

$$\xrightarrow{\text{D.L'H}} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{\text{D.L'H}} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_2(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_2(x)$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_2(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$$

Άρα η $f'(x)$ είναι συνεχής στο x_0

ΠΡΟΤΑΣΗ 15**Ισχύει και το αντίστροφο**

Δηλαδή: έστω $f: (a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = m$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = m$ (δηλαδή, αν η f' είναι συνεχής στο x_0 τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0)

πράγματι :

$$f'(x_0) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \frac{(\frac{0}{0})}{\text{D.L'H}} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = m \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \frac{(\frac{0}{0})}{\text{D.L'H}} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = m \end{cases}$$

$$\text{Αρα } f'(x_0) = m$$