

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1	Τι ονομάζουμε συνάρτηση θέσης ενός κινητού;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι $S = S(t)$ είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιγμή t . Η συνάρτηση S ονομάζεται συνάρτηση θέσης του κινητού.

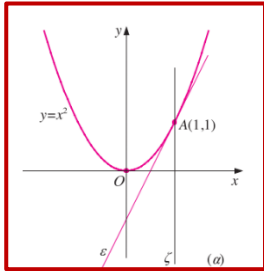
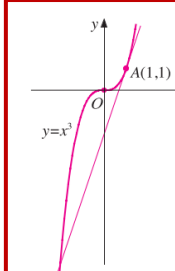
ΕΡΩΤΗΣΗ 2	Στο χρονικό διάστημα από t_0 έως t, ποιος τύπος μας δίνει τη μέση ταχύτητα του ενός κινητού ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μας τη δίνει ο τύπος $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος}}$.

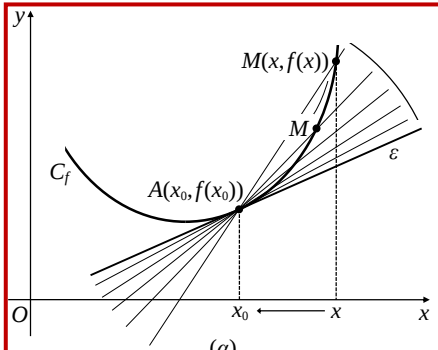
ΕΡΩΤΗΣΗ 3	Τι ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το t τείνει στο t_0 , το ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και τη συμβολίζουμε με $v(t_0)$. Δηλαδή: $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 4	Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, η ταχύτητα τι πρόσημο έχει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} > 0$, οπότε είναι $v(t_0) \geq 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5α	Όταν ένα κινητό κινείται προς τα αριστερά, η ταχύτητα τι πρόσημο έχει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} < 0$, οπότε είναι $v(t_0) \leq 0$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5β	Είναι γνωστό από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του A ονομά-
-------------------	---

	ζουμε την ευθεία η οποία έχει με τον κύκλο ένα μόνο κοινό σημείο, το Α. Ο ορισμός αυτός γιατί δεν μπορεί να γενικευτεί για οποιαδήποτε καμπύλη;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	γιατί, με έναν τέτοιο ορισμό η παραβολή $y = x^2$ θα είχε στο σημείο $A(1, 1)$ δύο εφαπτόμενες ε και ζ, ενώ η $y = x^3$ δεν θα είχε στο σημείο $A(1,1)$ καμία εφαπτομένη.  

ΕΡΩΤΗΣΗ 6	Πως ορίζουμε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A και τι εξίσωση έχει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = \lambda(x - x_0),$ όπου $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 7	Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$ Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και αν θέσουμε $x = x_0 + h$, τότε έχουμε $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx, ενώ το

	$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$ Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left. \frac{df(x)}{dx} \right _{x=x_0}$
--	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 8	Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f , τότε η f θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ίσα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 9	Πως ορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , με την βοήθεια των παραγώγων;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή, είναι $v(t_0) = S'(t_0)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 10	Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ και ποια είναι η εξίσωση της ε φ α π τ ο μ έ ν η ς ε ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι η παράγωγος της f στο x_0. Δηλαδή, είναι $\lambda = f'(x_0)$, οπότε η εξίσωση της ε φ α π τ ο μ έ ν η ς ε είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 11	Ποιο θεώρημα συνδέει την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης στο x_0 ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. (έχει απόδειξη) Το αντίστροφο δεν ισχύει π.χ : η συνάρτηση $f(x) = x$.

2.2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΗ 12	Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο A;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 13	Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 14	Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ του πεδίου ορισμού της;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}.$

ΕΡΩΤΗΣΗ 15	Τι ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow f'(x),$ η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f . Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται “ντε εφ προς ντε χι”. Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y = (f(x))'$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 16	Ποια είναι η δεύτερη παράγωγος της f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f' , αν υπάρχει, λέγεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'' .

ΕΡΩΤΗΣΗ 17	Ποιες παραγώγους βασικών συναρτήσεων γνωρίζεται;								
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	<table border="1"> <tr> <td>$(c)' = 0$</td><td>$(x)' = 1$</td></tr> <tr> <td>$(\eta \mu x)' = \sigma \nu \eta x$</td><td>$(\sigma \nu \eta x)' = -\eta \mu x$</td></tr> <tr> <td>$(x^v)' = vx^{v-1} \quad v \in \mathbb{N}, v \neq 0,1$ $x \in \mathbb{R}$</td><td>$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (0, +\infty)$</td></tr> <tr> <td>$(e^x)' = e^x$</td><td>$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (0, +\infty)$</td></tr> </table> (έχει αποδείξεις)	$(c)' = 0$	$(x)' = 1$	$(\eta \mu x)' = \sigma \nu \eta x$	$(\sigma \nu \eta x)' = -\eta \mu x$	$(x^v)' = vx^{v-1} \quad v \in \mathbb{N}, v \neq 0,1$ $x \in \mathbb{R}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (0, +\infty)$	$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (0, +\infty)$
$(c)' = 0$	$(x)' = 1$								
$(\eta \mu x)' = \sigma \nu \eta x$	$(\sigma \nu \eta x)' = -\eta \mu x$								
$(x^v)' = vx^{v-1} \quad v \in \mathbb{N}, v \neq 0,1$ $x \in \mathbb{R}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (0, +\infty)$								
$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (0, +\infty)$								

2.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 18	Τι γνωρίζετε για την παράγωγο του αθροίσματος δυο συναρτήσεων ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ ➤ Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$ (Έχει απόδειξη)

ΕΡΩΤΗΣΗ 19	Τι γνωρίζετε για την παράγωγο του γινομένου δυο συναρτήσεων ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ ➤ Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε x που ανήκει στο Δ ισχύει: $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ➤ Επίσης ισχύει: $(cf(x))' = cf'(x)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 20	Τι γνωρίζετε για την παράγωγο του πηλίκου δυο συναρτήσεων ;
-------------------	--

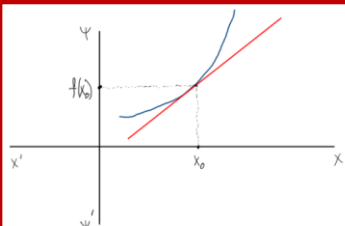
	σεων ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$ ➤ Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $g(x) \neq 0$, τότε για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$

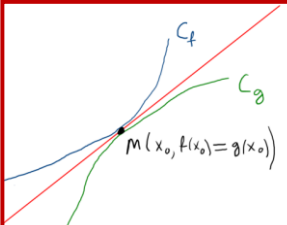
ΕΡΩΤΗΣΗ 21	Τι γνωρίζετε για την παράγωγο της σύνθεσης δυο συναρτήσεων ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ ➤ Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$

ΕΡΩΤΗΣΗ 22	Γνωρίζετε παραγώγους κι άλλων βασικών συναρτήσεων;								
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>$(x^{-v})' = -vx^{-v-1}, \quad v \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^*$</td><td>$(x^{\kappa})' = \kappa x^{\kappa-1}$ $\kappa \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$</td></tr> <tr> <td>$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}, x > 0$</td><td></td></tr> <tr> <td>$(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\nu v^2 x}, \quad x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2},$ $\kappa \in \mathbb{Z}$</td><td>$(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x},$ $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$</td></tr> <tr> <td>$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha, \quad \alpha > 0$</td><td>$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*$</td></tr> </tbody> </table>	$(x^{-v})' = -vx^{-v-1}, \quad v \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^*$	$(x^{\kappa})' = \kappa x^{\kappa-1}$ $\kappa \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$	$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}, x > 0$		$(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\nu v^2 x}, \quad x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2},$ $\kappa \in \mathbb{Z}$	$(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x},$ $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$	$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha, \quad \alpha > 0$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*$
$(x^{-v})' = -vx^{-v-1}, \quad v \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^*$	$(x^{\kappa})' = \kappa x^{\kappa-1}$ $\kappa \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$								
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}, x > 0$									
$(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\nu v^2 x}, \quad x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2},$ $\kappa \in \mathbb{Z}$	$(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x},$ $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$								
$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha, \quad \alpha > 0$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*$								

	(έχει αποδείξεις)
--	-------------------

ΕΡΩΤΗΣΗ 23	Γνωρίζετε τις παραγώγους των σύνθετων συναρτήσεων;	
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$	$(\epsilon\phi u)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u} \cdot u'$
	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$(\sigma\phi u)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 u} \cdot u'$
	$(\eta\mu u)' = \sigma\upsilon\nu u \cdot u'$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
	$(\sigma\upsilon\nu u)' = -\eta\mu u \cdot u'$	$(\alpha^u)' = \alpha^u \ln \alpha \cdot u'$
	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	
	αν η συνάρτηση $u=f(x)$ είναι παραγωγίσιμη.	

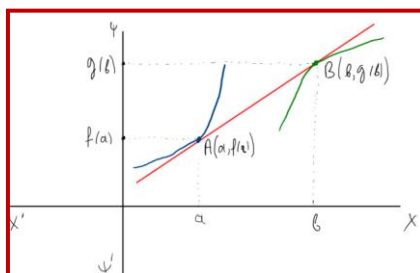
ΕΡΩΤΗΣΗ 24	Πότε η ευθεία (ε): $y = \lambda x + \beta$ εφάπτεται στη C_f;	
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν και μόνο αν υπάρχει x_0 στο πεδίο ορισμού της f , ώστε να ισχύει $f'(x_0) = \lambda$ και $f(x_0) = \lambda x_0 + \beta$	

ΕΡΩΤΗΣΗ 25	Πότε οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g δυο συναρτήσεων f, g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους $M(x_0, y_0)$	
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν ισχύει $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$	

ΕΡΩΤΗΣΗ 26	Τι πρέπει να συμβαίνει για να έχουν κοινή εφαπτομένη δυο γραφικές παραστάσεις σε μη κοινό τους σημείο;	
-------------------	---	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, g(\beta))$ τα σημεία επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης της f είναι $\psi - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$, ενώ η εφαπτομένη της g είναι $\psi - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta)$ δηλαδή



$$\begin{cases} \psi = f'(\alpha) \cdot x - \alpha \cdot f'(\alpha) + f(\alpha) \\ \psi = g'(\beta) \cdot x - \beta \cdot g'(\beta) + g(\beta) \end{cases}$$
 Για να παριστάνουν την ίδια ευθεία πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ \text{και} \\ -\alpha \cdot f'(\alpha) + f(\alpha) = -\beta \cdot g'(\beta) + g(\beta) \end{cases}$$
 Από το παραπάνω σύστημα βρίσκω τα α , β .

Άλλος τρόπος : Για να έχουν κοινή εφαπτομένη οι γραφικές παραστάσεις των f και g αρκεί να ισχύει

$$\left\{ f'(\alpha) = g'(\beta) = \frac{g(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \text{συντελεστής διεύθυνσης } AB \right\}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 27

Τι γνωρίζετε για την παράγωγο της αντίστροφης συνάρτησης;

(εκτός σχολικού, οι αποδείξεις στο φυλλάδιο θεωρίας)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ**Πρόταση:**

Έστω f μια γνησίως μονότονη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ . Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 με $f'(x_0) \neq 0$ και η αντίστροφη f^{-1} , είναι συνεχής στο ψ_0 , τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0) = \psi_0 \in f(\Delta)$ και

$$\text{ισχύει: } (f^{-1})'(f(x_0)) = (f^{-1})'(\psi_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\psi_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Πρόταση:

Έστω f παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ , γνησίως μονότονη και $f'(x) \neq 0$. Αν η f^{-1} είναι και αυτή παραγωγίσιμη για κάθε ψ που ανήκει στο $f(\Delta)$ τότε ισχύει:

	$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$
--	--

2.4 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 28	Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x ;
-------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$ f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.
-----------------	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 29	Πως ορίζουμε επιτάχυνση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ;
-------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Η παράγωγος $v'(t_0)$, της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 ή αλλιώς ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $a(t_0)$. Είναι δηλαδή $a(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0)$.
-----------------	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 30	Τι λέγεται οριακό κόστος στο x_0 , οριακή είσπραξη στο x_0 και οριακό κέρδος στο x_0 στην οικονομία;
-------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής K , η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0 . Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες οριακή είσπραξη στο x_0 και οριακό κέρδος στο x_0 .
-----------------	--

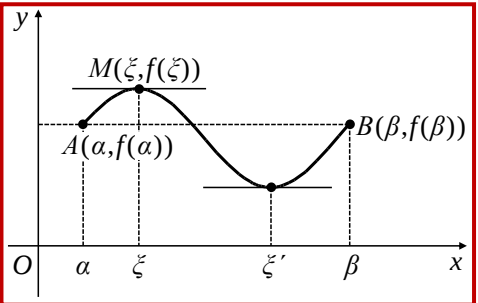
ΕΡΩΤΗΣΗ 31	Γνωρίζετε το εμβαδόν και τον όγκο του κυλίνδρου, της σφαίρας και του κώνου;
-------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ		ΕΜΒΑΔΟ	ΟΓΚΟΣ
-----------------	--	---------------	--------------

	ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ	$E_{ολ} = E_{\pi} + 2E_{\beta} = 2\pi\rho \cdot \upsilon + 2\pi\rho^2$	$V = \pi\rho^2 \cdot \upsilon$
	ΣΦΑΙΡΑ	$E = 4\pi\rho^2$	$V_{σφ} = \frac{4}{3} \cdot \pi\rho^3$
	ΚΩΝΟΣ	$E_{ολ} = E_{\pi} + E_{\beta} = \pi \cdot \rho \cdot \lambda + \pi\rho^2$	$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 \cdot \upsilon$

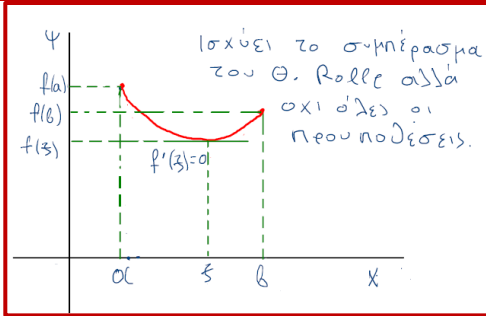
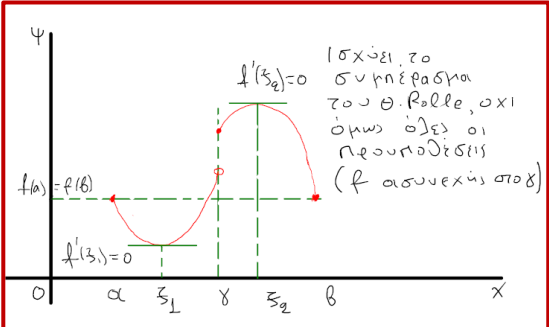
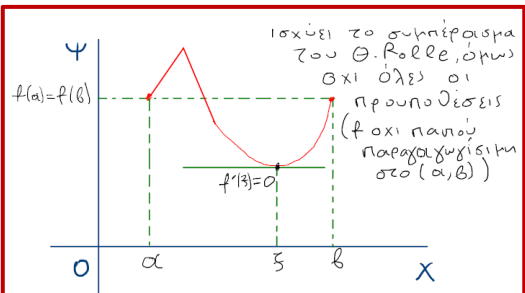
2.5 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 32	Μπορείτε να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν μια συνάρτηση f είναι: •συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ •παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και •$f(\alpha) = f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 33	Μπορείτε να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 34	Μπορείτε να δώσετε τη φυσική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν ένα σώμα κινούμενο πάνω σε ένα άξονα διέρχεται από το σημείο A τη χρονική στιγμή t_1 και επιστρέφει στο A τη χρονική στιγμή t_2, τότε υπάρχει χρονική στιγμή t_0 μεταξύ των t_1 και t_2, που η ταχύτητα είναι μηδέν. (Πράγματι: έστω $s(t)$ η συνάρτηση που μας δίνει την θέση του κινητού. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και επιπλέον ισχύει $s(t_1) = s(t_2)$. Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα t_0 μεταξύ του t_1 και του t_2 τέτοιο ώστε $s'(t_0) = v(t_0) = 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 35	Γνωρίζετε διατυπώσεις ισοδύναμες του συμπεράσματος του θεωρήματος Rolle;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Οι παρακάτω διατυπώσεις είναι ισοδύναμες: ➤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ ➤ η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο ανοικτό διάστημα (a, β) ➤ η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον άξονα xx' τουλάχιστον σε ένα σημείο. ➤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα xx'.

ΕΡΩΤΗΣΗ 36	Το αντίστροφο του θεωρήματος Rolle ισχύει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το αντίστροφο του θεωρήματος Rolle δεν ισχύει κατ' ανάγκη. Δηλαδή αν η παράγωγος μιας συνάρτησης μηδενίζεται σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της δεν σημαίνει ότι πληρούνται αναγκαστικά οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.  Ισχύει το συμπέρασμα του Θ. Rolle αλλά όχι όλες οι προϋποθέσεις.  Ισχύει το συμπέρασμα του Θ. Rolle, όχι όμως όλες οι προϋποθέσεις (f συνεχώς στο θ)  Ισχύει το συμπέρασμα του Θ. Rolle, όμως όχι όλες οι προϋποθέσεις (f όχι παντού παραγωγίσιμη στο (a, b))

ΕΡΩΤΗΣΗ 37	Αν μας λένε να δείξουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει μία το πολύ ρίζα στο (a, β), τι κάνουμε;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη , ή υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει και δεύτερη ρίζα και με το θεώρημα Rolle καταλήγουμε σε άτοπο .

ΕΡΩΤΗΣΗ 38	Αν μας λένε να δείξουμε ότι η $f(x)=0$ έχει δύο το πολύ ρίζες στο (α,β) , τι κάνουμε ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει και τρίτη ρίζα δηλαδή $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ οι τρεις ρίζες και με το θεώρημα Rolle για την f στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$ καταλήγουμε σε άτοπο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 39	Αν μας λένε να δείξουμε ότι η $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο (α,β) , τι κάνουμε ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αποδεικνύουμε ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα (ή με θεώρημα Bolzano ή με το σύνολο τιμών ή με θεώρημα Rolle ή την προφανή ρίζα) και μετά την μοναδικότητα την εξασφαλίζουμε ή με την μονοτονία ή υποθέτοντας ότι υπάρχει και δεύτερη ρίζα και με Θ.Rolle καταλήγουμε σε άτοπο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 40	Αν μας λένε να δείξουμε ότι η $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο (α,β) , τι κάνουμε ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Εργαζόμαστε όπως και προηγουμένως στα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$

ΕΡΩΤΗΣΗ 41	Γνωρίζετε τον πίνακα «αντιπαραγωγίσης» των βασικών συναρτήσεων;			
ΑΠΑΝΤΗΣΗ				
	$0 = (c)'$	$1 = (x)'$	$= x^\alpha = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'$ $\alpha \neq -1$	$\frac{1}{x} = (\ln x)'$ $x \neq 0$
	$\frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)'$ $x \neq 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = (\sqrt{x})'$ $(0,+\infty)$	$\sin x = (\eta\mu x)'$	$\eta\mu x = (-\sin x)'$
	$e^x = (e^x)'$	$\alpha^x = \left(\frac{\alpha^x}{\ln \alpha}\right)'$ $\alpha > 0$	$\frac{1}{\eta\mu^2 x} = (-\sigma\phi x)'$ $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = (\epsilon\phi x)'$ $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$
	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f(x) \cdot g(x))'$		$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$	
$f(x) + x \cdot f'(x) = (x \cdot f(x))'$		$\frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \left(\frac{f(x)}{x}\right)'$		

	$\sin f(x) \cdot f'(x) = (\eta \mu f(x))'$	$\eta \mu f(x) \cdot f'(x) = (-\sin f(x))'$	
	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = (\sqrt{f(x)})'$	$e^{f(x)} \cdot f'(x) = (e^{f(x)})'$	
	$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))'$	$\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(-\frac{1}{f(x)}\right)'$	
	$f(x) \cdot f'(x) = \left(\frac{f^2(x)}{2}\right)'$	$f^v(x) \cdot f'(x) = \left(\frac{f^{v+1}(x)}{v+1}\right)'$	

ΕΡΩΤΗΣΗ 42	Αν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) + g(x) \cdot f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) τότε τι κάνουμε;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Βρίσκουμε μία αρχική της $g(x)$, την $G(x)$ και πολλαπλασιάζουμε όλα τα μέλη της παραπάνω εξίσωσης με $e^{G(x)}$. Μετά από τις πράξεις έχουμε ισοδύναμα την εξίσωση $(e^{G(x)} \cdot f(x))' = 0$. Τέλος εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την $h(x) = e^{G(x)} \cdot f(x)$ στο $[\alpha, \beta]$ Πχ: ➤ αν έχουμε $f'(x) + f(x) = 0$ πολλαπλασιάζουμε με e^x ➤ αν έχουμε $f'(x) - f(x) = 0$ πολλαπλασιάζουμε με e^{-x} ➤ αν έχουμε $f'(x) + \kappa \cdot f(x) = 0$ πολλαπλασιάζουμε με $e^{\kappa \cdot x}$ ➤ αν έχουμε $x \cdot f'(x) + 2 \cdot f(x) = 0, x \neq 0$ πολλαπλασιάζουμε με x ➤ αν έχουμε $x \cdot f'(x) + 3 \cdot f(x) = 0, x \neq 0$ πολ/με με x^2 ➤ αν έχουμε $x \cdot f'(x) + v \cdot f(x) = 0, x \neq 0$ πολ/με με x^{v-1} ➤ αν έχουμε $x \cdot f'(x) - f(x) = 0, x \neq 0$ διαιρούμε με x^2 και έχουμε $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0$ ➤ αν έχουμε $x \cdot f'(x) - 2f(x) = 0, x \neq 0$ πολ/με με x και διαιρούμε με x^4 και έχουμε $\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' = 0$ ➤ αν έχουμε $x \cdot f'(x) - v f(x) = 0, x \neq 0$ πολ/με με x^{v-1} και διαιρούμε με x^{2v} και έχουμε $\left(\frac{f(x)}{x^v}\right)' = 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 43	Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει δύο ρίζες, τότε η f' πόσες ρίζες έχει;
-------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	έχει τουλάχιστον μία ρίζα. Απόδειξη : εφαρμογή του Θ.Rolle για την f στο $[ρ_1, ρ_2]$
-----------------	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 44	Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο R, τότε ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της f' πόσες ρίζες έχει η συνάρτηση f;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έχει το πολύ μία ρίζα η συνάρτηση f . Απόδειξη : έστω ότι η f έχει δύο ρίζες τότε από το Θ.Rolle η f' θα έχει τρεις ρίζες, άτοπο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 45	Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και έχει τρεις ρίζες τότε η f' και η f'' πόσες ρίζες έχουν ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	η f' έχει δύο τουλάχιστον ρίζες και η f'' τουλάχιστον μία. Γιατί: Απόδειξη : εφαρμόζουμε διαδοχικά το Θ.Rolle στα διαστήματα $[ρ_1, ρ_2]$ και $[ρ_2, ρ_3]$ άρα η f' έχει δύο τουλάχιστον ρίζες τις $ξ_1$ και $ξ_2$. Μετά εφαρμόζουμε Θ.Rolle στο $[ξ_1, ξ_2]$ για την f' άρα η f'' έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

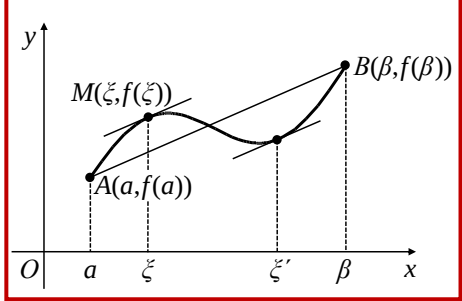
ΕΡΩΤΗΣΗ 46	Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ τότε η f είναι «1 – 1» ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι και αντιστρέφεται. Γιατί : Απόδειξη : Πράγματι , έστω ότι δεν είναι «1 – 1» τότε από Θ.Rolle καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα η f είναι «1 – 1» και αντιστρέφεται.

ΕΡΩΤΗΣΗ 47	Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ τότε η f πόσες ρίζες έχει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έχει το πολύ μία ρίζα. Απόδειξη : έστω ότι έχει δύο ρίζες τότε από Θ.Rolle η $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα άτοπο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 48	Αν $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ τότε η f πόσες ρίζες έχει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έχει δύο το πολύ ρίζες. Απόδειξη : έστω ότι έχει τρεις ρίζες τότε από Θ.Rolle η $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες και η $f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα άτοπο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 49	Μπορείτε να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν μια συνάρτηση f είναι: •συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α,β]$ και •παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(α,β)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $ξ \in (α,β)$ τέτοιο, ώστε:

	$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$
--	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 50	Μπορείτε να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB. 

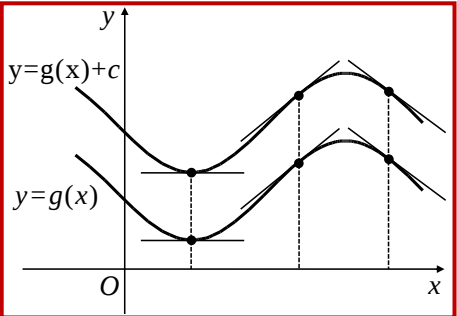
ΕΡΩΤΗΣΗ 51	Μπορείτε να δώσετε τη φυσική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αυτό σημαίνει ότι κατά την ευθύγραμμη κίνηση ενός κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ υπάρχει μία τουλάχιστον χρονική στιγμή $t_0 \in (t_1, t_2)$ τέτοια ώστε η ταχύτητα του κινητού να ισούται με την μέση ταχύτητα του.

ΕΡΩΤΗΣΗ 52	Μπορείτε να αναφέρετε δυο βασικές ανισότητες στις εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις που μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε χωρίς απόδειξη;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Για κάθε $x > 0$ να ισχύει ότι $\ln x \leq x - 1$ ➤ Για κάθε x πραγματικό αριθμό ισχύει ότι $e^x \geq x + 1$ (αποδείξεις στο φυλλάδιο της θεωρίας στη 2.5 παράγραφο) Ισχύει επίσης: $e^x \geq x + 1 > x > x - 1 \geq \ln x \Rightarrow e^x > x > \ln x, x > 0$

2.6 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 53	Θεώρημα Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν ισχύει: • η f είναι συνεχής στο Δ και • $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f τι είναι ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Σταθερή σε όλο το διάστημα Δ . (έχει απόδειξη στο τέλος του φυλλαδίου)

ΕΡΩΤΗΣΗ 54	Πόρισμα Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν • οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και • $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε τι σχέση έχουν οι f και g;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$. (έχει απόδειξη στο τέλος του φυλλαδίου)

ΕΡΩΤΗΣΗ 55	Μπορείτε να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω πορίσματος;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	<u>Γεωμετρική ερμηνεία</u> Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν σε οποιοδήποτε x που ανήκει στο Δ παράλληλες εφαπτόμενες, τότε η γραφική παράσταση της μίας προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση, της άλλης γραφικής παράστασης κατά c μονάδες, προς τα πάνω αν $c > 0$ ή προς τα κάτω αν $c < 0$. 

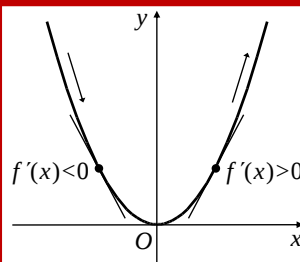
ΕΡΩΤΗΣΗ 56	Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε ένωση διαστημάτων;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι ισχύουν μόνο σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Ισχύουν όμως σε κάθε διάστημα ξεχωριστά Π.χ: $f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$, ισχύει: $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αλλά η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 57	Τι σημαίνει «ισχύουν όμως σε κάθε διάστημα ξεχωριστά»;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	<u>Αυτό σημαίνει:</u> Αν ισχύει $f'(x) = g'(x)$ με $x \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ τότε $f(x) = g(x) + c_1$ αν $x \in \Delta_1$ και $f(x) = g(x) + c_2$ αν $x \in \Delta_2$

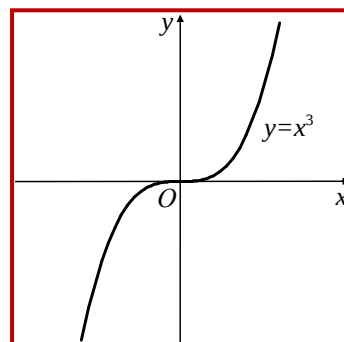
ΕΡΩΤΗΣΗ 58	Αν για την f ισχύει: $f'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ποια είναι η f ; (χωρίς απόδειξη)
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R} : f(x) = ce^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 59	Αν για την f ισχύει: $f'(x) = k \cdot f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και k πραγματικός αριθμός ποια είναι η f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R} : f(x) = c \cdot e^{kx}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (απόδειξη στο τέλος)

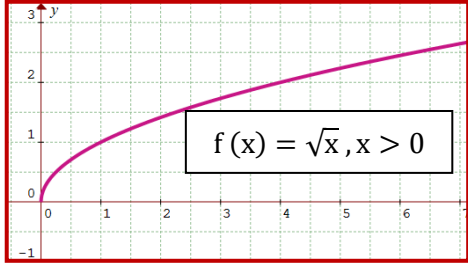
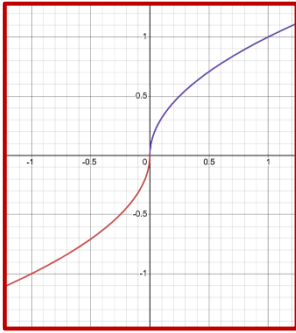
ΕΡΩΤΗΣΗ 60	Θεώρημα Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. ➤ Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f τι μονοτονία έχει; ➤ Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f τι μονοτονία έχει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. ➤ Είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ. (έχει απόδειξη στο τέλος του φυλλαδίου)



ΕΡΩΤΗΣΗ 61	Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος ισχύει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι δεν ισχύει. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

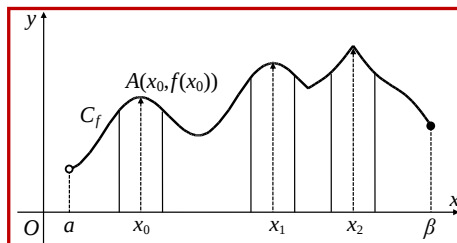


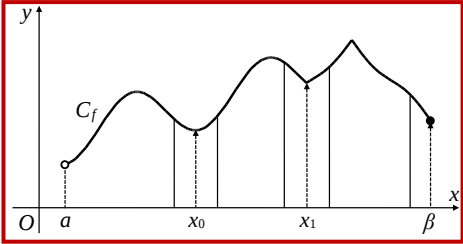
ΕΡΩΤΗΣΗ 62	Το παραπάνω θεώρημα ισχύει σε ένωση διαστημάτων;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	<u>Όχι δεν ισχύει.</u> Π.χ: $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) < 0$ στο $\mathbb{R}^*$ αλλά η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}^*$ γιατί $-2 < 2$ όμως $f(-2) < f(2)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 63	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) με εξαίρεση ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής και η f' διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο (a, β) ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι . Π.χ $f(x) = \sqrt{x}$ ισχύει: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ με $x > 0$, η f' δεν ορίζεται στο μηδέν, όμως f συνεχής στο $[0, +\infty]$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty]$. Άλλο π.χ: $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, είναι όμως συνεχής στο 0 και η f' είναι θετική για x διάφορο του 0 άρα f γνησίως αύξουσα στους πραγματικούς αριθμούς.  

2.7 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

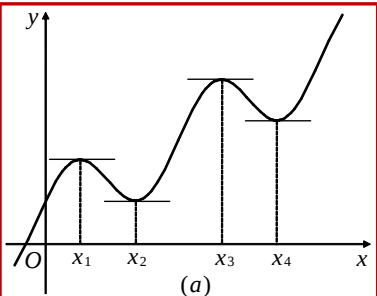
ΕΡΩΤΗΣΗ 64	Πότε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου , ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f .

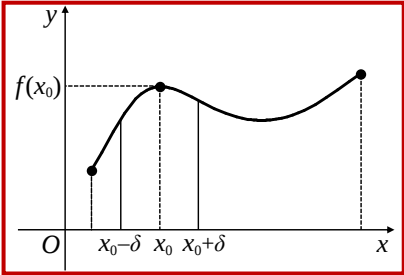


ΕΡΩΤΗΣΗ 65	Πότε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ το τοπικό ελάχιστο της f. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 66	Πότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο ή απλά μέγιστο, το $f(x_0)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 67	Πότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό ελάχιστο ή απλά ελάχιστο, το $f(x_0)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν η ανισότητα $f(x) \geq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 68	Μπορεί ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	<u>Ναι</u>. Βλέπε το διπλανό σχήμα. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 69	Μπορείτε να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$ (απόδειξη στο τέλος) 

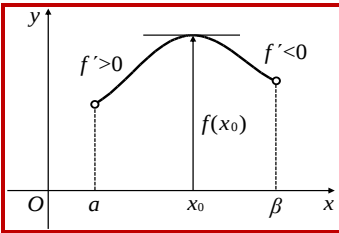
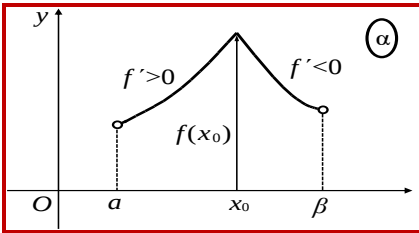
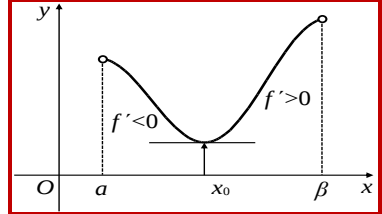
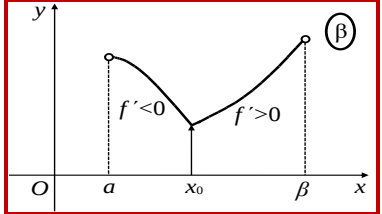
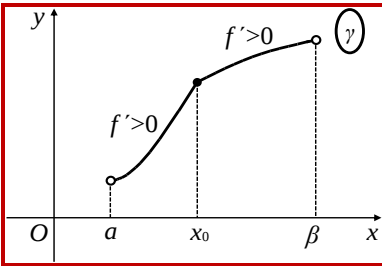
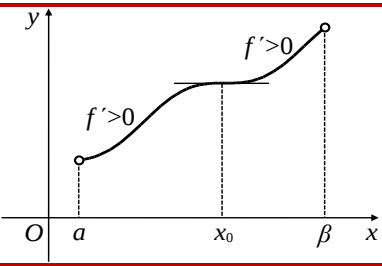
ΕΡΩΤΗΣΗ 70	Ποια είναι η Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Fermat;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 71	Τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, μπορούν να είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι , γιατί αν ήταν θέσεις τοπικών ακροτάτων θα έπρεπε η πρώτη παράγωγος να μηδενίζεται στις θέσεις αυτές.

ΕΡΩΤΗΣΗ 72	Ποια σημεία της f στο διάστημα Δ λέγονται κρίσιμα;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ λέγονται τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.

ΕΡΩΤΗΣΗ 73	Ποιες είναι οι <u>πιθανές θέσεις</u> των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι ➤ Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται. ➤ Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται. ➤ Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της). Δηλαδή τα κρίσιμα σημεία και τα άκρα του Δ

ΕΡΩΤΗΣΗ 74	ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ τι είναι; (σχέδιο α) ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε
-------------------	---

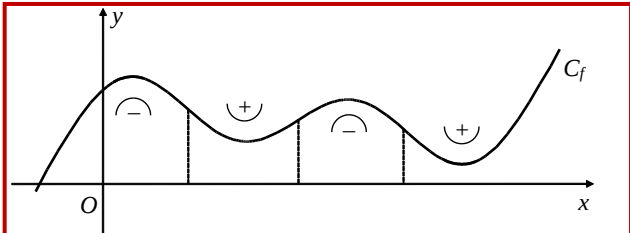
	το $f(x_0)$ τι είναι; (σχέδιο β) iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ τι είναι; (σχέδιο γ) (υπάρχει απόδειξη στο τέλος)
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	i. είναι τοπικό μέγιστο της f. ii. είναι τοπικό ελάχιστο της f. iii. δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).      

ΕΡΩΤΗΣΗ 75	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όπως γνωρίζουμε, η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου τι κάνουμε ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f. 2. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων. 3. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f.

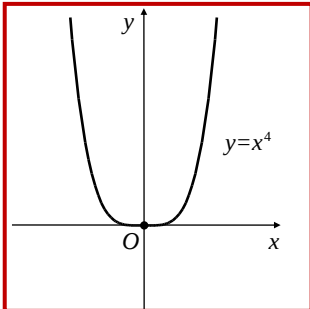
ΕΡΩΤΗΣΗ 76	Σε συνάρτηση f διπλού τύπου για την εύρεση τοπικού ακρότατου στο σημείο x_0 που αλλάζει τύπο η f, δεν μας
------------	---

	ενδιαφέρει η παραγωγισιμότητα;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι, αλλά μόνο η συνέχεια της f στο x_0 και η μονοτονία της f , πριν και μετά το x_0 .

2.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

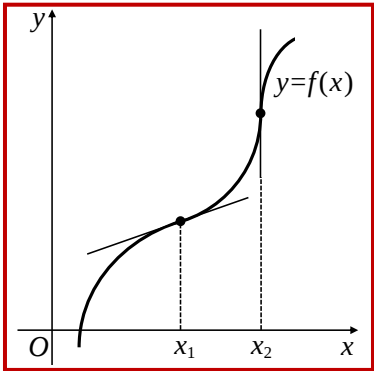
ΕΡΩΤΗΣΗ 77	Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. ➤ Πότε θα λέμε ότι: η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ; και ➤ Πότε η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ. ➤ αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 78	ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. • Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f τι είναι; • Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f τι είναι;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	• η f είναι κυρτή στο Δ. • η f είναι κοίλη στο Δ.

ΕΡΩΤΗΣΗ 79	Το αντίστροφο του θεωρήματος ισχύει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$. Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού 

	$f''(0) = 0$.
--	----------------

ΕΡΩΤΗΣΗ 80	Πως μπορούμε να διατυπώσουμε το θεώρημα αλλιώς ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Για να είναι: • η f κυρτή στο Δ αρκεί να ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε x του Δ • η f κοίλη στο Δ αρκεί να ισχύει $f''(x) \leq 0$ για κάθε x του Δ και η ισότητα και στις δυο περιπτώσεις να ισχύει για διακεκριμένες τιμές του x.

ΕΡΩΤΗΣΗ 81	ΟΡΙΣΜΟΣ Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν • η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και • η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 καμπή και το x_0 λέγεται θέση σημείου καμπής. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f “διαπερνά” την καμπύλη. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 82	ΘΕΩΡΗΜΑ Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε με τι ισούται το $f''(x_0)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Τότε $f''(x_0) = 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 83	Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος ισχύει;
-------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει . Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$. Ισχύει $f''(x) = 12x^2$ δηλ. $f''(0) = 0$. Όμως η f δεν έχει σημείο καμπής στο 0.
-----------------	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 84	Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f'' είναι διαφορετική από το μηδέν, μπορούν να είναι θέσεις σημείων καμπής;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 85	Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και ➤ τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' (βλέπε παραπάνω σχέδιο).

ΕΡΩΤΗΣΗ 86	Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Πότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και ➤ ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$

ΕΡΩΤΗΣΗ 87	Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε $x_0 \in \Delta$, που βρίσκεται;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Βρίσκεται κάτω από την C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Δηλαδή: Για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (Το χρησιμοποιώ χωρίς απόδειξη, απόδειξη στο τέλος)

ΕΡΩΤΗΣΗ 88	Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο Δ τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε $x_0 \in \Delta$, που βρίσκεται;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Βρίσκεται επάνω από την C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Δηλαδή: Για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

2.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ - ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

ΕΡΩΤΗΣΗ 89	ΟΡΙΣΜΟΣ Ποια η ευθεία λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

ΕΡΩΤΗΣΗ 90	ΟΡΙΣΜΟΣ Ποια ευθεία λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

ΕΡΩΤΗΣΗ 91	ΟΡΙΣΜΟΣ Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$, αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 92	ΘΕΩΡΗΜΑ Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}, \text{ αντιστοίχως}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}.$

ΕΡΩΤΗΣΗ 93	Πότε η ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι οριζόντια;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν $\lambda = 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 94	Πότε η ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν $\lambda \neq 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 95	Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι.

ΕΡΩΤΗΣΗ 96	Δίνεται η ρητή συνάρτηση: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, h(x) \neq 0$ 1. Αν ο βαθμός του αριθμητή $g(x)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή $h(x)$, ποια είναι η ασύμπτωτη; 2. Αν ο βαθμός του αριθμητή $g(x)$ είναι ίσος από το βαθμό του παρονομαστή $h(x)$, ποια είναι η ασύμπτωτη; 3. Αν ο βαθμός του αριθμητή $g(x)$ είναι κατά μια μονάδα μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή $h(x)$, ποια είναι η ασύμπτωτη; 4. Αν ο βαθμός του αριθμητή $g(x)$ είναι κατά δυο ή περισσότερες μονάδες μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή, ποια είναι η ασύμπτωτη;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	1. Τότε η ευθεία $\psi=0$ δηλ. ο άξονας xx' είναι οριζόντια ασύμπτωτη. 2. Τότε η ευθεία $\psi=\alpha$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη, όπου α ο λόγος του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του αριθμητή προς το συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του παρονομαστή. 3. Τότε η ευθεία $\psi=\alpha x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη, όπου $\alpha x + \beta$ το πηλίκο της διαίρεσης $g(x) : h(x)$ 4. Τότε δεν υπάρχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη.

ΕΡΩΤΗΣΗ 97	Που αναζητούμε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	• Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται. • Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής. • Στο $+\infty, -\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε

	διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty, \alpha)$.
--	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 98	Μπορείτε να αναφέρετε τον 1^ο Κανόνα de L' Hospital
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υ- πάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

ΕΡΩΤΗΣΗ 99	Μπορείτε να αναφέρετε τον 2^ο Κανόνα de L' Hospital
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

ΕΡΩΤΗΣΗ 100	Το θεώρημα 2 ισχύει και άλλες μορφές;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 101	Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά ό- ρια;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε πε- ρισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

2.10 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 102	Η μελέτη μιας συνάρτησης ποια βήματα περιλαμβάνει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα: 1^ο Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f. 2^ο Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της. 3^ο Βρίσκουμε τις παραγώγους f' και f'' και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f, ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής. 4^ο Μελετούμε τη “συμπεριφορά” της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.) 5^ο Βρίσκουμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες. 6^ο Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ' ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και πίνακας μεταβολών της f και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f. Για καλύτερη σχεδίαση της C_f κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της f.

