

1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

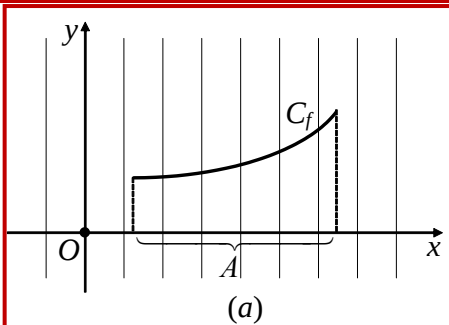
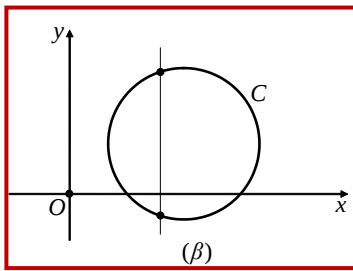
ΕΡΩΤΗΣΗ 1	Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω A ένα υποσύνολο του R . Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό ψ . Το ψ ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

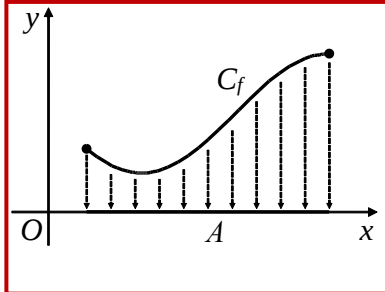
ΕΡΩΤΗΣΗ 2	Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$

ΕΡΩΤΗΣΗ 3	Πότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο B και τι συμβολίζει το $f(B)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Θα λέμε ότι “ Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο B ”, όταν το B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Στην περίπτωση αυτή με $f(B)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των τιμών της f σε κάθε $x \in B$. Είναι δηλαδή: $f(B) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in B\}.$

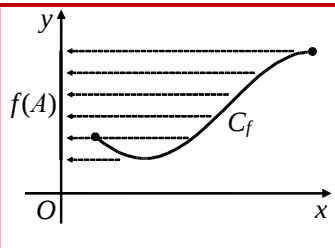
ΕΡΩΤΗΣΗ 4	Τι λέγεται γραφική παράσταση της f και πως συμβολίζεται;
------------------	--

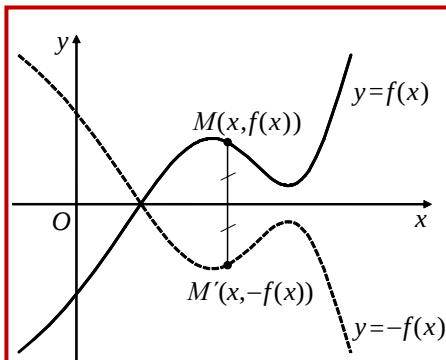
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y=f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x,f(x))$, $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f. Η εξίσωση, λοιπόν, $y=f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η $y=f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.
-----------------	---

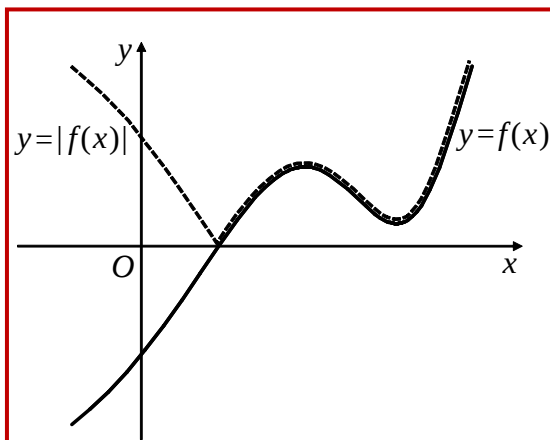
ΕΡΩΤΗΣΗ 5	Ο κύκλος αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο. Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης  (α)  (β)

ΕΡΩΤΗΣΗ 6	Πως βρίσκουμε το πεδίο ορισμού A μιας συνάρτησης όταν γνωρίζουμε τη γραφική της παράσταση;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε: Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f. 

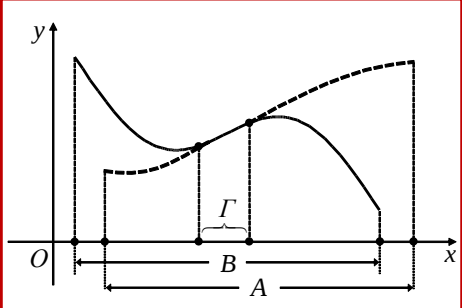
ΕΡΩΤΗΣΗ 7	Πως βρίσκουμε το σύνολο τιμών $f(A)$ μιας συνάρτησης όταν γνωρίζουμε
------------------	--

	τη γραφική της παράσταση;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε: Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 8	Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f , μιας συνάρτησης f πως μπορούμε, να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 9	Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f , μιας συνάρτησης f πως μπορούμε, να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $ f $.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 10	Πότε δυο συναρτήσεις λέγονται ίσες
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν: ➤ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και ➤ για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 11	Μπορούν δυο συναρτήσεις με διαφορετικό πεδίο ορισμού και ίσως διαφορετικό τύπο να είναι ίσες;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B. Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2 + x}{x},$ που έχουν πεδία ορισμού τα σύνολα $A = \mathbb{R} - \{1\}$ και $B = \mathbb{R} - \{0\}$ αντιστοίχως, είναι ίσες στο σύνολο $\Gamma = \mathbb{R} - \{0, 1\}$, αφού για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x) = x + 1$. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 12	Πως ορίζονται η πρόσθεση κι η διαφορά μεταξύ συναρτήσεων ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$ και διαφορά $f - g$, δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$ Το πεδίο ορισμού των $f + g, f - g$ είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως.

ΕΡΩΤΗΣΗ 13	Πως ορίζονται το γινόμενο κι το πηλίκο μεταξύ συναρτήσεων ;
-------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ορίζουμε ως γινόμενο $f \cdot g$ και πηλίκιο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$ Το πεδίο ορισμού της $f \cdot g$ είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον g παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο $\{x x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$.
-----------------	---

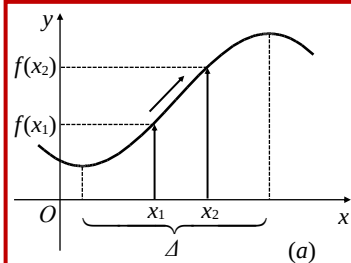
ΕΡΩΤΗΣΗ 14	Τι ονομάζουμε σύνθεση συναρτήσεων της f με τη g;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή το σύνολο $A_1 = \{x \in A f(x) \in B\}$. Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 15	Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες;
-------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι γενικά ισχύει $g \circ f \neq f \circ g$ π.χ: $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$ Ισχύει $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{\ln x}$, για κάθε $x \in [1+\infty)$ και $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \ln \sqrt{x}$, για κάθε $x \in (0+\infty)$. Άρα $g \circ f \neq f \circ g$
-----------------	--

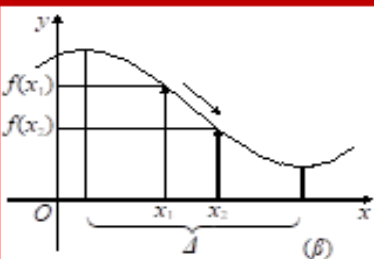
ΕΡΩΤΗΣΗ 16	Με τρεις συναρτήσεις τι γίνεται;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(hog) \circ f$ και ισχύει $ho(g \circ f) = (hog) \circ f$. Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $hog \circ f$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

1.3 MONOTONES ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ -ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΗ 17	Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1 και x_2 στοιχεία του Δ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$ 

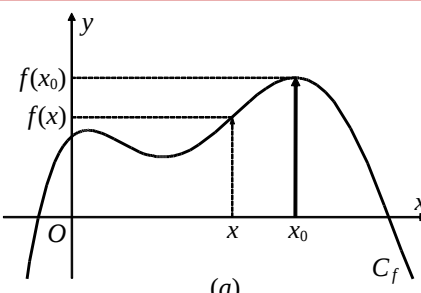
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε για οποιαδήποτε x_1 και x_2 στοιχεία του Δ ισχύει η ισοδυναμία $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
-------------------	---

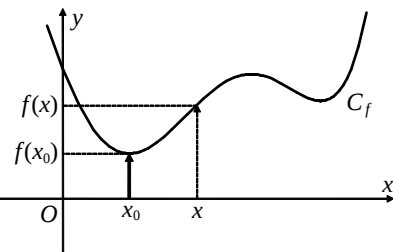
ΕΡΩΤΗΣΗ 18	Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως φθίνουσα;
-------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1 και x_2 στοιχεία του Δ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$	
-----------------	--	--

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε για οποιαδήποτε x_1 και x_2 στοιχεία του Δ ισχύει η ισοδυναμία $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
-------------------	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 19	Πότε μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της Δ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

ΕΡΩΤΗΣΗ 20	Πότε μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο;	
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο όταν: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$	

ΕΡΩΤΗΣΗ 21	Πότε μια συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο όταν: $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$  (β)

ΕΡΩΤΗΣΗ 22	Αν η f είναι γνησίως μονότονη σε ανοιχτό διάστημα (α, β) τότε η f στο διάστημα αυτό έχει ακρότατα;
-------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι
-----------------	-----

ΕΡΩΤΗΣΗ 23	Αν η f είναι γνησίως μονότονη σε κλειστό διάστημα $[a,b]$ τότε η f έχει ακρότατα;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι έχει ακρότατα στα σημεία a, b .

ΕΡΩΤΗΣΗ 24	Πότε μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση « 1-1 »;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1 , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

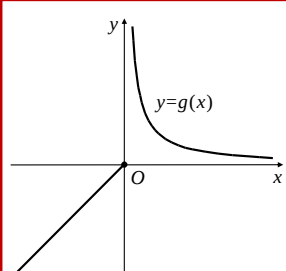
ΕΡΩΤΗΣΗ 25	Να αναφέρεται και άλλο ορισμό για τη συνάρτηση «1-1»
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1 , αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 26	Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν: Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ακριβώς μια λύση ως προς x .

ΕΡΩΤΗΣΗ 27	Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν: Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Την ίδια τεταγμένη

ΕΡΩΤΗΣΗ 28	Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν: κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Σε ένα σημείο .

ΕΡΩΤΗΣΗ 29	Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση "1-1";
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι. Π.χ $f_1(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha \neq 0$,

ΕΡΩΤΗΣΗ 30	Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι «1-1» αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι π.χ. η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$ 

ΕΡΩΤΗΣΗ 31	Πως μπορούμε να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1-1 ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Με τον 1 ^ο ορισμό : ξεκινάμε έστω $x_1 \neq x_2$ και καταλήγουμε στο $f(x_1) \neq f(x_2)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 32	Πως μπορούμε να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1-1 με άλλο τρόπο ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Με τον 2 ^ο ορισμό: Υποθέτουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ και καταλήγουμε στο $x_1 = x_2$, οπότε συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1.

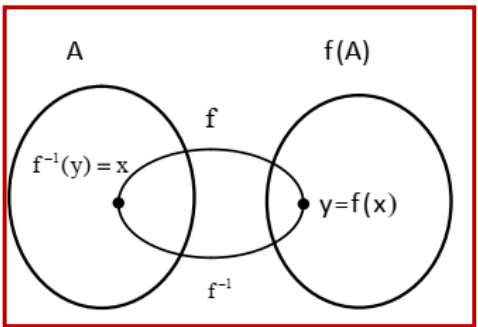
ΕΡΩΤΗΣΗ 33	Άλλος τρόπος υπάρχει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι, Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1.

ΕΡΩΤΗΣΗ 34	Πως καταλαβαίνουμε ότι η συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι "1-1";
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	• Αν υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ για τα οποία ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. • Αν υπάρχει ευθεία παράλληλη στον άξονα xx' η οποία θα τέμνει τη C_f σε δύο τουλάχιστον σημεία. Π.χ: $f(x) = x^2$.

	• Αν η f δεν είναι μονότονη τότε δεν είναι «1-1».
--	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 35	Αν η f είναι «1-1» και $y \in f(A)$ τότε η εξίσωση $y = f(x)$ πόσες λύσεις έχει ως προς x ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έχει μοναδική λύση ως προς x . Γιατί αν είχε έστω 2 λύσεις, τότε δυο πρότυπα θα είχαν ίδια εικόνα άρα όχι «1-1» άτοπο.

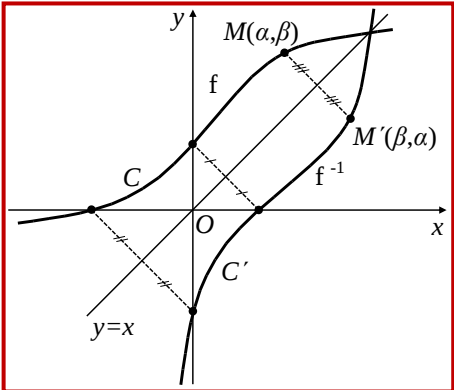
ΕΡΩΤΗΣΗ 36	Αν η f δεν είναι «1-1» τότε μπορεί να είναι μονότονη;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Προφανώς όχι.

ΕΡΩΤΗΣΗ 37	Πως ορίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση της f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathcal{R}$ η οποία είναι «1-1». Ορίζουμε αντίστροφη συνάρτηση της f και τη συμβολίζουμε με, f^{-1} την συνάρτηση με πεδίο ορισμού $f(A)$ (το σύνολο τιμών της f) τέτοια ώστε σε κάθε $y=f(x)$ που ανήκει στο $f(A)$ να αντιστοιχίζεται στο $x \in A$. Δηλαδή $f^{-1}(y) = x$ 

ΕΡΩΤΗΣΗ 38	Ποιες είναι οι βασικές σχέσεις που ισχύουν στην αντίστροφη;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	• $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ • $f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A$ • $f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 39	Ποιο είναι το Πεδίο ορισμού της f^{-1} ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι το Σύνολο Τιμών της f

ΕΡΩΤΗΣΗ 40	Ποιο είναι το Σύνολο Τιμών της f^{-1}
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι το Πεδίο Ορισμού της f

ΕΡΩΤΗΣΗ 41	Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} , τι σχέση έχουν;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. Ισχύει $f(x) = \psi \Leftrightarrow f^{-1}(\psi) = x$ Αν ένα σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, τότε το σημείο $M'(\beta, a)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}. Τα σημεία όμως M και M' είναι συμμετρικά ως προς τη πρώτη διχοτόμο. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 42	Τι κάνουμε για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας συνάρτησης f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1». ➤ Θέτουμε $f(x) = y$ και λύνουμε ως προς x. ➤ Αντικαθιστούμε όπου $x = f^{-1}(y)$ και βρίσκουμε τον τύπο της αντίστροφης. ➤ Τέλος βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

ΕΡΩΤΗΣΗ 43	Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε η f μπορεί να είναι «1-1»;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι, γιατί αν ήταν «1-1» θα ήταν αντιστρέψιμη.

ΕΡΩΤΗΣΗ 44	Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε η f μπορεί να είναι γνησίως μονότονη;
-------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι , γιατί αν ήταν γνησίως μονότονη θα ήταν «1-1» άρα αντιστρέψιμη, άτοπο.
-----------------	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 45	Αν η f είναι «1-1» τότε η f^{-1} τι είναι;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	είναι «1-1» και ισχύει: $(f^{-1})^{-1} = f$ (Αποδ. Σελ: 10 φυλλαδίου θεωρίας)

ΕΡΩΤΗΣΗ 46	Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε αντιστρέφεται;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι , γιατί αν είναι γνησίως μονότονη θα είναι «1-1»

ΕΡΩΤΗΣΗ 47	Αν η f δεν είναι γνησίως μονότονη τότε η f αντιστρέφεται;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν η f δεν είναι γνησίως μονότονη τότε η f δεν σημαίνει ότι δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμη. Π.χ: $f(x) = \begin{cases} x & \text{για } -1 \leq x \leq 0 \\ x+3 & \text{για } -2 < x < -1 \end{cases}$

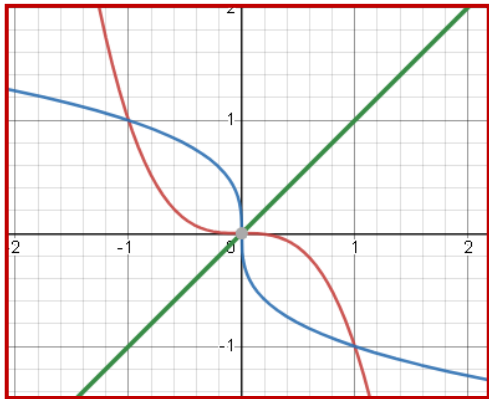
ΕΡΩΤΗΣΗ 48	Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης τι μονοτονία έχει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας . (Αποδ. Σελ: 11 φυλλαδίου θεωρίας)

ΕΡΩΤΗΣΗ 49	Πώς μπορούμε να βρούμε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $\psi=x$ (πρώτη διχοτόμο);
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} και είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $\psi=x$, προκύπτει ότι οι εξισώσεις $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=x$ είναι ισοδύναμες δηλαδή : $f(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=x$ Έτσι λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις μπορούμε να βρούμε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $\psi=x$

ΕΡΩΤΗΣΗ 50	Πως βρίσκουμε τα κοινά σημεία της C_f και της $C_{f^{-1}}$,αν η f είναι γνησίως αύξουσα;
-------------------	---

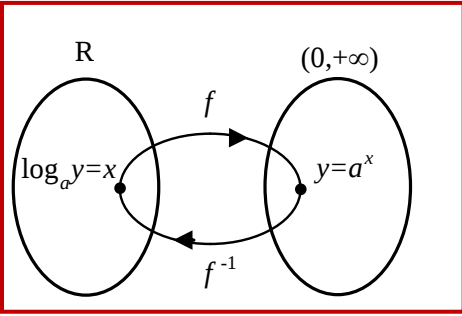
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι γνησίως αύξουσα τότε οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$ (1) και $f(x) = x$ (2) και $f^{-1}(x) = x$ (3) είναι ισοδύναμες (έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων). Άρα αντί να λύσω την (1) λύνω την (2) ή την (3). <u>Αυτό θέλει απόδειξη (στο τέλος)</u>
-----------------	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 51	Όταν η f είναι γνησίως φθίνουσα ισχύει το παραπάνω;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι π.χ.: $f(x) = \frac{1}{x}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, η αντίστροφη είναι $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ και η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ έχει λύση κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, ενώ η εξίσωση $f(x) = x$ έχει λύση όταν $x = +1, -1$, άρα οι (1), (2) δεν είναι ισοδύναμες.

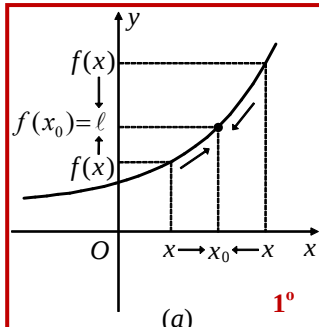
ΕΡΩΤΗΣΗ 52	Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, τότε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} πως τα υπολογίζουμε;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Τα υπολογίζουμε από τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} \psi = f(x) \\ \psi = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = f(x) \\ x = f^{-1}(\psi) \end{cases}$.Σε αυτή την περίπτωση δεν είναι απαραίτητο τα κοινά σημεία να βρίσκονται επάνω στην ευθεία $y = x$. Π.χ: $f(x) = -x^3$ (κόκκινη), $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$ (μπλε). 

ΕΡΩΤΗΣΗ 53	Πότε αντιστρέφεται μια συνάρτηση με πολλούς κλάδους;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση με πολλούς κλάδους αντιστρέφεται μόνο όταν ➤ Κάθε κλάδος της είναι “1-1” και ➤ Τα σύνολα τιμών των επιμέρους κλάδων είναι ξένα μεταξύ τους.

ΕΡΩΤΗΣΗ 54	Τι σχέση έχει η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση;
-------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Παρατηρούμε ότι η λογαριθμική συνάρτηση είναι η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης Δηλαδή: ➤ $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ ➤ $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$ ➤ $e^x = \psi \Leftrightarrow x = \ln \psi$, $\psi > 0$ ➤ $f(x) = e^x = \psi \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln \psi$ ή $f^{-1}(x) = \ln x$ 
-----------------	---

1.4 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 55	Να αναφέρεται τον ορισμό του ορίου καθώς το $x \rightarrow x_0$
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και διαβάζουμε: “το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ” ή “το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ”. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 56	Που πρέπει να ορίζεται η f ώστε να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0 ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Πρέπει η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0, β) .

ΕΡΩΤΗΣΗ 57	Το x_0 μπορεί να μην ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ;
-------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	• Ισχύουν οι ισοδυναμίες: ➤ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$ ➤ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$
-----------------	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 61	Πως συνδέεται το όριο με τα πλευρικά όρια ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Για να υπάρχει το όριο της f στο x_0 θα πρέπει να υπάρχουν τα πλευρικά όρια και να είναι ίσα δηλαδή: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$

ΕΡΩΤΗΣΗ 62	Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0), τότε πως ορίζουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αφού η f ορίζεται δεξιά του x_0, το όριο θα το ορίσουμε με την βοήθεια των πλευρικών ορίων, δηλαδή : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 63	Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β), τότε πως ορίζουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αφού η f ορίζεται αριστερά του x_0, το όριο θα το ορίσουμε με την βοήθεια των πλευρικών ορίων, δηλαδή : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 64	Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ εξαρτάται από τα α, β;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α, β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0, β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f.

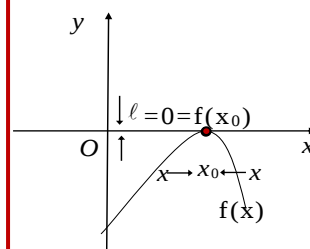
ΕΡΩΤΗΣΗ 65	Με τι ισούται το όριο της ταυτοτικής και της σταθερής συνάρτησης καθώς το $x \rightarrow x_0$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου αποδεικνύεται ότι: • $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ • $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

1.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

ΕΡΩΤΗΣΗ 66	Ποιες ανισότητες γνωρίζετε στα όρια ; (όριο και διάταξη)
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 • Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 • Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 τότε ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

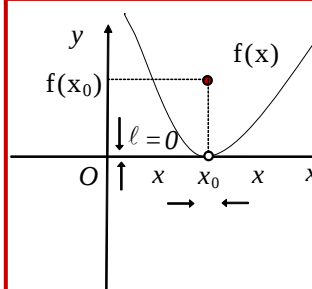
ΕΡΩΤΗΣΗ 67	Τα αντίστροφα των παραπάνω ισχύουν;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ισχύουν αλλά παραλλαγμένα δηλαδή: • Αν $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, τότε ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$ • Αν $f(x) \leq 0$ κοντά στο x_0, τότε ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$ • Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε ισχύει ότι $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0

ΕΡΩΤΗΣΗ 68	Ποιες συνεπαγωγές δεν ισχύουν στα όρια;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$, τότε δεν ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0



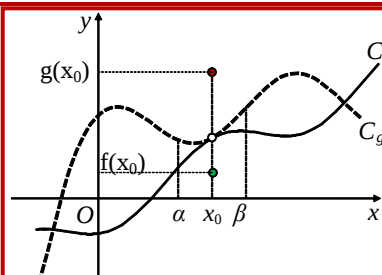
- Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε **δεν ισχύει** ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ αλλά ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$$

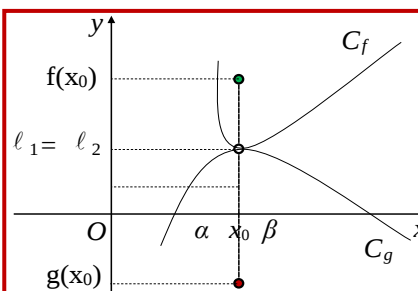


- Ομοίως αν $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε **δεν ισχύει** ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ αλλά ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$

- Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε **δεν ισχύει** ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ αλλά ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$



- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε **δεν ισχύει** ότι $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 .

**ΕΡΩΤΗΣΗ 69**

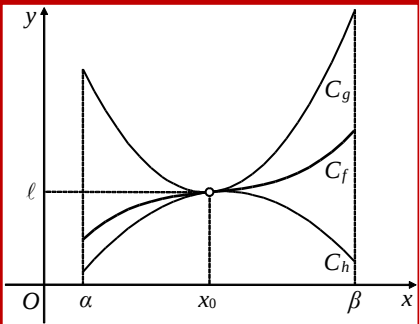
Ποιες είναι οι ιδιότητες των ορίων αν το $x \rightarrow$ στο x_0 ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο X_0, τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο X_0 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v$, $v \in \mathbb{N}^*$
-----------------	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 70	Με τι ισούται το $\lim_{x \rightarrow x_0} x^v$
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Σύμφωνα με την ιδιότητα 7 έχω : $\lim_{x \rightarrow x_0} x^v = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^v \stackrel{\text{βασικό όριο της 1.4}}{=} (x_0)^v = x_0^v$

ΕΡΩΤΗΣΗ 71	Έστω το πολυώνυμο $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Με το ισούται το $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε: $\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{v-1} x^{v-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + a_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_v x_0^v + a_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + a_0 = P(x_0). \text{ Επομένως, } \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0) \end{aligned}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 72	Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Με τι ισούται το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Σύμφωνα με τις ιδιότητες ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$ Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0) \neq 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 73	Πως διατυπώνεται το κριτήριο παρεμβολής;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$ Παρατήρηση: το παραπάνω θεώρημα ισχύει και όταν μια από τις ανισώσεις ή και οι δυο είναι γνήσιες. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 74	Ποια βασική τριγωνομετρική σχέση γνωρίζεται ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αποδεικνύεται ότι: $\eta\mu x \leq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$) (η απόδειξη εκτός)

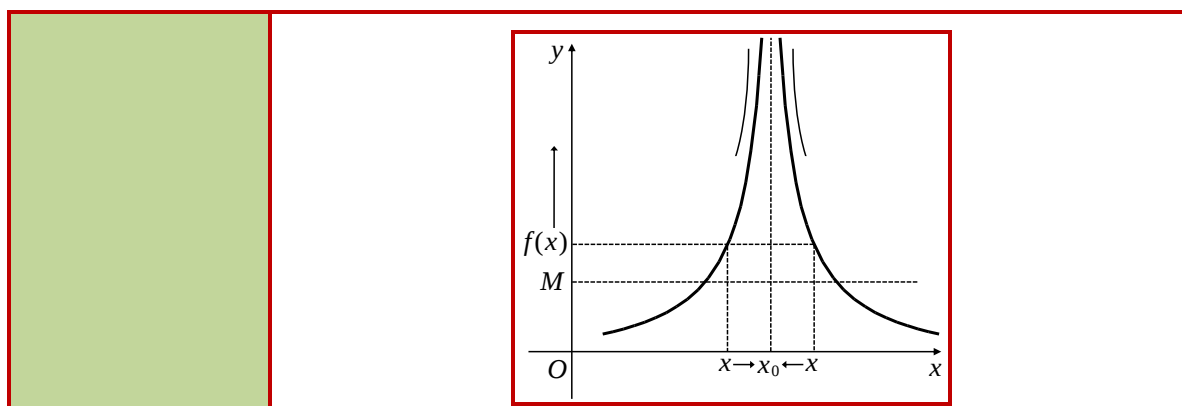
ΕΡΩΤΗΣΗ 75	Με τι ισούνται τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αποδεικνύεται ότι : $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$ (απόδειξη εκτός)

ΕΡΩΤΗΣΗ 76	Ποια είναι τα βασικά τριγωνομετρικά όρια ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ ➤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$ (οι αποδείξεις εκτός)

ΕΡΩΤΗΣΗ 77	Πως υπολογίζουμε το όριο σύνθετης συνάρτησης ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0, τότε εργαζόμαστε ως εξής: 1. Θέτουμε $u = g(x)$. 2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και 3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$. Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u).$

1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 78	Πως ορίζουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ με απλά λόγια ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R}$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι καθώς το x πλησιάζει το x_0 με οποιοδήποτε τρόπο, (από τα αριστερά και από τα δεξιά), οι τιμές $f(x)$ αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από κάθε θετικό πραγματικό αριθμό M. Σε κάθε τέτοια περίπτωση θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο το $+\infty$ και θα γράφουμε ότι : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$



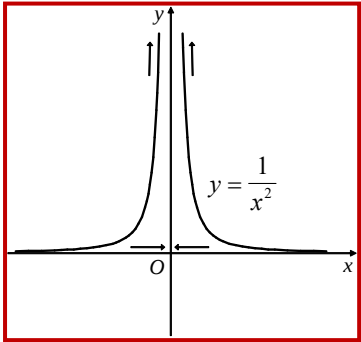
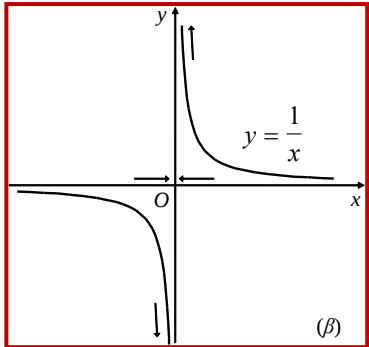
ΕΡΩΤΗΣΗ 79	Πως ορίζουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ με απλά λόγια ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R}$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι καθώς το x πλησιάζει το x_0 (από τα αριστερά και από τα δεξιά) οι τιμές $f(x)$ ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από κάθε αρνητικό πραγματικό αριθμό $-M$ ($M > 0$). Σε κάθε τέτοια περίπτωση θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο το $-\infty$ και θα γράφουμε ότι : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

ΕΡΩΤΗΣΗ 80	Ποιες είναι οι ισοδυναμίες που συνδέουν το όριο με τα πλευρικά όρια;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Για τις συναρτήσεις, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες: ➤ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ ➤ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 81	Ποιες ιδιότητες γνωρίζετε για τα μη πεπερασμένα όρια στο x_0 ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο X_0, ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο X_0. • Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$, ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$. • Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$. • Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο X_0, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο X_0, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$. • Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$. • Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 82	Με τι ισούνται τα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$;
-------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Με την βοήθεια των παραπάνω ιδιοτήτων προκύπτει: ➤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty, \quad v \in \mathbb{N}^*$ ➤ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty, \quad v \in \mathbb{N}$ ➤ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty, \quad v \in \mathbb{N}$ Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x) = \frac{1}{x^{2v+1}}, \quad v \in \mathbb{N} \text{ γιατί}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty$
-----------------	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 83	Τι γνωρίζετε για τα όρια του αθροίσματος δύο συναρτήσεων						
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Για τα όρια του αθροίσματος δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:						
	Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$						
	το όριο της f είναι:	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
	τότε το όριο της $f + g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΕΡΩΤΗΣΗ 84	Τι γνωρίζετε για τα όρια του γινομένου δυο συναρτήσεων;
-------------------	--

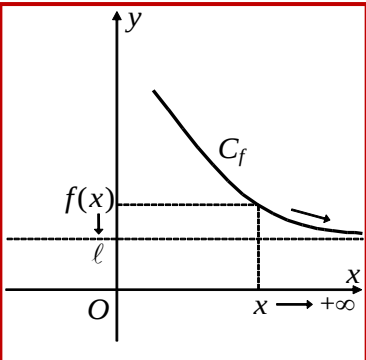
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

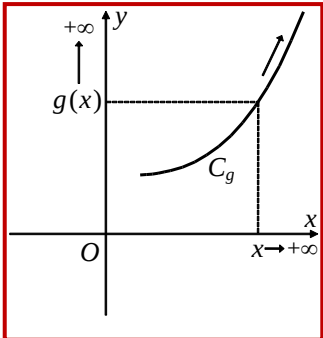
Για τα όρια του γινομένου δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:

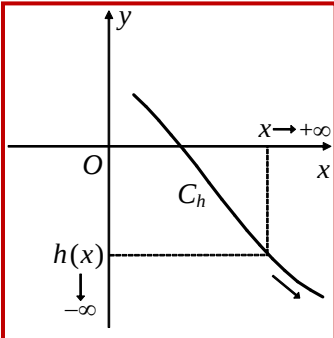
Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$,										
το όριο της f είναι:	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

ΕΡΩΤΗΣΗ 85	Ποιες απροσδιόριστες μορφές γνωρίζεται;	
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ $(+\infty) + (-\infty)$ ➤ $0 \cdot (\pm\infty)$ ➤ $(+\infty) - (+\infty)$	➤ $(-\infty) - (-\infty)$ ➤ $\frac{0}{0}$ ➤ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

1.7 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

ΕΡΩΤΗΣΗ 86	Πως θα ορίσουμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ με απλά λόγια;	
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το $f(x)$ προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ. Σε κάθε τέτοια περίπτωση γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$	

ΕΡΩΤΗΣΗ 87	Πως θα ορίσουμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ με απλά λόγια;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g, παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το $g(x)$ αυξάνεται απεριόριστα. Σε κάθε τέτοια περίπτωση γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ 

ΕΡΩΤΗΣΗ 88	Πως θα ορίσουμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ με απλά λόγια;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το $h(x)$ ελαττώνεται απεριόριστα. Σε κάθε τέτοια περίπτωση γράφουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ 

ΕΡΩΤΗΣΗ 89	Που πρέπει να είναι ορισμένη η f για να αναζητήσουμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 90	Που πρέπει να είναι ορισμένη η f για να αναζητήσουμε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $-\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 91	Ποια βασικά όρια γνωρίζεται όταν $x \rightarrow \pm\infty$
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\nu = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ ➤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 92	Τι γνωρίζεται για το όριο της πολυωνυμικής συνάρτησης όταν $x \rightarrow \pm\infty$
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 93	Τι γνωρίζεται για το όριο της ρητής συνάρτησης όταν $x \rightarrow \pm\infty$
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_\kappa \neq 0$ ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 94	Τι γνωρίζετε για όρια της εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης καθώς $x \rightarrow \pm\infty$;
-------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αποδεικνύεται ότι

- Αν $\alpha > 1$, τότε

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0,$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\alpha} x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = +\infty$

- Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

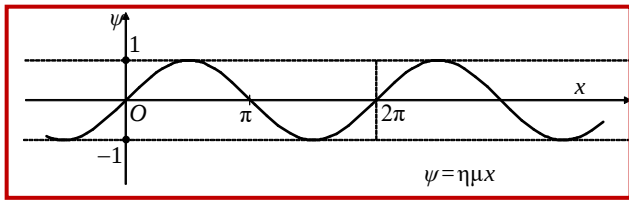
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\alpha} x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = -\infty$

- Επίσης ισχύουν :

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 95	Οι γνωστές ιδιότητες των ορίων ισχύουν και για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι , με την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

ΕΡΩΤΗΣΗ 96	Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\epsilon\phi x$, $\sigma\phi x$ έχουν όριο στο $+\infty$ και στο $-\infty$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\epsilon\phi x$, $\sigma\phi x$ δεν έχουν όριο στο $+\infty$ και στο $-\infty$. Π.χ: $f(x) = \eta\mu x$ 

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ	Έστω f, g δυο συναρτήσεις ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ τότε : 1. Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ Τότε θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ 2. Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ Τότε θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$
-------------------	---

1.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 97	Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της x_0 ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 98	Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν: ➤ Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή ➤ Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

ΕΡΩΤΗΣΗ 99	Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ τότε για να είναι συνεχής στα άκρα a και b τι θα πρέπει να ισχύει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ τότε για να είναι συνεχής στα άκρα a, b θα πρέπει να ισχύει : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ και $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 100	Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, συνεχής συνάρτηση .

ΕΡΩΤΗΣΗ 101	Ποιες συνεχείς συναρτήσεις γνωρίζεται ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Οι πολωνυμικές , οι ρητές, οι τριγωνομετρικές, η εκθετική και η λογαριθμική είναι συνεχείς συναρτήσεις.

ΕΡΩΤΗΣΗ 102

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , οι συναρτήσεις που προκύπτουν από τις πράξεις μεταξύ των f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

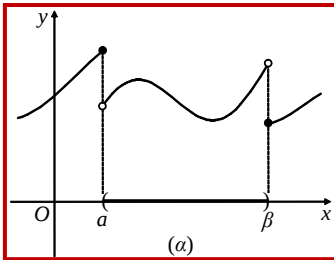
Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις

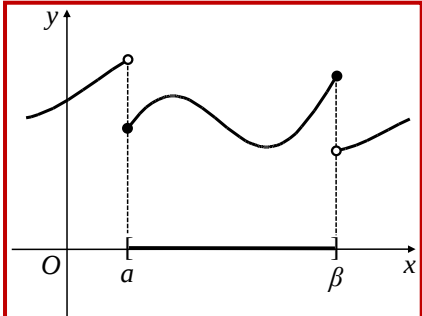
$f + g$	$c \cdot f$ όπου $c \in \mathbb{R}$,	$ f $
$f \cdot g$	$\frac{f}{g}$	$\sqrt[n]{f}$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το

ΕΡΩΤΗΣΗ 103	Οι $f(x) = \varepsilon\phi x$ και $g(x) = \sigma\phi x$ είναι συνεχείς συναρτήσεις;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Οι $f(x) = \varepsilon\phi x$ και $g(x) = \sigma\phi x$ είναι συνεχείς ως πηλίκια συνεχών συναρτήσεων. $g(x) = \sigma\phi x$

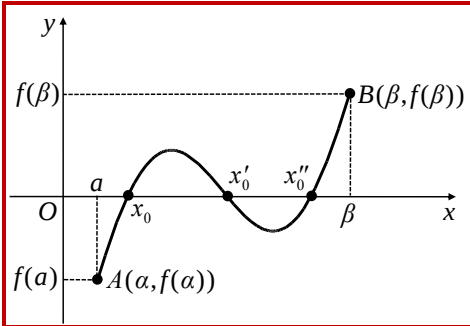
ΕΡΩΤΗΣΗ 104	Τι γνωρίζεται για την σύνθεση δυο συνεχών συναρτήσεων;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

ΕΡΩΤΗΣΗ 105	Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β). 

ΕΡΩΤΗΣΗ 106	Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$ 

ΕΡΩΤΗΣΗ 107	Μπορείτε να διατύπωσε το θεώρημα Bolzano;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν: • η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει • $f(a) \cdot f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (a, β).

ΕΡΩΤΗΣΗ 108	Μπορείτε να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Bolzano;
--------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Επειδή τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(b, f(b))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x, η γραφική παράσταση της f (επειδή είναι συνεχής) τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο. 
-----------------	--

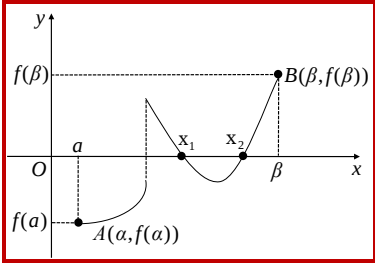
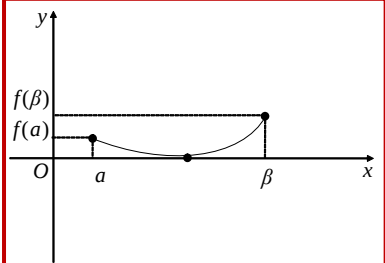
ΕΡΩΤΗΣΗ 109	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε τι πρόσημο έχει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

ΕΡΩΤΗΣΗ 110	Μια συνεχής συνάρτηση f τι πρόσημο έχει μεταξύ των ριζών της;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

ΕΡΩΤΗΣΗ 111	Αν η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[a, b]$ και επί πλέον ισχύει $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε τι συμβαίνει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο (a, b) .

ΕΡΩΤΗΣΗ 112	Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και $f(\xi) > 0$ με $\xi \in \Delta$ Τότε τι συμβαίνει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

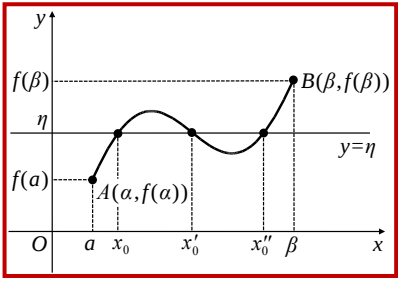
ΕΡΩΤΗΣΗ 113	Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και $f(\xi) < 0$ με $\xi \in \Delta$ Τότε τι συμβαίνει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 114	Ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Bolzano;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει πάντα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μία πραγματική συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ που έχει ρίζα στο (a, β) και δεν είναι συνεχής στο (a, β) ή ότι οι τιμές $f(a)$, $f(\beta)$ δεν είναι ετερόσημες δηλαδή δεν ισχύει : $f(a) \cdot f(\beta) < 0$  

ΕΡΩΤΗΣΗ 115	Αν δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano δεν έχει ρίζα η f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, δεν σημαίνει ότι η f δεν έχει ρίζα στο (a, β) .

ΕΡΩΤΗΣΗ 116	Από τη σχέση $f(x) \cdot g(x) = 0$ συνεπάγεται ότι $f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι π.χ: $f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ προφανώς ισχύει: $f(x) \cdot g(x) = 0$ αλλά οι συναρτήσεις είναι διάφορες του μηδενός.

ΕΡΩΤΗΣΗ 117	Μπορείτε να διατύπωσε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών;
--------------------	---

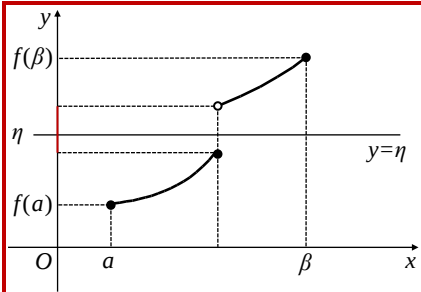
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$. Αν: ➤ η f είναι συνεχής στο $[α,β]$ και ➤ $f(α) \neq f(β)$ τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (α,β)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$ (έχει απόδειξη) 
-----------------	--

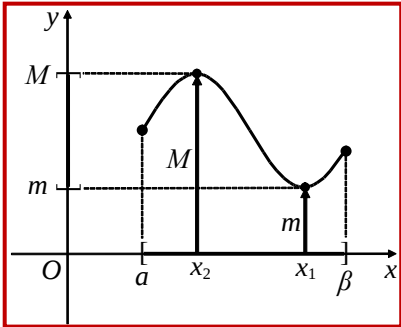
ΕΡΩΤΗΣΗ 118	Μπορείτε να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Η παράλληλη ευθεία $y = \eta$ προς τον xx' θα τέμνει την C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο (στο συγκεκριμένο παράδειγμα σε τρία σημεία) ➤ Κάθε σημείο του άξονα yy' που βρίσκεται μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ θα είναι και τιμή της συνάρτησης f.

ΕΡΩΤΗΣΗ 119	Το αντίστροφο του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών ισχύει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το αντίστροφο του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών δεν ισχύει υποχρεωτικά, δηλαδή αν μία συνάρτηση f ορισμένη στο $[α, β]$, παίρνει κάθε τιμή μεταξύ του $f(α)$ και του $f(β)$, δεν σημαίνει ότι αυτή είναι συνεχής στο $[α, β]$

ΕΡΩΤΗΣΗ 120	Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f, τι είναι ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι διάστημα

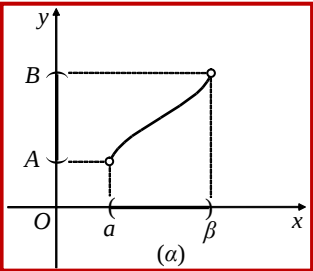
ΕΡΩΤΗΣΗ 121	Αν στο σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης περιέχεται το μηδέν τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ τι έχει ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 122	Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε, παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές. 

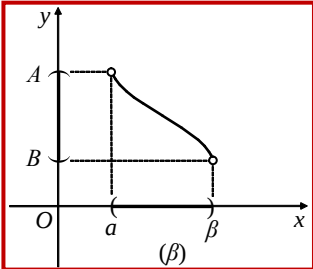
ΕΡΩΤΗΣΗ 123	Μπορείτε να διατύπωσε το θεώρημα Μέγιστης και ελάχιστης τιμής;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 124	Ποιο είναι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

ΕΡΩΤΗΣΗ 125	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε ποιο είναι το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό ;
--------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι το διάστημα (A,B), όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$. 
-----------------	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 126	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε ποιο είναι το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό ;
--------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι το διάστημα (B,A), όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$. 
-----------------	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 127	Αν η $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και ένα προς ένα, τότε η f είναι γνησίως μονότονη; ..
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι (βλέπε απόδειξη σελ 32 φυλλαδίου θεωρίας εκτός σχολικού)