

3.1 ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1	ΟΡΙΣΜΟΣ Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$

ΕΡΩΤΗΣΗ 2	ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε έχει άλλες παράγουσες η f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι. • όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και • κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. (έχει απόδειξη)

ΕΡΩΤΗΣΗ 3	Γνωρίζετε τον πίνακα παραγουσών των βασικών συναρτήσεων;																								
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ</th></tr> <tr> <th>Συνάρτηση</th><th>Παράγουσα</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$f(x) = 0$</td><td>$F(x) = c, c \in \mathbb{R}$</td></tr> <tr> <td>$f(x) = 1$</td><td>$F(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$</td></tr> <tr> <td>$f(x) = \frac{1}{x}$</td><td>$F(x) = \ln x + c$</td></tr> <tr> <td>$f(x) = x^\alpha,$</td><td>$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$</td></tr> <tr> <td>$f(x) = \sin x$</td><td>$F(x) = -\cos x + c$</td></tr> <tr> <td>$f(x) = \cos x$</td><td>$F(x) = \sin x + c$</td></tr> <tr> <td>$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$</td><td>$F(x) = -\cot x + c$</td></tr> <tr> <td>$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$</td><td>$F(x) = \tan x + c$</td></tr> <tr> <td>$f(x) = e^x$</td><td>$F(x) = e^x + c$</td></tr> <tr> <td>$f(x) = a^x$</td><td>$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c$</td></tr> </tbody> </table>	ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ		Συνάρτηση	Παράγουσα	$f(x) = 0$	$F(x) = c, c \in \mathbb{R}$	$f(x) = 1$	$F(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$	$f(x) = x^\alpha,$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\cot x + c$	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c$
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ																									
Συνάρτηση	Παράγουσα																								
$f(x) = 0$	$F(x) = c, c \in \mathbb{R}$																								
$f(x) = 1$	$F(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$																								
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$																								
$f(x) = x^\alpha,$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$																								
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$																								
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$																								
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\cot x + c$																								
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$																								
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$																								
$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c$																								

ΕΡΩΤΗΣΗ 4	Γνωρίζετε τον πίνακα των παραγουσών συναρτήσεων που προκύπτουν από τους κανόνες παραγωγίσισης και ως σύνθεση μιας συνάρτησης f με μία βασική συνάρτηση	
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ναι	
	Συνάρτηση	Παράγουσα c πραγματικός
	$\varphi(x) = f'(x) + g'(x)$	$\Phi(x) = f(x) + g(x) + c$
	$\varphi(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$\Phi(x) = f(x) \cdot g(x) + c$
	$\phi(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} =$	$\Phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} + c$
	$\varphi(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = x \cdot f(x) + c$
	$\phi(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}$	$\Phi(x) = \frac{f(x)}{x} + c$
	$\phi(x) = \sin f(x) \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = \eta \mu f(x) + c$
	$\phi(x) = \eta \mu f(x) \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = -\sin f(x) + c$
	$\phi(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$\Phi(x) = \sqrt{f(x)} + c$
	$\phi(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = e^{f(x)} + c$
	$\phi(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$\Phi(x) = \ln f(x) + c$
	$\phi(x) = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$	$\Phi(x) = -\frac{1}{f(x)} + c$
	$\varphi(x) = f(x) \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = \frac{f^2(x)}{2} + c$
	$\varphi(x) = f^v(x) \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = \frac{f^{v+1}(x)}{v+1} + c$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5	Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αποδεικνύεται πως, ναι

ΕΡΩΤΗΣΗ 6	Το αντίστροφο ισχύει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι, γιατί υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ, αλλά έχουν παράγουσα στο διάστημα αυτό π.χ: $f(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής αλλά

	$F(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ έχει παράγουσα στο $\mathbb{R}$ την Άλλο παράδειγμα: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \geq 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αλλά έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό τη συνάρτηση $F(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$
--	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 7	Αν μια συνάρτηση f δεν έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι. Γιατί αν ήταν συνεχής, θα είχε παράγουσα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 8	Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε ποιες είναι οι παράγουσες των συναρτήσεων $f+g$ και λf ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	- Η συνάρτηση $F+G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f+g$ - Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf

ΕΡΩΤΗΣΗ 9	Κάθε συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ , έχει αναγκαστικά παράγουσα;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ -2, & x \in (1,3] \end{cases}$, είναι ορισμένη στο διάστημα $\Delta=[0,3]$, αλλά δεν υπάρχει συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο $\Delta=[0,3]$ τέτοια ώστε $F'(x)=f(x)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 10	Η παράγουσα μιας συνάρτησης μπορεί να αναφέρεται σε ένωση διαστημάτων;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι μόνο σε διάστημα. Π.χ: $f(x) = \frac{1}{x}$ και $F(x) = \ln x$. Ισχύει: $F'(x) = f(x)$ για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Άρα οι παράγουσες της $f(x)$ στο $(-\infty, 0)$ είναι οι $F(x)+c_1$ και στο $(0, +\infty)$ είναι οι $F(x)+c_2$ c_1, c_2 πραγματικοί αριθμοί. Επομένως δεν έχει νόημα η φράση «η παράγουσα της $f(x)$ στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι η $F(x)+c$» Παράδειγμα: $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ με πεδίο ορισμού

	$A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ τότε η συνάρτηση $F(x) = \varepsilon\phi x + c_1$ είναι παράγουσα της f στο αριστερό διάστημα και η $F(x) = \varepsilon\phi x + c_2$ είναι παράγουσα της f στο δεξιό διάστημα.
--	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 11	Υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις, που δεν υπολογίζονται οι παράγουσες τους;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι. όπως οι : $\frac{\eta\mu x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, $\sqrt{\eta\mu x}$, $\frac{1}{\ln x}$, e^{-x^2} , $\eta\mu x^2$.

3.4 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΕΡΩΤΗΣΗ 12	Πως ορίζετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$. Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Δηλαδή: - Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{n}$, με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$. - Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_k και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_k)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι $S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x = [f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)]\Delta x.$ - Υπολογίζουμε το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανε-

ξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k . Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega) \geq 0$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 13

Πως ορίζετε το ορισμένο ολοκλήρωμα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω μια συνάρτηση f **συνεχής** στο $[a, \beta]$. Χωρίζουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta - a}{n}$, έτσι έχουμε τα σημεία $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$. Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_k)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x$

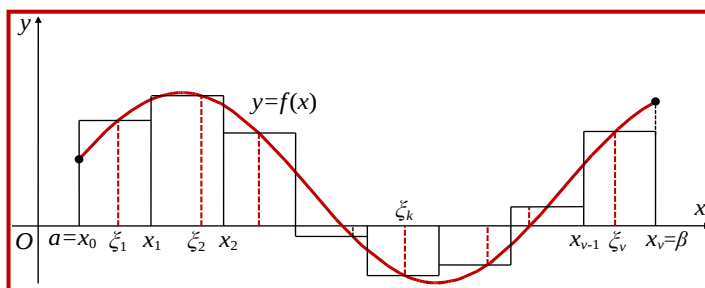
(**άθροισμα RIEMANN**)

Αποδεικνύεται ότι, “Το όριο του αθροίσματος S_n , δηλαδή το $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x \right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_k ”.

Το παραπάνω όριο ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το a στο β , συμβολίζεται με $\int_a^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της f από το a στο β ”. Δηλαδή,

$$\int_a^\beta f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x \right)$$

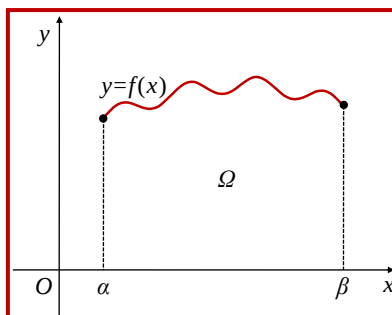
Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται



σύμβολο ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος S της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί a και β ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης. Στην έκφραση $\int_a^\beta f(x)dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και

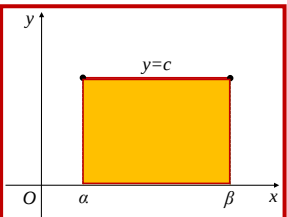
	μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b f(t)dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός, σε αντίθεση με το $\int f(x)dx$ που είναι ένα σύνολο συναρτήσεων. Είναι, όμως, χρήσιμο να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό και για τις περιπτώσεις που είναι $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, ως εξής: • $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ • $\int_a^a f(x)dx = 0$
--	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 14	Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ τι παριστάνει ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (Σχ. 11). Δηλαδή, $\int_a^b f(x)dx = E(\Omega).$ Επομένως, Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.



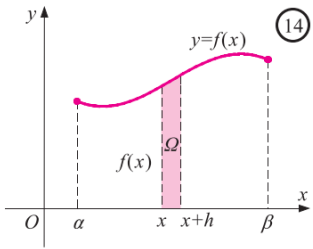
ΕΡΩΤΗΣΗ 15	Ποιες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος γνωρίζετε;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ΘΕΩΡΗΜΑ 1^ο Έστω f, g σ υ ν ε χ ε ί ς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν ➤ $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$ ➤ $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ και γενικά ➤ $\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$

	ΘΕΩΡΗΜΑ 2^ο Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$ ΘΕΩΡΗΜΑ 3^ο Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0.$ Παρατήρηση Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f τότε ισχύει: $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta - \alpha)$
--	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 16	Αν $c > 0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$ τι εκφράζει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c. 

3.5 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$

ΕΡΩΤΗΣΗ 17	ΘΕΩΡΗΜΑ Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ, τότε γνωρίζετε μια παράγουσα της f στο Δ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι, η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$, $x \in \Delta$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει: $\left(\int_{\alpha}^x f(t)dt \right)' = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. (υπάρχει γεωμετρική ερμηνεία)

ΕΡΩΤΗΣΗ 18	Να αναφέρεται τη γεωμετρική ερμηνεία του προηγούμενου θεωρήματος.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	• Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει (Σχ. 14) ως εξής: $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$ = Εμβαδόν του χωρίου Ω $\approx f(x) \cdot h$, για μικρά $h > 0$. Άρα, για μικρά $h > 0$ είναι $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x),$ οπότε $F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$ 

ΕΡΩΤΗΣΗ 19	Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $F(x) = \int_a^x f(t) dt$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ • Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f και το σύνολό στο οποίο είναι συνεχής η f. • Απαιτούμε το a και το x να ανήκουν στην τομή των δυο παραπάνω συνόλων. • Αν το πεδίο ορισμού της f είναι ένωση διαστημάτων, διαλέγουμε ως πεδίο ορισμού της F, εκείνο στο οποίο ανήκει το a

ΕΡΩΤΗΣΗ 20	ΘΕΩΡΗΜΑ Μπορείτε να αναφέρετε το «Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού»;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 21	Το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης τι είναι;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι αριθμός.

ΕΡΩΤΗΣΗ 22	Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[a,b]$ είναι ολοκληρώσιμη σε αυτό;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι.

ΕΡΩΤΗΣΗ 23	Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t)dt$ είναι ένας πραγματικός αριθμός που εξαρτάται από τι;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Εξαρτάται από τα άκρα ολοκλήρωσης a και b και από τις τιμές της f στο κλειστό διάστημα με άκρα a και b και όχι από το γράμμα που παριστάνει την ανεξάρτητη μεταβλητή της f . Δηλαδή $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$

ΕΡΩΤΗΣΗ 24	Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της επιλογής της παράγουσας;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι. Δηλαδή $\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$ και $\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} + 1 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 25	Με τι ισούται το: $\int_a^b f'(t)dt =$ και Με τι ισούται το: $\int_a^b f''(t)dt =$
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Το πρώτο: $\int_a^b f'(t)dt = f(\beta) - f(\alpha)$ και ➤ Το δεύτερο: $\int_a^b f''(t)dt = f'(\beta) - f'(\alpha)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 26	Τι γνωρίζετε για τη παραγοντική ολοκλήρωση;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 27	Τι γνωρίζετε για την αλλαγή μεταβλητής
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 28	Με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες τι μπορούμε να υπολογίσουμε;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μπορούν να υπολογισθούν οι παρακάτω μορφές ολοκληρωμάτων. Όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x και $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}^*, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ ▪ $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) \cdot e^{\alpha x + \beta} dx$ ▪ $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) \cdot \eta\mu(\alpha x + \beta) dx$ ▪ $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha x + \beta) dx$ ▪ $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) \cdot \ln(\alpha x + \beta) dx$ με $\alpha x + \beta > 0$ ▪ $\int_{\alpha}^{\beta} e^{\alpha x + \beta} \cdot \eta\mu(\gamma x + \delta) dx$ ▪ $\int_{\alpha}^{\beta} e^{\alpha x + \beta} \cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta) dx$

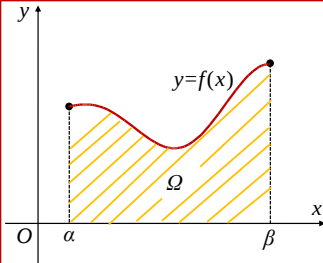
ΕΡΩΤΗΣΗ 29	Πως υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της αντίστροφης συνάρτησης;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Για τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x) dx$, εφόσον δεν είναι δυνατόν να υπολογίσουμε τη συνάρτηση f^{-1} εργαζόμαστε ως εξής : Θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(u)$ Τότε $dx = f'(u) \cdot du$ Τα νέα άκρα ολοκλήρωσης είναι u_1 και u_2 αντίστοιχα ώστε $\begin{cases} f(u_1) = \alpha \\ f(u_2) = \beta \end{cases}$ οι οποίες είναι μοναδικές, αφού η συνάρτηση f είναι 1-1. Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται λόγω των παραπάνω σχέσεων θα γίνει $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} u \cdot f'(u) du$ το οποίο και το υπολογίσουμε συνήθως με παραγοντική ολοκλήρωση.

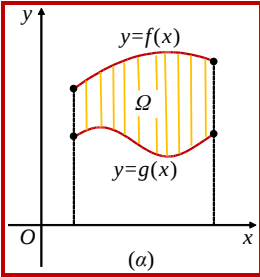
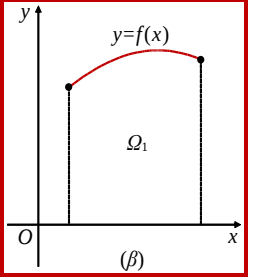
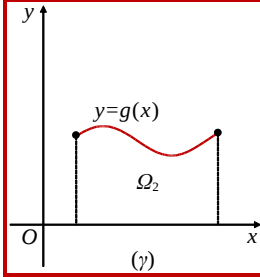
ΕΡΩΤΗΣΗ 30	Πως υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της άρτιας συνάρτησης;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν η συνάρτηση f είναι άρτια τότε ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx \text{ (απόδειξη στο τέλος)}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 31	Πως υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της περιττής συ-
-------------------	--

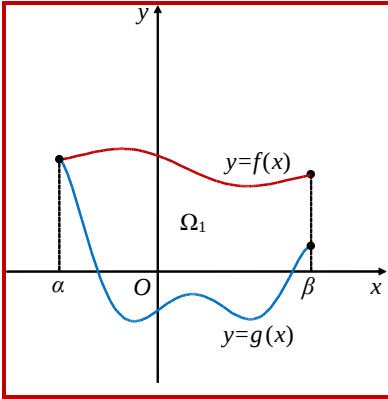
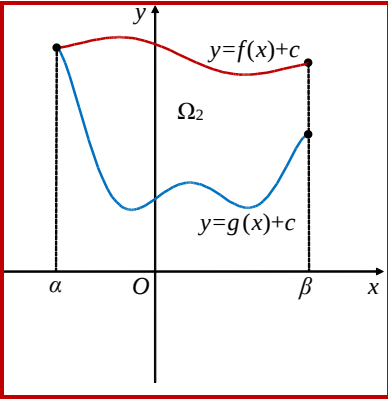
	νάρτησης;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν η συνάρτηση f είναι περιττή τότε ισχύει $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ (απόδειξη στο τέλος)

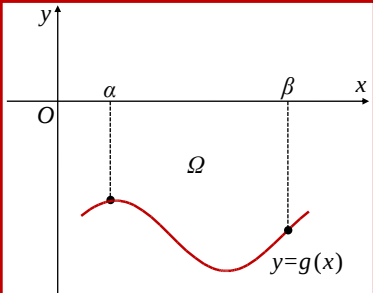
3.7 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

ΕΡΩΤΗΣΗ 32	Πρώτη περίπτωση Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$, ποιο είναι ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ 

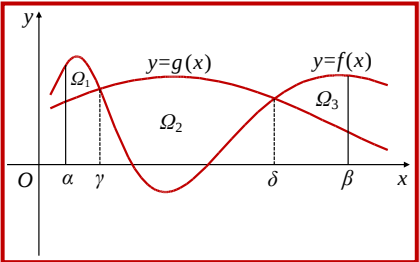
ΕΡΩΤΗΣΗ 33	Δεύτερη περίπτωση Έστω, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Με τι ισούται το εμβαδόν του χωρίου αυτού;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	   Παρατηρούμε ότι $E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$ Επομένως, $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$

	Ο παραπάνω τύπος βρέθηκε με τις προϋποθέσεις ότι: (α) $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και (β) οι f, g είναι μη αρνητικές στο $[\alpha, \beta]$.
--	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 34	Τρίτη περίπτωση Τι γίνεται αν δεν ισχύει η δεύτερη προϋπόθεση; δηλαδή οι f, g <u>δεν είναι</u> μη αρνητικές στο $[\alpha, \beta]$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρξει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω_1 έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω_2.   Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε: $E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x) + c) - (g(x) + c)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$ Άρα, $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$

ΕΡΩΤΗΣΗ 35	Τέταρτη περίπτωση Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0$, έχουμε $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$ $= \int_{\alpha}^{\beta} [-g(x)] dx = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx.$ 

	Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$
--	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 36	Πέμπτη περίπτωση Όταν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, πως το υπολογίζουμε;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το εμβαδόν Ω είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3. Δηλαδή, $\begin{aligned} E(\Omega) &= E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = \int_{\alpha}^{\gamma} (f(x) - g(x)) dx \\ &+ \int_{\gamma}^{\delta} (g(x) - f(x)) dx + \int_{\delta}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) - g(x) dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x) - g(x) dx + \int_{\delta}^{\beta} f(x) - g(x) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) - g(x) dx \end{aligned}$ Επομένως, $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) - g(x) dx$ 

ΕΡΩΤΗΣΗ 37	Τι παριστάνει το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Παριστάνει το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x ή μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x. 