

1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1	Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2	Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$

ΕΡΩΤΗΣΗ 3	Πότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο B και τι συμβολίζει το $f(B)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Θα λέμε ότι “ Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο B ”, όταν το B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Στην περίπτωση αυτή με $f(B)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των τιμών της f σε κάθε $x \in B$. Είναι δηλαδή: $f(B) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in B\}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4	Τι λέγεται γραφική παράσταση της f και πως συμβολίζεται;
------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y=f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f . Η εξίσωση, λοιπόν, $y=f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f . Επομένως, η $y=f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f .

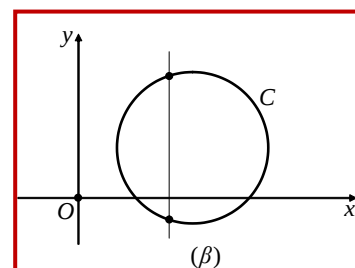
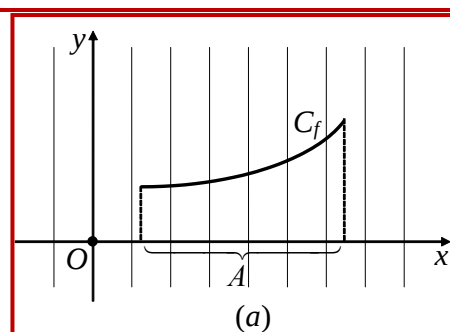
ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Ο κύκλος αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο.

Έτσι, ο **κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης**

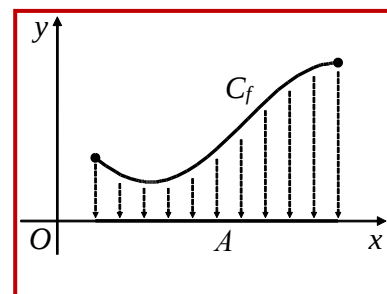
**ΕΡΩΤΗΣΗ 6**

Πως βρίσκουμε το πεδίο ορισμού A μιας συνάρτησης όταν γνωρίζουμε τη γραφική της παράσταση;

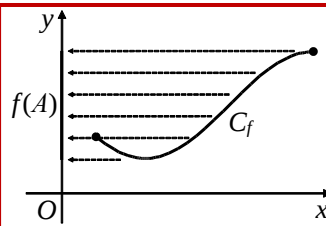
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

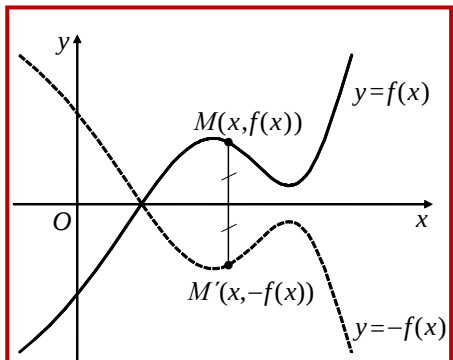
Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f , τότε:

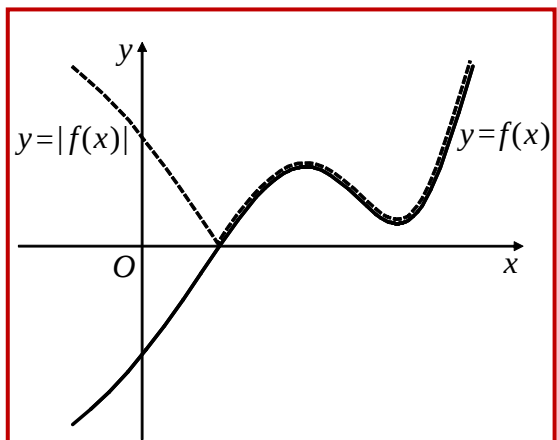
Το **πεδίο ορισμού** της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f .

**ΕΡΩΤΗΣΗ 7**

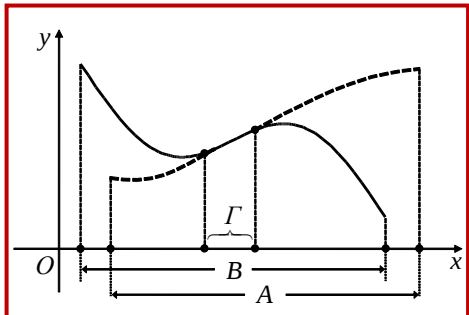
Πως βρίσκουμε το σύνολο τιμών $f(A)$ μιας συνάρτησης όταν γνωρίζουμε

	τη γραφική της παράσταση;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε: Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 8	Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f, μιας συνάρτησης f πως μπορούμε, να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 9	Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f, μιας συνάρτησης f πως μπορούμε, να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 10	Πότε δυο συναρτήσεις λέγονται ίσες
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν: ➤ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και ➤ για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 11	Μπορούν δυο συναρτήσεις με διαφορετικό πεδίο ορισμού και ίσως διαφορετικό τύπο να είναι ίσες;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B. Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2 + x}{x},$ που έχουν πεδία ορισμού τα σύνολα $A = \mathbb{R} - \{1\}$ και $B = \mathbb{R} - \{0\}$ αντιστοίχως, είναι ίσες στο σύνολο $\Gamma = \mathbb{R} - \{0, 1\}$, αφού για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x) = x + 1$. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 12	Πως ορίζονται η πρόσθεση κι η διαφορά μεταξύ συναρτήσεων ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$ και διαφορά $f - g$, δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$ Το πεδίο ορισμού των $f + g, f - g$ είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως.

ΕΡΩΤΗΣΗ 13	Πως ορίζονται το γινόμενο κι το πηλίκο μεταξύ συναρτήσεων ;
-------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ορίζουμε ως **γινόμενο** $f \cdot g$ και **πηλίκο** $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Το πεδίο ορισμού της $f \cdot g$ είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον g

παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο $\{x | x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 14

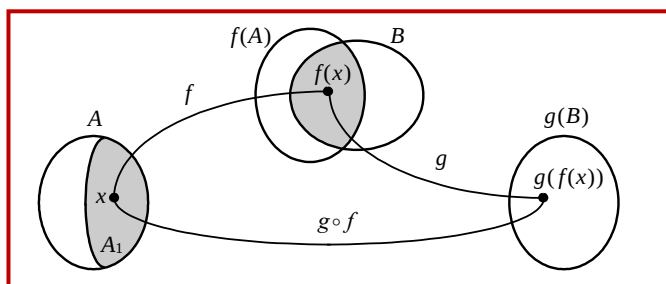
Τι ονομάζουμε σύνθεση συναρτήσεων της f με τη g ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** , και τη συμβολίζουμε με **$g \circ f$** , τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή το σύνολο $A_1 = \{x \in A | f(x) \in B\}$.

Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

**ΕΡΩΤΗΣΗ 15**

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Όχι γενικά ισχύει $\text{gof} \neq \text{fog}$ π.χ: $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$
 Ισχύει $(\text{gof})(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{\ln x}$, για κάθε $x \in [1+\infty)$ και
 $(\text{fog})(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \ln \sqrt{x}$, για κάθε $x \in (0+\infty)$. Άρα
 $\text{gof} \neq \text{fog}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 16

Με τρεις συναρτήσεις τι γίνεται;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $\text{ho}(\text{gof})$, τότε ορίζεται και η $(\text{hog})\text{of}$ και ισχύει $\text{ho}(\text{gof}) = (\text{hog})\text{of}$.

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε **σύνθεση των f, g και h** και τη συμβολίζουμε με hogof . Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

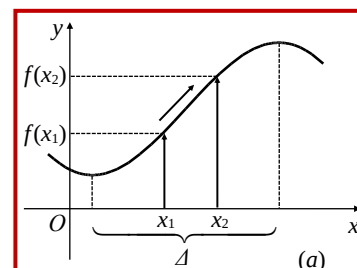
1.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ -ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΗ 17

Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

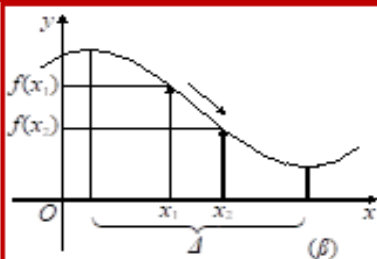
Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1 και x_2 στοιχεία του Δ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε για οποιαδήποτε x_1 και x_2 στοιχεία του Δ ισχύει η **ισοδυναμία** $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

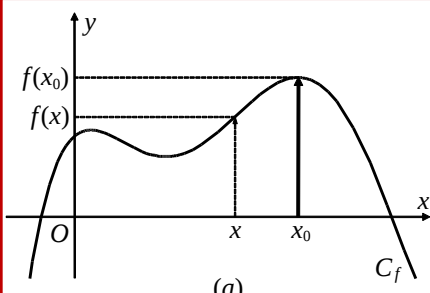
ΕΡΩΤΗΣΗ 18

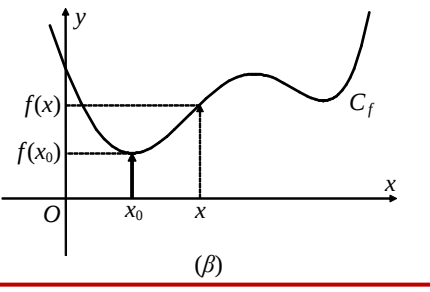
Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως φθίνουσα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1 και x_2 στοιχεία του Δ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$	
-----------------	---	---

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε για οποιαδήποτε x_1 και x_2 στοιχεία του Δ ισχύει η ισοδυναμία $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
-------------------	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 19	Πότε μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της Δ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

ΕΡΩΤΗΣΗ 20	Πότε μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο;	
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο όταν: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$	

ΕΡΩΤΗΣΗ 21	Πότε μια συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο όταν: $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$ 

ΕΡΩΤΗΣΗ 22	Αν η f είναι γνησίως μονότονη σε ανοιχτό διάστημα (α, β) τότε η f στο διάστημα αυτό έχει ακρότατα;
-------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι
-----------------	-----

ΕΡΩΤΗΣΗ 23	Αν η f είναι γνησίως μονότονη σε κλειστό διάστημα $[a,b]$ τότε η f έχει ακρότατα;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι έχει ακρότατα στα σημεία a, b .

ΕΡΩΤΗΣΗ 24	Πότε μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση « 1-1 »;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1 , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

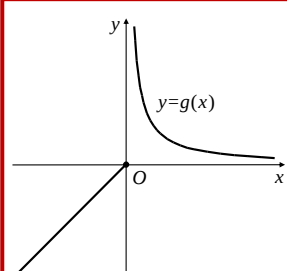
ΕΡΩΤΗΣΗ 25	Να αναφέρεται και άλλο ορισμό για τη συνάρτηση «1-1»
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1 , αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 26	Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν: Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ακριβώς μια λύση ως προς x .

ΕΡΩΤΗΣΗ 27	Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν: Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Την ίδια τεταγμένη

ΕΡΩΤΗΣΗ 28	Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν: κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Σε ένα σημείο .

ΕΡΩΤΗΣΗ 29	Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση "1-1";
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι. Π.χ $f_1(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha \neq 0$,

ΕΡΩΤΗΣΗ 30	Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι «1-1» αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι π.χ. η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$ 

ΕΡΩΤΗΣΗ 31	Πως μπορούμε να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1-1 ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Με τον 1 ^ο ορισμό : ξεκινάμε έστω $x_1 \neq x_2$ και καταλήγουμε στο $f(x_1) \neq f(x_2)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 32	Πως μπορούμε να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1-1 με άλλο τρόπο ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Με τον 2 ^ο ορισμό: Υποθέτουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ και καταλήγουμε στο $x_1 = x_2$, οπότε συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1.

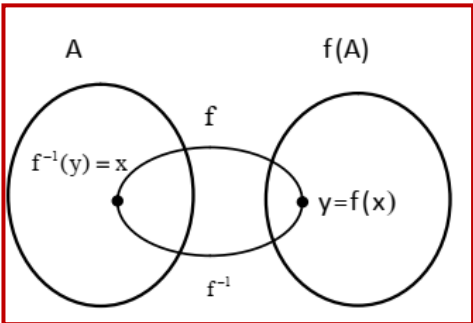
ΕΡΩΤΗΣΗ 33	Άλλος τρόπος υπάρχει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι, Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1.

ΕΡΩΤΗΣΗ 34	Πως καταλαβαίνουμε ότι η συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι "1-1";
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	- Αν υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ για τα οποία ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. - Αν υπάρχει ευθεία παράλληλη στον άξονα xx' η οποία θα τέμνει τη C_f σε δύο τουλάχιστον σημεία. Π.χ: $f(x) = x^2$.

	• Αν η f δεν είναι μονότονη τότε δεν είναι «1-1».
--	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 35	Αν η f είναι «1-1» και $y \in f(A)$ τότε η εξίσωση $y = f(x)$ πόσες λύσεις έχει ως προς x ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έχει μοναδική λύση ως προς x . Γιατί αν είχε έστω 2 λύσεις, τότε δυο πρότυπα θα είχαν ίδια εικόνα άρα όχι «1-1» άτοπο.

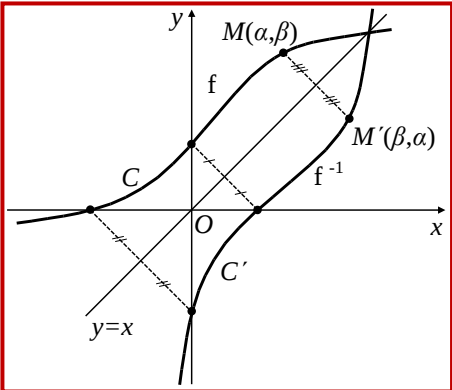
ΕΡΩΤΗΣΗ 36	Αν η f δεν είναι «1-1» τότε μπορεί να είναι μονότονη;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Προφανώς όχι.

ΕΡΩΤΗΣΗ 37	Πως ορίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση της f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathcal{R}$ η οποία είναι «1-1». Ορίζουμε αντίστροφη συνάρτηση της f και τη συμβολίζουμε με, f^{-1} την συνάρτηση με πεδίο ορισμού $f(A)$ (το σύνολο τιμών της f) τέτοια ώστε σε κάθε $y=f(x)$ που ανήκει στο $f(A)$ να αντιστοιχίζεται στο $x \in A$. Δηλαδή $f^{-1}(y) = x$ 

ΕΡΩΤΗΣΗ 38	Ποιες είναι οι βασικές σχέσεις που ισχύουν στην αντίστροφη;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	• $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ • $f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A$ • $f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 39	Ποιο είναι το Πεδίο ορισμού της f^{-1} ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι το Σύνολο Τιμών της f

ΕΡΩΤΗΣΗ 40	Ποιο είναι το Σύνολο Τιμών της f^{-1}
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι το Πεδίο Ορισμού της f

ΕΡΩΤΗΣΗ 41	Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} , τι σχέση έχουν;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. Ισχύει $f(x) = \psi \Leftrightarrow f^{-1}(\psi) = x$ Αν ένα σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, τότε το σημείο $M'(\beta, a)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}. Τα σημεία όμως M και M' είναι συμμετρικά ως προς τη πρώτη διχοτόμο. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 42	Τι κάνουμε για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας συνάρτησης f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1». ➤ Θέτουμε $f(x) = y$ και λύνουμε ως προς x. ➤ Αντικαθιστούμε όπου $x = f^{-1}(y)$ και βρίσκουμε τον τύπο της αντίστροφης. ➤ Τέλος βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

ΕΡΩΤΗΣΗ 43	Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε η f μπορεί να είναι «1-1»;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι, γιατί αν ήταν «1-1» θα ήταν αντιστρέψιμη.

ΕΡΩΤΗΣΗ 44	Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε η f μπορεί να είναι γνησίως μονότονη;
-------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι , γιατί αν ήταν γνησίως μονότονη θα ήταν «1-1» άρα αντιστρέψιμη, άτοπο.
-----------------	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 45	Αν η f είναι «1-1» τότε η f^{-1} τι είναι;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	είναι «1-1» και ισχύει: $(f^{-1})^{-1} = f$ (Αποδ. Σελ: 10 φυλλαδίου θεωρίας)

ΕΡΩΤΗΣΗ 46	Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε αντιστρέφεται;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι , γιατί αν είναι γνησίως μονότονη θα είναι «1-1»

ΕΡΩΤΗΣΗ 47	Αν η f δεν είναι γνησίως μονότονη τότε η f αντιστρέφεται;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν η f δεν είναι γνησίως μονότονη τότε η f δεν σημαίνει ότι δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμη. Π.χ: $f(x) = \begin{cases} x & \text{για } -1 \leq x \leq 0 \\ x+3 & \text{για } -2 < x < -1 \end{cases}$

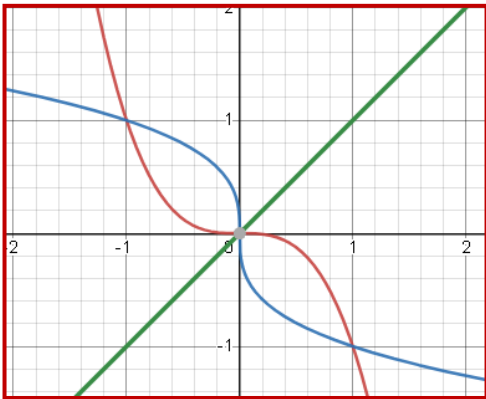
ΕΡΩΤΗΣΗ 48	Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης τι μονοτονία έχει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας . (Αποδ. Σελ: 11 φυλλαδίου θεωρίας)

ΕΡΩΤΗΣΗ 49	Πώς μπορούμε να βρούμε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $\psi=x$ (πρώτη διχοτόμο);
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} και είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $\psi=x$, προκύπτει ότι οι εξισώσεις $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=x$ είναι ισοδύναμες δηλαδή : $f(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=x$ Έτσι λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις μπορούμε να βρούμε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $\psi=x$

ΕΡΩΤΗΣΗ 50	Πως βρίσκουμε τα κοινά σημεία της C_f και της $C_{f^{-1}}$,αν η f είναι γνησίως αύξουσα;
-------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι γνησίως αύξουσα τότε οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$ (1) και $f(x) = x$ (2) και $f^{-1}(x) = x$ (3) είναι ισοδύναμες (έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων). Άρα αντί να λύσω την (1) λύνω την (2) ή την (3). <u>Αυτό θέλει απόδειξη (στο τέλος)</u>
-----------------	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 51	Όταν η f είναι γνησίως φθίνουσα ισχύει το παραπάνω;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι π.χ.: $f(x) = \frac{1}{x}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, η αντίστροφη είναι $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ και η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ έχει λύση κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, ενώ η εξίσωση $f(x) = x$ έχει λύση όταν $x = +1, -1$, άρα οι (1), (2) δεν είναι ισοδύναμες.

ΕΡΩΤΗΣΗ 52	Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, τότε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} πως τα υπολογίζουμε;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Τα υπολογίζουμε από τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} \psi = f(x) \\ \psi = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = f(x) \\ x = f^{-1}(\psi) \end{cases}$.Σε αυτή την περίπτωση δεν είναι απαραίτητο τα κοινά σημεία να βρίσκονται επάνω στην ευθεία $y = x$. Π.χ: $f(x) = -x^3 \text{ (κόκκινη),}$ $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$ (μπλε). 

ΕΡΩΤΗΣΗ 53	Πότε αντιστρέφεται μια συνάρτηση με πολλούς κλάδους;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση με πολλούς κλάδους αντιστρέφεται μόνο όταν ➤ Κάθε κλάδος της είναι “1-1” και ➤ Τα σύνολα τιμών των επιμέρους κλάδων είναι ξένα μεταξύ τους.

ΕΡΩΤΗΣΗ 54	Τι σχέση έχει η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση;
-------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

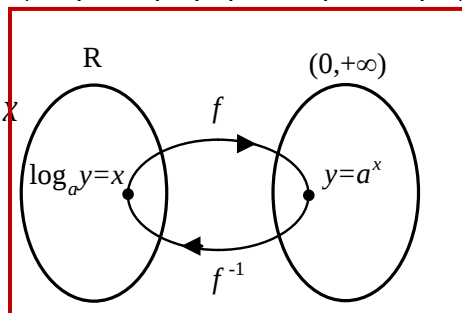
Παρατηρούμε ότι η λογαριθμική συνάρτηση είναι η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης
 Δηλαδή:

$$\triangleright f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$\triangleright a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$$

$$\triangleright e^x = \psi \Leftrightarrow x = \ln \psi, \quad \psi > 0$$

$$\triangleright f(x) = e^x = \psi \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln \psi \quad \text{ή} \quad f^{-1}(x) = \ln x$$



1.4 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

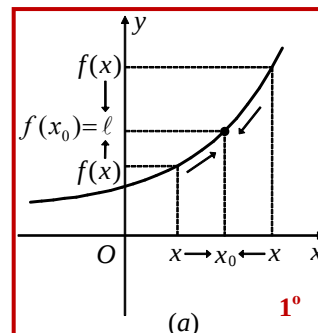
ΕΡΩΤΗΣΗ 55

Να αναφέρεται τον ορισμό του ορίου καθώς το $x \rightarrow x_0$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 , τότε γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και διαβάζουμε:

“το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 , είναι ℓ ” ή “το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ ”.

**ΕΡΩΤΗΣΗ 56**

Που πρέπει να ορίζεται η f ώστε να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0 ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

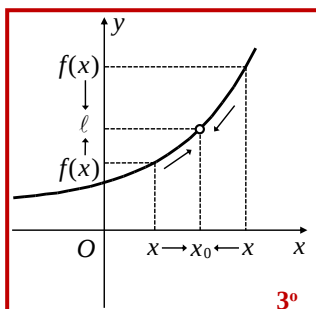
Πρέπει η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0, β) .

ΕΡΩΤΗΣΗ 57

Το x_0 μπορεί να μην ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

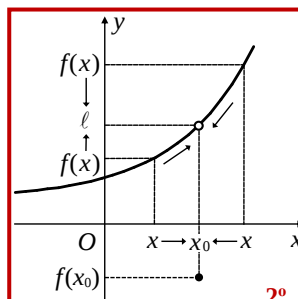
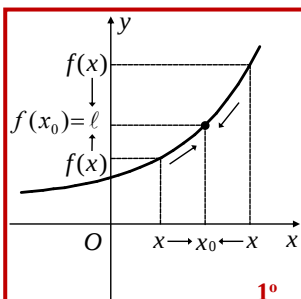
Ναι βλέπε το σχήμα.

**ΕΡΩΤΗΣΗ 58**

Η τιμή της f στο X_0 , όταν υπάρχει, μπορεί να είναι διαφορετική με το όριο της στο X_0 ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Μπορεί να είναι και ίση και διαφορετική. Βλέπε τα σχήματα .

**ΕΡΩΤΗΣΗ 59**

Πως ορίζονται τα πλευρικά όρια της f καθώς το $x \rightarrow x_0$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_1 , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές ($x < x_0$), τότε γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_1$ (Πλευρικό όριο της f από αριστερά).
- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_2 , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$), τότε γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_2$ (Πλευρικό όριο της f από δεξιά).

ΕΡΩΤΗΣΗ 60

Ποιες ισοδυναμίες ισχύουν ως άμεσες συνέπειες του ορισμού του ορίου ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	• Ισχύουν οι ισοδυναμίες: ➤ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$ ➤ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$
-----------------	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 61	Πως συνδέεται το όριο με τα πλευρικά όρια ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Για να υπάρχει το όριο της f στο x_0 θα πρέπει να υπάρχουν τα πλευρικά όρια και να είναι ίσα δηλαδή: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$

ΕΡΩΤΗΣΗ 62	Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0), τότε πως ορίζουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αφού η f ορίζεται δεξιά του x_0, το όριο θα το ορίσουμε με την βοήθεια των πλευρικών ορίων, δηλαδή: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 63	Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β), τότε πως ορίζουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αφού η f ορίζεται αριστερά του x_0, το όριο θα το ορίσουμε με την βοήθεια των πλευρικών ορίων, δηλαδή: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 64	Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ εξαρτάται από τα α, β;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α, β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0, β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f.

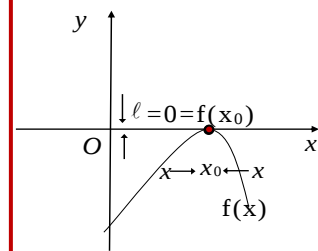
ΕΡΩΤΗΣΗ 65	Με τι ισούται το όριο της ταυτοτικής και της σταθερής συνάρτησης καθώς το $x \rightarrow x_0$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου αποδεικνύεται ότι: • $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ • $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

1.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

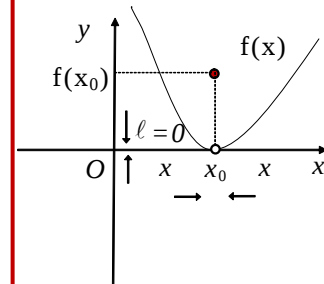
ΕΡΩΤΗΣΗ 66	Ποιες ανισότητες γνωρίζετε στα όρια ; (όριο και διάταξη)
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 • Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 • Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 τότε ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 67	Τα αντίστροφα των παραπάνω ισχύουν;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ισχύουν αλλά παραλλαγμένα δηλαδή: • Αν $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, τότε ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$ • Αν $f(x) \leq 0$ κοντά στο x_0, τότε ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$ • Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε ισχύει ότι $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0

ΕΡΩΤΗΣΗ 68	Ποιες συνεπαγωγές δεν ισχύουν στα όρια;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$, τότε δεν ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0

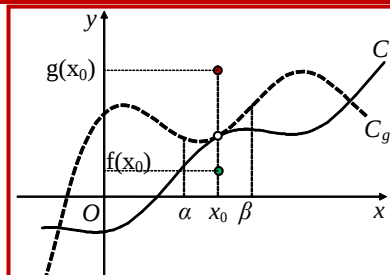


- Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε **δεν ισχύει** ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ αλλά ισχύει:
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$

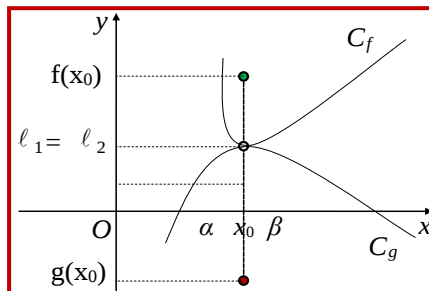


- Ομοίως αν $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε **δεν ισχύει** ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ αλλά ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$

- Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε **δεν ισχύει** ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ αλλά ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$



- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε **δεν ισχύει** ότι $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 .

**ΕΡΩΤΗΣΗ 69**

Ποιες είναι οι ιδιότητες των ορίων αν το $x \rightarrow$ στο x_0 ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο X_0 , τότε:

1. $\lim_{x \rightarrow X_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow X_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow X_0} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow X_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \rightarrow X_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{x \rightarrow X_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow X_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow X_0} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow X_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow X_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow X_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x \rightarrow X_0} g(x) \neq 0$
5. $\lim_{x \rightarrow X_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow X_0} f(x) \right|$
6. $\lim_{x \rightarrow X_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow X_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο X_0
7. $\lim_{x \rightarrow X_0} [f(x)]^v = \left[\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) \right]^v$, $v \in \mathbb{N}^*$

ΕΡΩΤΗΣΗ 70

Με τι ισούται το $\lim_{x \rightarrow X_0} x^v$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Σύμφωνα με την ιδιότητα 7 έχω :

$$\lim_{x \rightarrow X_0} x^v = \left(\lim_{x \rightarrow X_0} x \right)^v \stackrel{\text{βασικό όριο}}{\stackrel{\text{της 1.4}}{=}} (X_0)^v = X_0^v$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 71

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $X_0 \in \mathbb{R}$. Με το ισούται το $\lim_{x \rightarrow X_0} P(x)$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow X_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow X_0} (a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow X_0} (a_v x^v) + \lim_{x \rightarrow X_0} (a_{v-1} x^{v-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow X_0} a_0 \\ &= a_v \lim_{x \rightarrow X_0} x^v + a_{v-1} \lim_{x \rightarrow X_0} x^{v-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow X_0} a_0 \\ &= a_v X_0^v + a_{v-1} X_0^{v-1} + \dots + a_0 = P(X_0). \text{ Επομένως, } \lim_{x \rightarrow X_0} P(x) = P(X_0) \end{aligned}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 72

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Με τι ισούται το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Σύμφωνα με τις ιδιότητες ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0) \neq 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 73

Πως διατυπώνεται το κριτήριο παρεμβολής;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

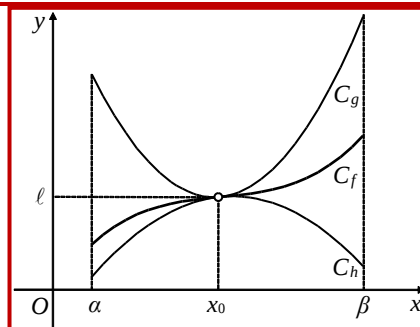
• $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0
και

• $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

Παρατήρηση: το παραπάνω

θεώρημα ισχύει και όταν μια από τις ανισώσεις ή και οι δυο είναι γνήσιες.

**ΕΡΩΤΗΣΗ 74**

Ποια βασική τριγωνομετρική σχέση γνωρίζεται ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αποδεικνύεται ότι: $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$) (η απόδειξη εκτός)

ΕΡΩΤΗΣΗ 75

Με τι ισοούνται τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αποδεικνύεται ότι : $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

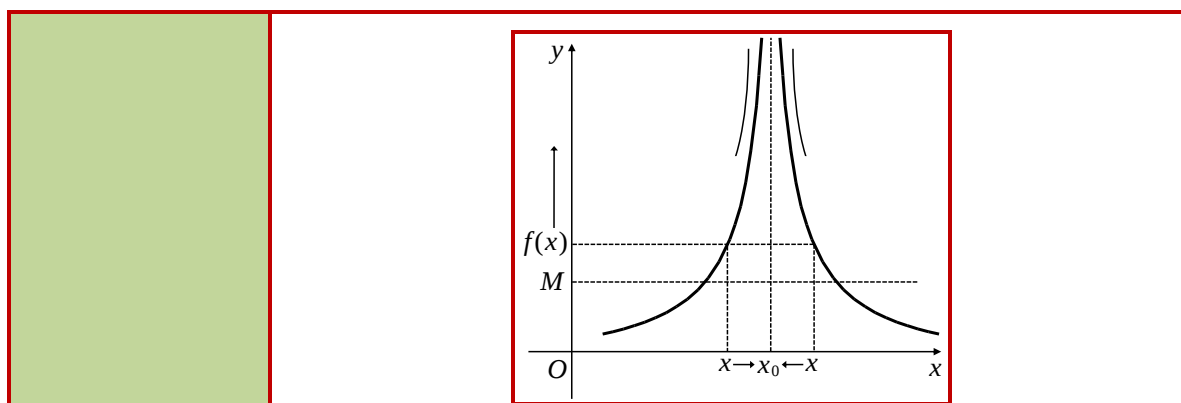
(απόδειξη εκτός)

ΕΡΩΤΗΣΗ 76	Ποια είναι τα βασικά τριγωνομετρικά όρια ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ $\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0 \text{ (οι αποδείξεις εκτός)}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 77	Πως υπολογίζουμε το όριο σύνθετης συνάρτησης ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0, τότε εργαζόμαστε ως εξής: 1. Θέτουμε $u = g(x)$. 2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και 3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$. Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u).$

1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

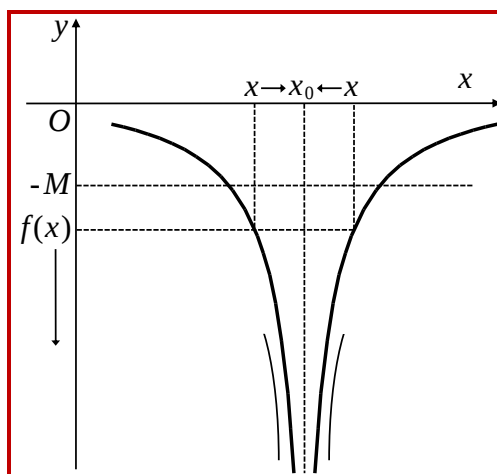
ΕΡΩΤΗΣΗ 78	Πως ορίζουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ με απλά λόγια ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R}$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι καθώς το x πλησιάζει το x_0 με οποιοδήποτε τρόπο, (από τα αριστερά και από τα δεξιά), οι τιμές $f(x)$ αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από κάθε θετικό πραγματικό αριθμό M. Σε κάθε τέτοια περίπτωση θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο το $+\infty$ και θα γράφουμε ότι : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$

**ΕΡΩΤΗΣΗ 79**

Πως ορίζουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ με απλά λόγια ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R}$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι καθώς το x πλησιάζει το x_0 (από τα αριστερά και από τα δεξιά) οι τιμές $f(x)$ ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από κάθε αρνητικό πραγματικό αριθμό $-M$ ($M > 0$). Σε κάθε τέτοια περίπτωση θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο το $-\infty$ και θα γράφουμε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$
**ΕΡΩΤΗΣΗ 80**

Ποιες είναι οι ισοδυναμίες που συνδέουν το όριο με τα πλευρικά όρια;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για τις συναρτήσεις, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} \text{➤ } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \\ \text{➤ } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 81	Ποιες ιδιότητες γνωρίζετε για τα μη πεπερασμένα όρια στο x_0;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0. • Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$, ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$. • Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$. • Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$. • Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$. • Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.
ΕΡΩΤΗΣΗ 82	Με τι ισούνται τα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Με την βοήθεια των παραπάνω ιδιοτήτων προκύπτει:

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ και γενικά}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ και γενικά}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

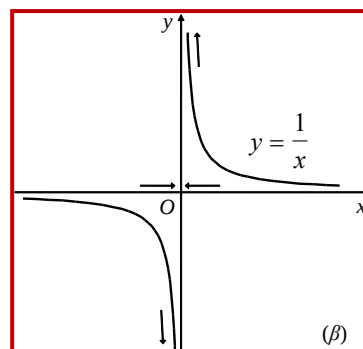
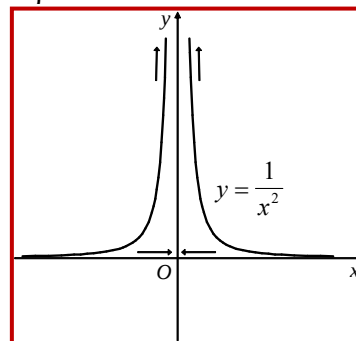
$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ και γενικά}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της

$$f(x) = \frac{1}{x^{2\nu+1}}, \quad \nu \in \mathbb{N} \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$$

**ΕΡΩΤΗΣΗ 83**

Τι γνωρίζετε για τα όρια του αθροίσματος δύο συναρτήσεων

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για τα όρια του αθροίσματος δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$						
το όριο της f είναι:	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΕΡΩΤΗΣΗ 84

Τι γνωρίζετε για τα όρια του γινομένου δυο συναρτήσεων;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για τα όρια του γινομένου δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$,										
το όριο της f είναι:	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

ΕΡΩΤΗΣΗ 85

Ποιες απροσδιόριστες μορφές γνωρίζεται;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\triangleright (+\infty) + (-\infty)$$

$$\triangleright 0 \cdot (\pm\infty).$$

$$\triangleright (+\infty) - (+\infty)$$

$$\triangleright (-\infty) - (-\infty)$$

$$\triangleright \frac{0}{0}$$

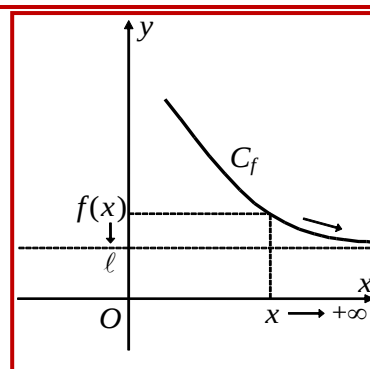
$$\triangleright \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

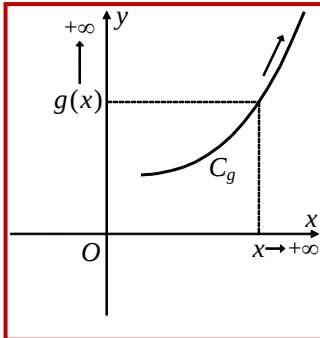
1.7 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ**ΕΡΩΤΗΣΗ 86**

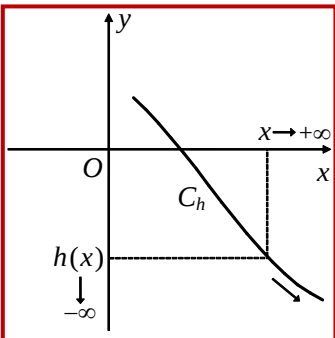
Πως θα ορίσουμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ με απλά λόγια;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απειρίωστα με οποιονδήποτε τρόπο, το $f(x)$ προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ . Σε κάθε τέτοια περίπτωση γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$


ΕΡΩΤΗΣΗ 87	Πως θα ορίσουμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ με απλά λόγια;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g, παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το $g(x)$ αυξάνεται απεριόριστα. Σε κάθε τέτοια περίπτωση γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ 

ΕΡΩΤΗΣΗ 88	Πως θα ορίσουμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ με απλά λόγια;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το $h(x)$ ελαττώνεται απεριόριστα. Σε κάθε τέτοια περίπτωση γράφουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ 

ΕΡΩΤΗΣΗ 89	Που πρέπει να είναι ορισμένη η f για να αναζητήσουμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 90	Που πρέπει να είναι ορισμένη η f για να αναζητήσουμε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $-\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 91	Ποια βασικά όρια γνωρίζεται όταν $x \rightarrow \pm\infty$
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	$\triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0$, $v \in \mathbb{N}^*$ $\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0$, $v \in \mathbb{N}^*$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 92	Τι γνωρίζεται για το όριο της πολυωνυμικής συνάρτησης όταν $x \rightarrow \pm\infty$
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0$, με $\alpha_v \neq 0$ ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_v x^v)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_v x^v)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 93	Τι γνωρίζεται για το όριο της ρητής συνάρτησης όταν $x \rightarrow \pm\infty$
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_v \neq 0$, $\beta_\kappa \neq 0$ ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 94	Τι γνωρίζετε για όρια της εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης καθώς $x \rightarrow \pm\infty$;
-------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αποδεικνύεται ότι

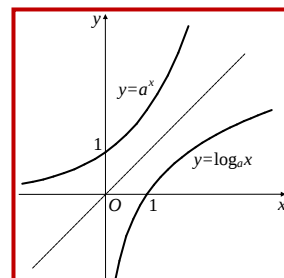
- Αν $\alpha > 1$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\alpha} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = +\infty$$



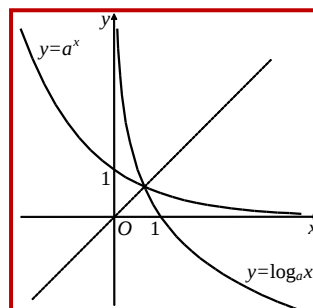
- Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\alpha} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = -\infty$$



- Επίσης ισχύουν :

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 95

Οι γνωστές ιδιότητες των ορίων ισχύουν και για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

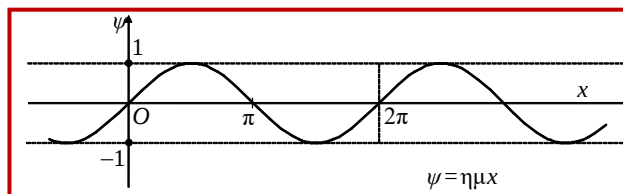
Ναι, με την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

ΕΡΩΤΗΣΗ 96

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\epsilon\phi x$, $\sigma\phi x$ έχουν όριο στο $+\infty$ και στο $-\infty$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\epsilon\phi x$, $\sigma\phi x$ δεν έχουν όριο στο $+\infty$ και στο $-\infty$. Π.χ: $f(x) = \eta\mu x$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ	Έστω f, g δυο συναρτήσεις ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ τότε : 1. Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ Τότε θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ 2. Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ Τότε θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$
-------------------	---

1.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 97	Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της x_0 ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 98	Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν: ➤ Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή ➤ Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

ΕΡΩΤΗΣΗ 99	Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα $[a, \beta]$ τότε για να είναι συνεχής στα άκρα a και β τι θα πρέπει να ισχύει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα $[a, \beta]$ τότε για να είναι συνεχής στα άκρα a, β θα πρέπει να ισχύει : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$

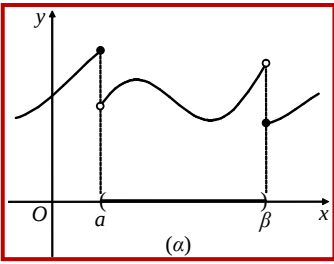
ΕΡΩΤΗΣΗ 100	Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, συνεχής συνάρτηση .

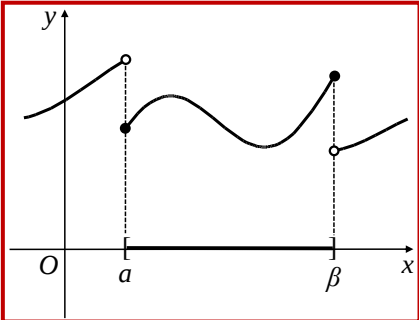
ΕΡΩΤΗΣΗ 101	Ποιες συνεχείς συναρτήσεις γνωρίζεται ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Οι πολυωνυμικές , οι ρητές, οι τριγωνομετρικές, η εκθετική και η λογαριθμική είναι συνεχείς συναρτήσεις.

ΕΡΩΤΗΣΗ 102	Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, οι συναρτήσεις που προκύπτουν από τις πράξεις μεταξύ των f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις;						
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις <table><tr><td>$f + g$</td><td>$c \cdot f$ όπου $c \in \mathbb{R}$,</td><td>f</td></tr><tr><td>$f \cdot g$</td><td>$\frac{f}{g}$</td><td>$\sqrt[n]{f}$</td></tr></table> με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το	$f + g$	$c \cdot f$ όπου $c \in \mathbb{R}$,	$ f $	$f \cdot g$	$\frac{f}{g}$	$\sqrt[n]{f}$
$f + g$	$c \cdot f$ όπου $c \in \mathbb{R}$,	$ f $					
$f \cdot g$	$\frac{f}{g}$	$\sqrt[n]{f}$					

ΕΡΩΤΗΣΗ 103	Οι $f(x) = \varepsilon\phi x$ και $g(x) = \sigma\phi x$ είναι συνεχείς συναρτήσεις;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Οι $f(x) = \varepsilon\phi x$ και $g(x) = \sigma\phi x$ είναι συνεχείς ως πηλίκα συνεχών συναρτήσεων. $g(x) = \sigma\phi x$

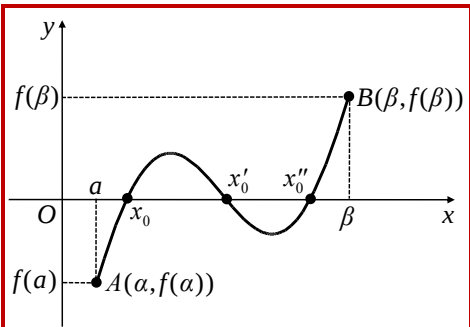
ΕΡΩΤΗΣΗ 104	Τι γνωρίζεται για την σύνθεση δυο συνεχών συναρτήσεων;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

ΕΡΩΤΗΣΗ 105	Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β);
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β). 

ΕΡΩΤΗΣΗ 106	Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$ 

ΕΡΩΤΗΣΗ 107	Μπορείτε να διατύπωσε το θεώρημα Bolzano;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν: • η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει • $f(a) \cdot f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (a, β).

ΕΡΩΤΗΣΗ 108	Μπορείτε να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Bolzano;
--------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Επειδή τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f (επειδή είναι συνεχής) τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο. 
-----------------	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 109	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε τι πρόσημο έχει;
--------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .
-----------------	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 110	Μια συνεχής συνάρτηση f τι πρόσημο έχει μεταξύ των ριζών της;
--------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
-----------------	---

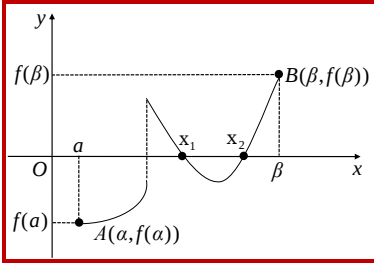
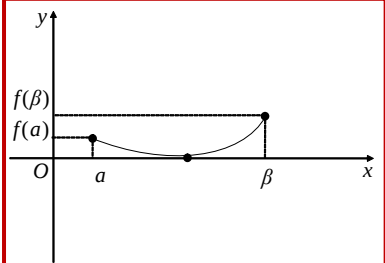
ΕΡΩΤΗΣΗ 111	Αν η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[a, \beta]$ και επί πλέον ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) < 0$, τότε τι συμβαίνει;
--------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο (a, β) .
-----------------	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 112	Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και $f(\xi) > 0$ με $\xi \in \Delta$ Τότε τι συμβαίνει;
--------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
-----------------	---

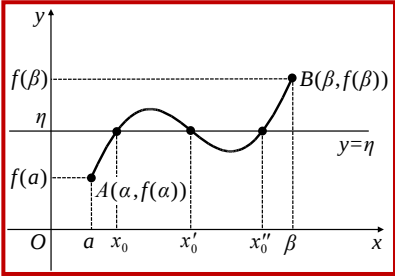
ΕΡΩΤΗΣΗ 113	Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και $f(\xi) < 0$ με $\xi \in \Delta$ Τότε τι συμβαίνει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 114	Ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Bolzano;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει πάντα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μία πραγματική συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ που έχει ρίζα στο (α, β) και δεν είναι συνεχής στο (α, β) ή ότι οι τιμές $f(\alpha)$, $f(\beta)$ δεν είναι ετερόσημες δηλαδή δεν ισχύει : $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$  

ΕΡΩΤΗΣΗ 115	Αν δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano δεν έχει ρίζα η f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, δεν σημαίνει ότι η f δεν έχει ρίζα στο (α, β) .

ΕΡΩΤΗΣΗ 116	Από τη σχέση $f(x) \cdot g(x) = 0$ συνεπάγεται ότι $f(x)=0$ ή $g(x)=0$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι π.χ: $f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ προφανώς ισχύει: $f(x) \cdot g(x) = 0$ αλλά οι συναρτήσεις είναι διάφορες του μηδενός.

ΕΡΩΤΗΣΗ 117	Μπορείτε να διατύπωσε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών;
--------------------	---

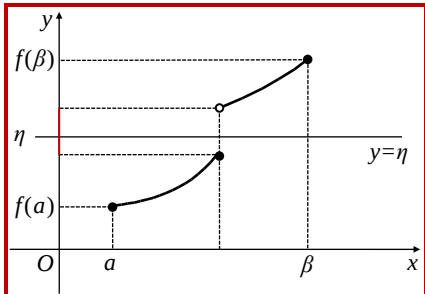
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$. Αν: ➤ η f είναι συνεχής στο $[α,β]$ και ➤ $f(α) \neq f(β)$ τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (α,β)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$ (έχει απόδειξη) 
-----------------	---

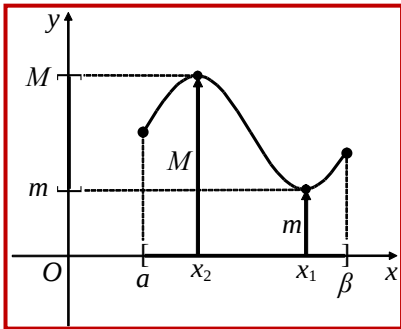
ΕΡΩΤΗΣΗ 118	Μπορείτε να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Η παράλληλη ευθεία $y = \eta$ προς τον xx' θα τέμνει την C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο (στο συγκεκριμένο παράδειγμα σε τρία σημεία) ➤ Κάθε σημείο του άξονα yy' που βρίσκεται μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ θα είναι και τιμή της συνάρτησης f.

ΕΡΩΤΗΣΗ 119	Το αντίστροφο του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών ισχύει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το αντίστροφο του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών δεν ισχύει υποχρεωτικά, δηλαδή αν μία συνάρτηση f ορισμένη στο $[α, β]$, παίρνει κάθε τιμή μεταξύ του $f(α)$ και του $f(β)$, δεν σημαίνει ότι αυτή είναι συνεχής στο $[α, β]$

ΕΡΩΤΗΣΗ 120	Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f, τι είναι ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι διάστημα

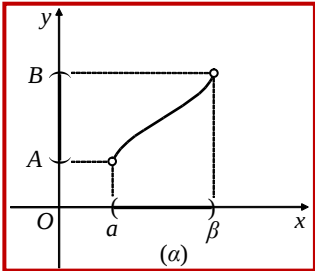
ΕΡΩΤΗΣΗ 121	Αν στο σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης περιέχεται το μηδέν τότε η εξίσωση $f(x)=0$ τι έχει ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 122	Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε, παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές. 

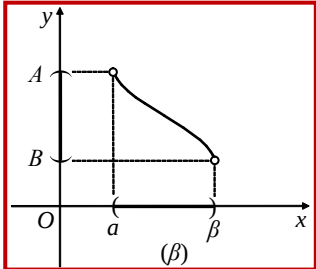
ΕΡΩΤΗΣΗ 123	Μπορείτε να διατύπωσε το θεώρημα Μέγιστης και ελάχιστης τιμής;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[a, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m . Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [a, \beta]$. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 124	Ποιο είναι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[a, \beta]$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

ΕΡΩΤΗΣΗ 125	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) , τότε ποιο είναι το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό ;
--------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι το διάστημα (A,B), όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$. 
-----------------	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 126	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε ποιο είναι το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό ;
--------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι το διάστημα (B,A), όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$. 
-----------------	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 127	Αν η $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και ένα προς ένα , τότε η f είναι γνησίως μονότονη; ..
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι (βλέπε απόδειξη σελ 32 φυλλαδίου θεωρίας εκτός σχολικού)

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1	Τι ονομάζουμε συνάρτηση θέσης ενός κινητού;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι $S = S(t)$ είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιγμή t. Η συνάρτηση S ονομάζεται συνάρτηση θέσης του κινητού.

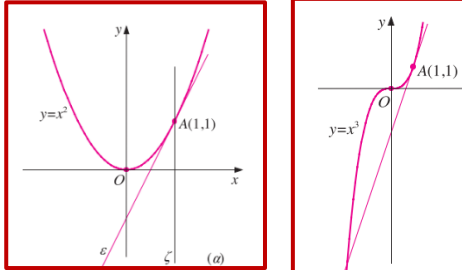
ΕΡΩΤΗΣΗ 2	Στο χρονικό διάστημα από t_0 έως t, ποιος τύπος μας δίνει τη
------------------	---

	μέση ταχύτητα του ενός κινητού ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μας τη δίνει ο τύπος $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος}}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3	Τι ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το t τείνει στο t_0 , το ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και τη συμβολίζουμε με $v(t_0)$. Δηλαδή: $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 4	Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, η ταχύτητα τι πρόσημο έχει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} > 0$, οπότε είναι $v(t_0) \geq 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5α	Όταν ένα κινητό κινείται προς τα αριστερά, η ταχύτητα τι πρόσημο έχει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} < 0$, οπότε είναι $v(t_0) \leq 0$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5β	Είναι γνωστό από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του Α ονομάζουμε την ευθεία η οποία έχει με τον κύκλο ένα μόνο κοινό σημείο, το Α. Ο ορισμός αυτός γιατί δεν μπορεί να γενικευτεί για οποιαδήποτε καμπύλη;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	γιατί, με έναν τέτοιο ορισμό η παραβολή $y = x^2$ θα είχε στο σημείο $A(1, 1)$ δύο εφαπτόμενες ε και ζ , ενώ η $y = x^3$ δεν θα είχε στο σημείο $A(1,1)$ καμία εφαπτομένη. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Πως ορίζουμε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A και τι εξίσωση έχει;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f .

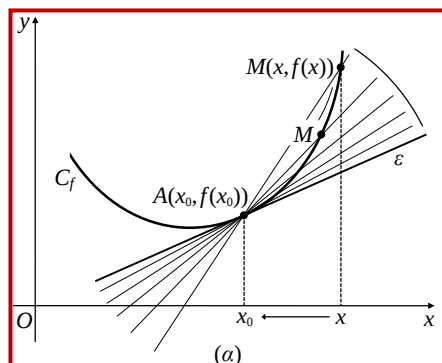
Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός

αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0),$$

όπου $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

**ΕΡΩΤΗΣΗ 7**

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
 και αν θέ-

σουμε $x = x_0 + h$, τότε έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx , ενώ το $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του

	πεδίου ορισμού της f , τότε η f θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ίσα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 9	Πως ορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , με την βοήθεια των παραγώγων;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή, είναι $v(t_0) = S'(t_0)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 10	Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ και ποια είναι η εξίσωση της ε φ α π τ ο μ έ ν η ς ε ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι η παράγωγος της f στο x_0 . Δηλαδή, είναι $\lambda = f'(x_0)$, οπότε η εξίσωση της ε φ α π τ ο μ έ ν η ς ε είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 11	Ποιο θεώρημα συνδέει την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης στο x_0 ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. (έχει απόδειξη) Το αντίστροφο δεν ισχύει π.χ : η συνάρτηση $f(x) = x $.

2.2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΗ 12	Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο A ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 13	Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 14	Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}.$

ΕΡΩΤΗΣΗ 15	Τι ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow f'(x),$ η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f . Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται “ντε εφ προς ντε χι”. Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y = (f(x))'$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 16	Ποια είναι η δεύτερη παράγωγος της f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f' , αν υπάρχει, λέγεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'' .

ΕΡΩΤΗΣΗ 17	Ποιες παραγώγους βασικών συναρτήσεων γνωρίζεται;								
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	<table border="1"> <tr> <td>$(c)' = 0$</td><td>$(x)' = 1$</td></tr> <tr> <td>$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$</td><td>$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$</td></tr> <tr> <td>$(x^v)' = vx^{v-1} \quad v \in \mathbb{N}, v \neq 0,1$ $x \in \mathbb{R}$</td><td>$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (0, +\infty)$</td></tr> <tr> <td>$(e^x)' = e^x$</td><td>$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (0, +\infty)$</td></tr> </table> (έχει αποδείξεις)	$(c)' = 0$	$(x)' = 1$	$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$	$(x^v)' = vx^{v-1} \quad v \in \mathbb{N}, v \neq 0,1$ $x \in \mathbb{R}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (0, +\infty)$	$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (0, +\infty)$
$(c)' = 0$	$(x)' = 1$								
$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$								
$(x^v)' = vx^{v-1} \quad v \in \mathbb{N}, v \neq 0,1$ $x \in \mathbb{R}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (0, +\infty)$								
$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (0, +\infty)$								

2.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 18	Τι γνωρίζετε για την παράγωγο του αθροίσματος δυο συναρτήσεων ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ ➤ Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$ (Έχει απόδειξη)

ΕΡΩΤΗΣΗ 19	Τι γνωρίζετε για την παράγωγο του γινομένου δυο συναρτήσεων ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ ➤ Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε x που ανήκει στο Δ ισχύει: $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ➤ Επίσης ισχύει: $(cf(x))' = cf'(x)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 20	Τι γνωρίζετε για την παράγωγο του πηλίκου δυο συναρτήσεων ;
-------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $g(x) \neq 0$, τότε για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 21

Τι γνωρίζετε για την παράγωγο της σύνθεσης δυο συναρτήσεων ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

- Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 22

Γνωρίζετε παραγώγους κι άλλων βασικών συναρτήσεων;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$(x^{-v})' = -vx^{-v-1}, \quad v \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^*$$

$$(x^{\kappa})' = \kappa x^{\kappa-1}$$

$$\kappa \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$$

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}, x > 0$$

$$(\operatorname{erf} x)' = \frac{1}{\sqrt{\pi} x^2}, \quad x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\kappa \in \mathbb{Z}$$

$$(\operatorname{sech} x)' = -\frac{1}{\eta \mu^2 x},$$

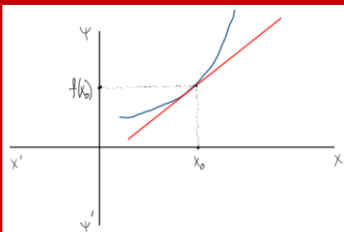
$$x \neq \kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

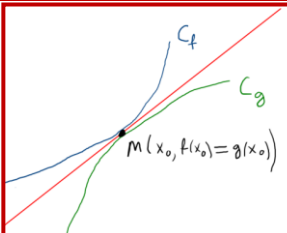
$$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha, \quad \alpha > 0$$

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*$$

(έχει αποδείξεις)

ΕΡΩΤΗΣΗ 23	Γνωρίζετε τις παραγώγους των σύνθετων συναρτήσεων;	
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	$(u^a)' = au^{a-1} \cdot u'$	$(\varepsilon\varphi u)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u} \cdot u'$
	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$(\sigma\varphi u)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 u} \cdot u'$
	$(\eta\mu u)' = \sigma\upsilon\nu u \cdot u'$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
	$(\sigma\upsilon\nu u)' = -\eta\mu u \cdot u'$	$(\alpha^u)' = \alpha^u \ln \alpha \cdot u'$
	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	
	αν η συνάρτηση $u=f(x)$ είναι παραγωγίσιμη.	

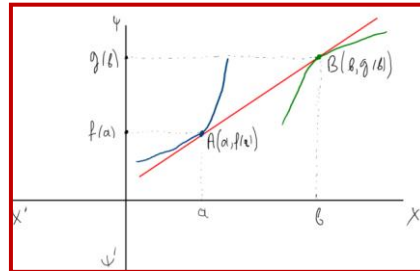
ΕΡΩΤΗΣΗ 24	Πότε η ευθεία (ε): $y = \lambda x + \beta$ εφάπτεται στη C_f;	
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν και μόνο αν υπάρχει x_0 στο πεδίο ορισμού της f , ώστε να ισχύει $f'(x_0) = \lambda$ και $f(x_0) = \lambda x_0 + \beta$	

ΕΡΩΤΗΣΗ 25	Πότε οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g δυο συναρτήσεων f, g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους $M(x_0, y_0)$	
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν ισχύει $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$	

ΕΡΩΤΗΣΗ 26	Τι πρέπει να συμβαίνει για να έχουν κοινή εφαπτομένη δυο γραφικές παραστάσεις σε μη κοινό τους σημείο;	
-------------------	---	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, g(\beta))$ τα σημεία επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης της f είναι $\psi - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$, ενώ η εφαπτομένη της g είναι $\psi - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta)$ δηλαδή



$$\begin{cases} \psi = f'(\alpha) \cdot x - \alpha \cdot f'(\alpha) + f(\alpha) \\ \psi = g'(\beta) \cdot x - \beta \cdot g'(\beta) + g(\beta) \end{cases}$$
 Για να παριστάνουν την ίδια ευθεία πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ \text{και} \\ -\alpha \cdot f'(\alpha) + f(\alpha) = -\beta \cdot g'(\beta) + g(\beta) \end{cases}$$
 Από το παραπάνω σύστημα βρίσκω τα α , β .

Άλλος τρόπος : Για να έχουν κοινή εφαπτομένη οι γραφικές παραστάσεις των f και g αρκεί να ισχύει

$$\left\{ f'(\alpha) = g'(\beta) = \frac{g(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \text{συντελεστής διεύθυνσης } AB \right\}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 27

Τι γνωρίζετε για την παράγωγο της αντίστροφης συνάρτησης;

(εκτός σχολικού, οι αποδείξεις στο φυλλάδιο θεωρίας)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ**Πρόταση:**

Έστω f μια γνησίως μονότονη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ . Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 με $f'(x_0) \neq 0$ και η αντίστροφη f^{-1} , είναι συνεχής στο ψ_0 , τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0) = \psi_0 \in f(\Delta)$ και

$$\text{ισχύει: } (f^{-1})'(f(x_0)) = (f^{-1})'(\psi_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\psi_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Πρόταση:

Έστω f παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ , γνησίως μονότονη και $f'(x) \neq 0$. Αν η f^{-1} είναι και αυτή παραγωγίσιμη για κάθε ψ που ανήκει στο $f(\Delta)$ τότε ισχύει:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

2.4 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 28	Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$ f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 29	Πως ορίζουμε επιτάχυνση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Η παράγωγος $v'(t_0)$, της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 ή αλλιώς ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $a(t_0)$. Είναι δηλαδή $a(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0)$.

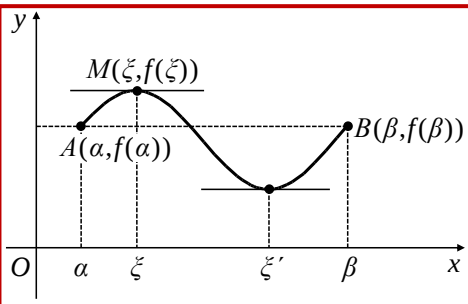
ΕΡΩΤΗΣΗ 30	Τι λέγεται οριακό κόστος στο x_0 , οριακή είσπραξη στο x_0 και οριακό κέρδος στο x_0 στην οικονομία;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής K , η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0 . Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες οριακή είσπραξη στο x_0 και οριακό κέρδος στο x_0 .

ΕΡΩΤΗΣΗ 31	Γνωρίζετε το εμβαδόν και τον όγκο του κυλίνδρου, της σφαίρας και του κώνου;		
ΑΠΑΝΤΗΣΗ		ΕΜΒΑΔΟ	ΟΓΚΟΣ
	ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ	$E_{ολ} = E_{\pi} + 2E_{\beta} = 2\pi r \cdot \upsilon + 2\pi r^2$	$V = \pi r^2 \cdot \upsilon$

	ΣΦΑΙΡΑ	$E = 4\pi\rho^2$	$V_{\sigma\phi} = \frac{4}{3} \cdot \pi\rho^3$
	ΚΩΝΟΣ	$E_{\sigma\lambda} = E_{\pi} + E_{\beta} = \pi \cdot \rho \cdot \lambda + \pi\rho^2$	$V = \frac{1}{3} \pi\rho^2 \cdot \upsilon$

2.5 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 32	Μπορείτε να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν μια συνάρτηση f είναι: •συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ •παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και •$f(\alpha) = f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 33	Μπορείτε να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 34	Μπορείτε να δώσετε τη φυσική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν ένα σώμα κινούμενο πάνω σε ένα άξονα διέρχεται από το σημείο A τη χρονική στιγμή t_1 και επιστρέφει στο A τη χρονική στιγμή t_2, τότε υπάρχει χρονική στιγμή t_0 μεταξύ των t_1 και t_2, που η ταχύτητα είναι μηδέν. (Πράγματι: έστω $s(t)$ η συνάρτηση που μας δίνει την θέση του κινητού. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και επιπλέον ισχύει $s(t_1) = s(t_2)$. Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα t_0 μεταξύ του t_1 και του t_2 τέτοιο ώστε $s'(t_0) = v(t_0) = 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 35	Γνωρίζετε διατυπώσεις ισοδύναμες του συμπεράσματος του θεωρήματος Rolle;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Οι παρακάτω διατυπώσεις είναι ισοδύναμες:

	➤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ ➤ η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο ανοικτό διάστημα (a, b) ➤ η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον άξονα xx' τουλάχιστον σε ένα σημείο. ➤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα xx'.
--	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 36	Το αντίστροφο του θεωρήματος Rolle ισχύει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το αντίστροφο του θεωρήματος Rolle δεν ισχύει κατ' ανάγκη. Δηλαδή αν η παράγωγος μιας συνάρτησης μηδενίζεται σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της δεν σημαίνει ότι πληρούνται αναγκαία οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Γράφημα 1: Ισχύει το συμπέρασμα του Θ. Rolle αλλά όχι όλες οι προϋποθέσεις. (f συνεχής στο δ) Γράφημα 2: Ισχύει το συμπέρασμα του Θ. Rolle, όμως όχι όλες οι προϋποθέσεις (f ασυνεχές στο δ) Γράφημα 3: Ισχύει το συμπέρασμα του Θ. Rolle, όμως όχι όλες οι προϋποθέσεις (f όχι παντού παραγωγίσιμη στο (a, b))

ΕΡΩΤΗΣΗ 37	Αν μας λένε να δείξουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει μία το πολύ ρίζα στο (a, b), τι κάνουμε;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη , ή υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει και δεύτερη ρίζα και με το θεώρημα Rolle καταλήγουμε σε άτοπο .

ΕΡΩΤΗΣΗ 38	Αν μας λένε να δείξουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει δύο το πολύ ρίζες
-------------------	---

	στο (α, β), τι κάνουμε ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει και τρίτη ρίζα δηλαδή $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ οι τρεις ρίζες και με το θεώρημα Rolle για την f στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$ καταλήγουμε σε άτοπο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 39	Αν μας λένε να δείξουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο (α, β), τι κάνουμε ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αποδεικνύουμε ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα (ή με θεώρημα Bolzano ή με το σύνολο τιμών ή με θεώρημα Rolle ή την προφανή ρίζα) και μετά την μοναδικότητα την εξασφαλίζουμε ή με την μονοτονία ή υποθέτοντας ότι υπάρχει και δεύτερη ρίζα και με Θ.Rolle καταλήγουμε σε άτοπο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 40	Αν μας λένε να δείξουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο (α, β), τι κάνουμε ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Εργαζόμαστε όπως και προηγουμένως στα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$

ΕΡΩΤΗΣΗ 41	Γνωρίζετε τον πίνακα «αντιπαραγώγισης» των βασικών συναρτήσεων;			
ΑΠΑΝΤΗΣΗ				
	$0 = (c)'$	$1 = (x)'$	$= x^\alpha = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'$ $\alpha \neq -1$	$\frac{1}{x} = (\ln x)'$ $x \neq 0$
	$\frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)'$ $x \neq 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = (\sqrt{x})'$ $(0,+\infty)$	$\sin x = (\eta\mu x)'$	$\eta\mu x = (-\sin x)'$
	$e^x = (e^x)'$	$a^x = \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)'$ $a > 0$	$\frac{1}{\eta\mu^2 x} = (-\sigma\phi x)'$ $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = (\epsilon\phi x)'$ $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$
	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f(x) \cdot g(x))'$		$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$	
	$f(x) + x \cdot f'(x) = (x \cdot f(x))'$		$\frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \left(\frac{f(x)}{x}\right)'$	
$\sin f(x) \cdot f'(x) = (\eta\mu f(x))'$		$\eta\mu f(x) \cdot f'(x) = (-\sin f(x))'$		

	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = (\sqrt{f(x)})'$	$e^{f(x)} \cdot f'(x) = (e^{f(x)})'$	
	$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))'$	$\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(-\frac{1}{f(x)}\right)'$	
	$f(x) \cdot f'(x) = \left(\frac{f^2(x)}{2}\right)'$	$f^v(x) \cdot f'(x) = \left(\frac{f^{v+1}(x)}{v+1}\right)'$	

ΕΡΩΤΗΣΗ 42	Αν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) + g(x) \cdot f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) τότε τι κάνουμε;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Βρίσκουμε μία αρχική της $g(x)$, την $G(x)$ και πολλαπλασιάζουμε όλα τα μέλη της παραπάνω εξίσωσης με $e^{G(x)}$. Μετά από τις πράξεις έχουμε ισοδύναμα την εξίσωση $(e^{G(x)} \cdot f(x))' = 0$. Τέλος εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την $h(x) = e^{G(x)} \cdot f(x)$ στο $[\alpha, \beta]$ Πχ: ➤ αν έχουμε $f'(x) + f(x) = 0$ πολλαπλασιάζουμε με e^x ➤ αν έχουμε $f'(x) - f(x) = 0$ πολλαπλασιάζουμε με e^{-x} ➤ αν έχουμε $f'(x) + \kappa \cdot f(x) = 0$ πολλαπλασιάζουμε με $e^{\kappa \cdot x}$ ➤ αν έχουμε $x \cdot f'(x) + 2 \cdot f(x) = 0, x \neq 0$ πολλαπλασιάζουμε με x ➤ αν έχουμε $x \cdot f'(x) + 3 \cdot f(x) = 0, x \neq 0$ πολ/με με x^2 ➤ αν έχουμε $x \cdot f'(x) + v \cdot f(x) = 0, x \neq 0$ πολ/με με x^{v-1} ➤ αν έχουμε $x \cdot f'(x) - f(x) = 0, x \neq 0$ διαιρούμε με x^2 και έχουμε $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0$ ➤ αν έχουμε $x \cdot f'(x) - 2f(x) = 0, x \neq 0$ πολ/με με x και διαιρούμε με x^4 και έχουμε $\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' = 0$ ➤ αν έχουμε $x \cdot f'(x) - v f(x) = 0, x \neq 0$ πολ/με με x^{v-1} και διαιρούμε με x^{2v} και έχουμε $\left(\frac{f(x)}{x^v}\right)' = 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 43	Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει δύο ρίζες, τότε η f' πόσες ρίζες έχει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	έχει τουλάχιστον μία ρίζα. Απόδειξη :εφαρμογή του Θ.Rolle για την f στο $[\rho_1, \rho_2]$

ΕΡΩΤΗΣΗ 44	Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της f' πόσες ρίζες έχει η συνάρτηση f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έχει το πολύ μία ρίζα η συνάρτηση f . <u>Απόδειξη</u> :έστω ότι η f έχει δύο ρίζες τότε από το Θ.Rolle η f' θα έχει τρεις ρίζες, άτοπο.

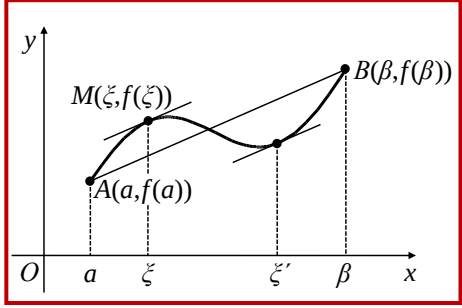
ΕΡΩΤΗΣΗ 45	Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει τρεις ρίζες τότε η f' και η f'' πόσες ρίζες έχουν ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	η f' έχει δύο τουλάχιστον ρίζες και η f'' τουλάχιστον μία. Γιατί: <u>Απόδειξη</u> :εφαρμόζουμε διαδοχικά το Θ.Rolle στα διαστήματα $[p_1, p_2]$ και $[p_2, p_3]$ άρα η f' έχει δύο τουλάχιστον ρίζες τις ξ_1 και ξ_2 . Μετά εφαρμόζουμε Θ.Rolle στο $[\xi_1, \xi_2]$ για την f' άρα η f'' έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 46	Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι «1 – 1» ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι και αντιστρέφεται. Γιατί : <u>Απόδειξη</u> : Πράγματι , έστω ότι δεν είναι «1 – 1» τότε από Θ.Rolle καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα η f είναι «1 – 1» και αντιστρέφεται.

ΕΡΩΤΗΣΗ 47	Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f πόσες ρίζες έχει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έχει το πολύ μία ρίζα. <u>Απόδειξη</u> : έστω ότι έχει δύο ρίζες τότε από Θ.Rolle η $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα άτοπο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 48	Αν $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f πόσες ρίζες έχει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έχει δύο το πολύ ρίζες. <u>Απόδειξη</u> :έστω ότι έχει τρεις ρίζες τότε από Θ.Rolle η $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες και η $f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα άτοπο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 49	Μπορείτε να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν μια συνάρτηση f είναι: •συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και •παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 50	Μπορείτε να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 51	Μπορείτε να δώσετε τη φυσική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αυτό σημαίνει ότι κατά την ευθύγραμμη κίνηση ενός κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ υπάρχει μία τουλάχιστον χρονική στιγμή $t_0 \in (t_1, t_2)$ τέτοια ώστε η ταχύτητα του κινητού να ισούται με την μέση ταχύτητα του.

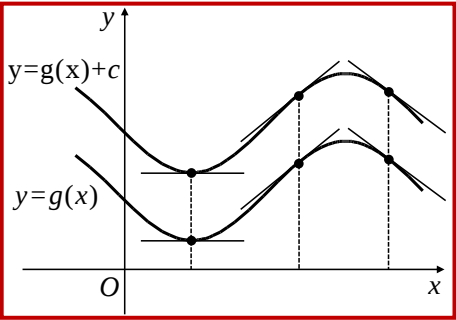
ΕΡΩΤΗΣΗ 52	Μπορείτε να αναφέρετε δυο βασικές ανισότητες στις εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις που μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε χωρίς απόδειξη;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Για κάθε $x > 0$ να ισχύει ότι $\ln x \leq x - 1$ ➤ Για κάθε x πραγματικό αριθμό ισχύει ότι $e^x \geq x + 1$ (αποδείξεις στο φυλλάδιο της θεωρίας στη 2.5 παράγραφο)

2.6 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 53	Θεώρημα Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν ισχύει: • η f είναι συνεχής στο Δ και • $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f τι είναι ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Σταθερή σε όλο το διάστημα Δ . (έχει απόδειξη στο τέλος του φυλλαδίου)

ΕΡΩΤΗΣΗ 54	Πόρισμα Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν
-------------------	---

	• οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και • $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε τι σχέση έχουν οι f και g;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$. (έχει απόδειξη στο τέλος του φυλλαδίου)

ΕΡΩΤΗΣΗ 55	Μπορείτε να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω πορίσματος;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	<u>Γεωμετρική ερμηνεία</u> Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν σε οποιοδήποτε x που ανήκει στο Δ παράλληλες εφαπτόμενες, τότε η γραφική παράσταση της μίας προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση, της άλλης γραφικής παράστασης κατά c μονάδες, προς τα πάνω αν $c > 0$ ή προς τα κάτω αν $c < 0$. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 56	Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε ένωση διαστημάτων;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι ισχύουν μόνο σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Ισχύουν όμως σε κάθε διάστημα ξεχωριστά Π.χ: $f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$, ισχύει: $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αλλά η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 57	Τι σημαίνει «ισχύουν όμως σε κάθε διάστημα ξεχωριστά»;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	<u>Αυτό σημαίνει:</u> Αν ισχύει $f'(x) = g(x)'$ με $x \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ τότε $f(x) = g(x) + c_1$ αν $x \in \Delta_1$ και $f(x) = g(x) + c_2$ αν $x \in \Delta_2$

ΕΡΩΤΗΣΗ 58	Αν για την f ισχύει: $f'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ποια είναι η f; (χωρίς απόδειξη)
-------------------	---

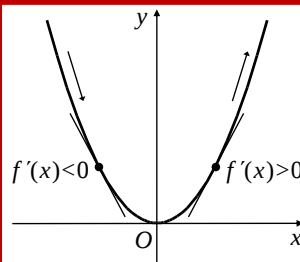
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R} : f(x) = ce^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
-----------------	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 59	Αν για την f ισχύει: $f'(x) = \kappa \cdot f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και κ πραγματικός αριθμός ποια είναι η f ;
-------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R} : f(x) = c \cdot e^{\kappa x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (απόδειξη στο τέλος)
-----------------	---

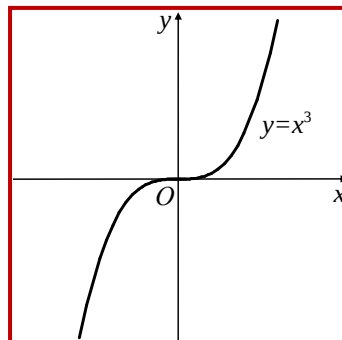
ΕΡΩΤΗΣΗ 60	Θεώρημα Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. ➤ Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f τι μονοτονία έχει; ➤ Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f τι μονοτονία έχει;
-------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. ➤ Είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ. (έχει απόδειξη στο τέλος του φυλλαδίου)
-----------------	--



ΕΡΩΤΗΣΗ 61	Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος ισχύει;
-------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι δεν ισχύει. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
-----------------	--



ΕΡΩΤΗΣΗ 62	Το παραπάνω θεώρημα ισχύει σε ένωση διαστημάτων;
-------------------	---

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Όχι δεν ισχύει. Π.χ: $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) < 0$ στο $\mathbb{R}^*$ αλλά η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}^*$ γιατί $-2 < 2$ όμως $f(-2) < f(2)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 63

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) με εξαίρεση ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής και η f' διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο (a, β) ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

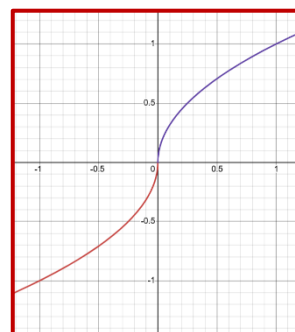
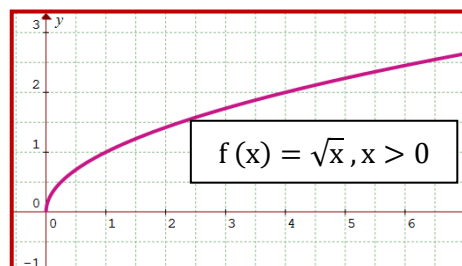
Ναι . Π.χ $f(x) = \sqrt{x}$ ισχύει: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ με $x > 0$, η f' δεν

ορίζεται στο μηδέν, όμως f συνεχής στο $[0, +\infty]$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty]$.

Άλλο π.χ:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, είναι όμως συνεχής στο 0 και η f' είναι θετική για x διάφορο του 0 άρα f γνησίως αύξουσα στους πραγματικούς αριθμούς.

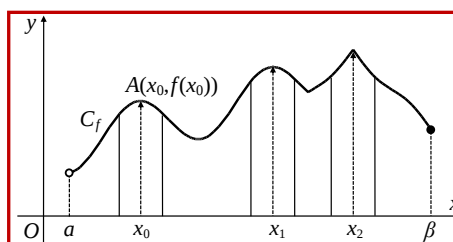
**2.7 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ****ΕΡΩΤΗΣΗ 64**

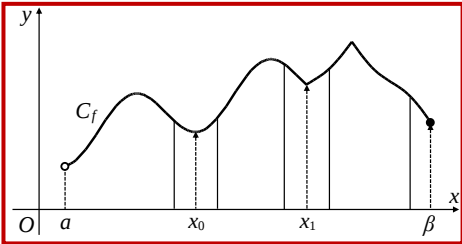
Πότε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

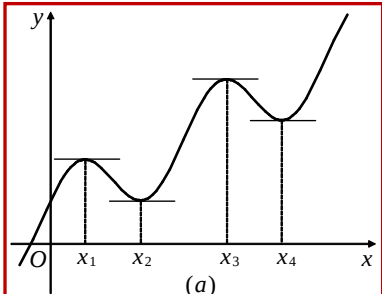
Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f .

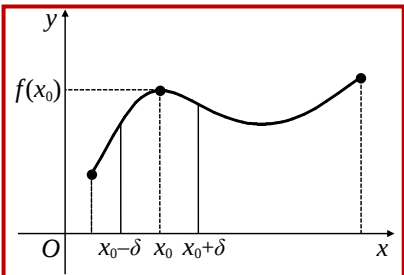


ΕΡΩΤΗΣΗ 65	Πότε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 66	Πότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο ή απλά μέγιστο, το $f(x_0)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 67	Πότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό ελάχιστο ή απλά ελάχιστο, το $f(x_0)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όταν η ανισότητα $f(x) \geq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 68	Μπορεί ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	<u>Ναι</u>. Βλέπε το διπλανό σχήμα. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 69	Μπορείτε να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$ (απόδειξη στο τέλος) 

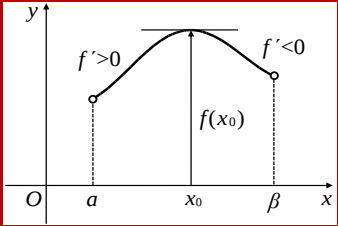
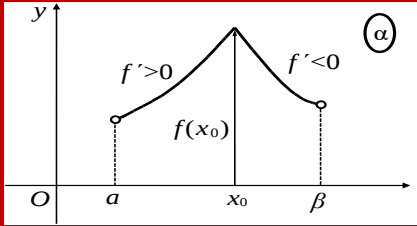
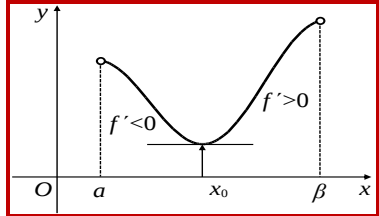
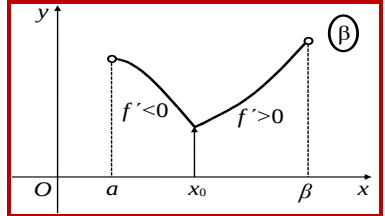
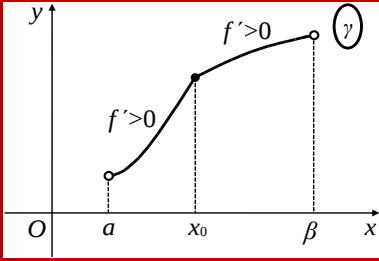
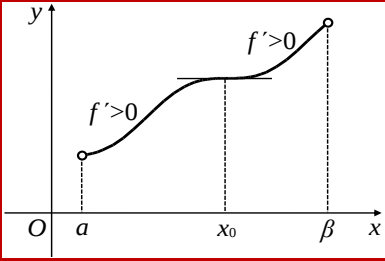
ΕΡΩΤΗΣΗ 70	Ποια είναι η Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Fermat;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 71	Τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, μπορούν να είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι , γιατί αν ήταν θέσεις τοπικών ακροτάτων θα έπρεπε η πρώτη παράγωγος να μηδενίζεται στις θέσεις αυτές.

ΕΡΩΤΗΣΗ 72	Ποια σημεία της f στο διάστημα Δ λέγονται κρίσιμα;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ λέγονται τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν .

ΕΡΩΤΗΣΗ 73	Ποιες είναι οι <u>πιθανές θέσεις</u> των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Είναι ➤ Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται. ➤ Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται. ➤ Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της). Δηλαδή τα κρίσιμα σημεία και τα άκρα του Δ

ΕΡΩΤΗΣΗ 74	ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ τι είναι; (σχέδιο α) ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε
-------------------	---

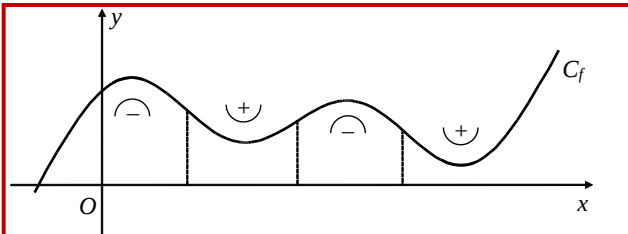
	το $f(x_0)$ τι είναι; (σχέδιο β) iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ τι είναι; (σχέδιο γ) (υπάρχει απόδειξη στο τέλος)
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	i. είναι τοπικό μέγιστο της f. ii. είναι τοπικό ελάχιστο της f. iii. δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).      

ΕΡΩΤΗΣΗ 75	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όπως γνωρίζουμε, η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου τι κάνουμε ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f. 2. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων. 3. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f.

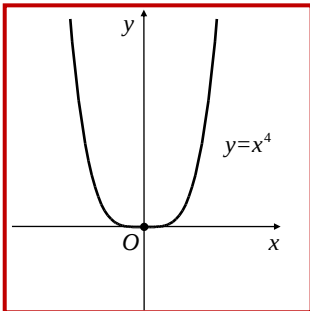
ΕΡΩΤΗΣΗ 76	Σε συνάρτηση f διπλού τύπου για την εύρεση τοπικού ακρότατου στο σημείο x_0 που αλλάζει τύπο η f, δεν μας
------------	---

	ενδιαφέρει η παραγωγισιμότητα;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι, αλλά μόνο η συνέχεια της f στο x_0 και η μονοτονία της f , πριν και μετά το x_0 .

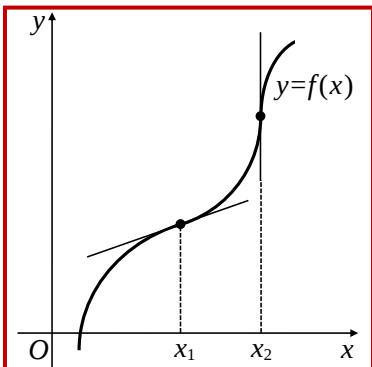
2.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 77	Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. ➤ Πότε θα λέμε ότι: η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ; και ➤ Πότε η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ. ➤ αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 78	ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. • Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f τι είναι; • Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f τι είναι;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	• η f είναι κυρτή στο Δ. • η f είναι κοίλη στο Δ.

ΕΡΩΤΗΣΗ 79	Το αντίστροφο του θεωρήματος ισχύει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$. Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 80	Πως μπορούμε να διατυπώσουμε το θεώρημα αλλιώς ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Για να είναι: • η f κυρτή στο Δ αρκεί να ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε x του Δ • η f κοίλη στο Δ αρκεί να ισχύει $f''(x) \leq 0$ για κάθε x του Δ και η ισότητα και στις δυο περιπτώσεις να ισχύει για διακεκριμένες τιμές του x.

ΕΡΩΤΗΣΗ 81	ΟΡΙΣΜΟΣ Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν • η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και • η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 καμπή και το x_0 λέγεται θέση σημείου καμπής. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f “διαπερνά” την καμπύλη. 

ΕΡΩΤΗΣΗ 82	ΘΕΩΡΗΜΑ Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε με τι ισούται το $f''(x_0)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Τότε $f''(x_0) = 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 83	Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος ισχύει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει . Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$. Ισχύει $f''(x) =$

	$12x^2$ δηλ. $f''(0) = 0$. Όμως η f δεν έχει σημείο καμπής στο 0.
--	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 84	Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f'' είναι διαφορετική από το μηδέν, μπορούν να είναι θέσεις σημείων καμπής;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 85	Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και ➤ τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' (βλέπε παραπάνω σχέδιο).

ΕΡΩΤΗΣΗ 86	Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Πότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και ➤ ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$

ΕΡΩΤΗΣΗ 87	Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε $x_0 \in \Delta$, που βρίσκεται;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Βρίσκεται κάτω από την C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Δηλαδή: Για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\text{Το χρησιμοποιώ χωρίς απόδειξη, απόδειξη στο τέλος})$

ΕΡΩΤΗΣΗ 88	Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο Δ τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε $x_0 \in \Delta$, που βρίσκεται;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Βρίσκεται επάνω από την C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Δηλαδή: Για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

2.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ - ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

ΕΡΩΤΗΣΗ 89	ΟΡΙΣΜΟΣ Ποια η ευθεία λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .
ΕΡΩΤΗΣΗ 90	ΟΡΙΣΜΟΣ Ποια ευθεία λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).
ΕΡΩΤΗΣΗ 91	ΟΡΙΣΜΟΣ Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$, αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.
ΕΡΩΤΗΣΗ 92	ΘΕΩΡΗΜΑ Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}, \text{ αντιστοίχως}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}.$

ΕΡΩΤΗΣΗ 93	Πότε η ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι οριζόντια;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν $\lambda = 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 94	Πότε η ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν $\lambda \neq 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 95	Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι.

ΕΡΩΤΗΣΗ 96	Δίνεται η ρητή συνάρτηση: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, h(x) \neq 0$ 1. Αν ο βαθμός του αριθμητή $g(x)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή $h(x)$, ποια είναι η ασύμπτωτη; 2. Αν ο βαθμός του αριθμητή $g(x)$ είναι ίσος από το βαθμό του παρονομαστή $h(x)$, ποια είναι η ασύμπτωτη; 3. Αν ο βαθμός του αριθμητή $g(x)$ είναι κατά μια μονάδα μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή $h(x)$, ποια είναι η ασύμπτωτη; 4. Αν ο βαθμός του αριθμητή $g(x)$ είναι κατά δυο ή περισσότερες μονάδες μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή, ποια είναι η ασύμπτωτη;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	1. Τότε η ευθεία $\psi=0$ δηλ. ο άξονας xx' είναι οριζόντια ασύμπτωτη. 2. Τότε η ευθεία $\psi=\alpha$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη, όπου α ο λόγος του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του αριθμητή προς το συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του παρονομαστή. 3. Τότε η ευθεία $\psi=\alpha x+\beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη, όπου $\alpha x+\beta$ το πηλίκο της διαίρεσης $g(x) : h(x)$ 4. Τότε δεν υπάρχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη.

ΕΡΩΤΗΣΗ 97	Που αναζητούμε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	• Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται. • Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής. • Στο $+\infty, -\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty, \alpha)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 98	Μπορείτε να αναφέρετε τον 1^ο Κανόνα de L' Hospital
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρ- χει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

ΕΡΩΤΗΣΗ 99	Μπορείτε να αναφέρετε τον 2^ο Κανόνα de L' Hospital
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

ΕΡΩΤΗΣΗ 100	Το θεώρημα 2 ισχύει και άλλες μορφές;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 101	Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά ό- ρια;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε πε- ρισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

2.10 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 102	Η μελέτη μιας συνάρτησης ποια βήματα περιλαμβάνει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα: 1° Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f. 2° Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της. 3° Βρίσκουμε τις παραγώγους f' και f'' και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονotonίας και τα τοπικά ακρότατα της f, ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής. 4° Μελετούμε τη “συμπεριφορά” της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.) 5° Βρίσκουμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες. 6° Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ' ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και πίνακας μεταβολών της f και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f. Για καλύτερη σχεδίαση της C_f κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της f.

3.1 ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1	ΟΡΙΣΜΟΣ Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2	ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε έχει άλλες παράγουσες η f ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι. • όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και • κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. (έχει απόδειξη)

ΕΡΩΤΗΣΗ 3	Γνωρίζετε τον πίνακα παραγουσών των βασικών συναρτήσεων;	
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	
	Συνάρτηση	Παράγουσα
	$f(x) = 0$	$F(x) = c, c \in \mathfrak{R}$
	$f(x) = 1$	$F(x) = x + c, c \in \mathfrak{R}$
	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$
	$f(x) = x^{\alpha},$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$
	$f(x) = \sin x$	$F(x) = \eta\mu x + c$
	$f(x) = \eta\mu x$	$F(x) = -\sin x + c$
	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = \varepsilon\phi x + c$
	$f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$F(x) = -\sigma\phi x + c$
	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
	$f(x) = \alpha^x$	$F(x) = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + c$

ΕΡΩΤΗΣΗ 4	Γνωρίζετε τον πίνακα των παραγουσών συναρτήσεων που προκύπτουν από τους κανόνες παραγώγισης και ως σύνθεση μιας συνάρτησης f με μία βασική συνάρτηση	
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ναι	
	Συνάρτηση	Παράγουσα c πραγματικός
	$\varphi(x) = f'(x) + g'(x)$	$\Phi(x) = f(x) + g(x) + c$
	$\varphi(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$\Phi(x) = f(x) \cdot g(x) + c$
	$\varphi(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} =$	$\Phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} + c$
	$\varphi(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = x \cdot f(x) + c$
	$\varphi(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}$	$\Phi(x) = \frac{f(x)}{x} + c$
	$\varphi(x) = \sin f(x) \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = \eta\mu f(x) + c$
	$\varphi(x) = \eta\mu f(x) \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = -\sin f(x) + c$
	$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$\Phi(x) = \sqrt{f(x)} + c$
	$\varphi(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = e^{f(x)} + c$
	$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$\Phi(x) = \ln f(x) + c$
	$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$	$\Phi(x) = -\frac{1}{f(x)} + c$
	$\varphi(x) = f(x) \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = \frac{f^2(x)}{2} + c$
	$\varphi(x) = f^v(x) \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = \frac{f^{v+1}(x)}{v+1} + c$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5	Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αποδεικνύεται πως, ναι

ΕΡΩΤΗΣΗ 6	Το αντίστροφο ισχύει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι. γιατί υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ , αλλά έχουν παράγουσα στο διάστημα αυτό π.χ: $f(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής αλλά έχει

	$F(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ παράγουσα στο $\mathbb{R}$ την Άλλο παράδειγμα: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \geq 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αλλά έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό τη συνάρτηση $F(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$
--	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 7	Αν μια συνάρτηση f δεν έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι. Γιατί αν ήταν συνεχής, θα είχε παράγουσα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 8	Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε ποιες είναι οι παράγουσες των συναρτήσεων $f+g$ και λf ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	- Η συνάρτηση $F+G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f+g$ - Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf

ΕΡΩΤΗΣΗ 9	Κάθε συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ , έχει αναγκαστικά παράγουσα;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ -2, & x \in (1,3] \end{cases}$, είναι ορισμένη στο διάστημα $\Delta = [0,3]$, αλλά δεν υπάρχει συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο $\Delta = [0,3]$ τέτοια ώστε $F'(x) = f(x)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 10	Η παράγουσα μιας συνάρτησης μπορεί να αναφέρεται σε έ- νωση διαστημάτων;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Όχι μόνο σε διάστημα. Π.χ: $f(x) = \frac{1}{x}$ και $F(x) = \ln x$. Ισχύει: $F'(x) = f(x)$ για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Άρα οι παράγουσες της $f(x)$ στο $(-\infty, 0)$ είναι οι $F(x) + c_1$ και στο $(0, +\infty)$ είναι οι $F(x) + c_2$ c_1, c_2 πραγματικοί αριθμοί. Επομένως δεν έχει νόημα η φράση «η παράγουσα της $f(x)$ στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι η $F(x) + c$» Παράδειγμα: $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ με πεδίο ορισμού

	$A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ τότε η συνάρτηση $F(x) = \varepsilon\phi x + c_1$ είναι παράγουσα της f στο αριστερό διάστημα και η $F(x) = \varepsilon\phi x + c_2$ είναι παράγουσα της f στο δεξιό διάστημα.
--	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 11	Υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις, που δεν υπολογίζονται οι παράγουσες τους;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι. όπως οι : $\frac{\eta\mu x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, $\sqrt{\eta\mu x}$, $\frac{1}{\ln x}$, e^{-x^2} , $\eta\mu x^2$.

3.4 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΕΡΩΤΗΣΗ 12	Πως ορίζετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$. Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Δηλαδή: - Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{n}$, με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$. - Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_k και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_k)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι $S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x = [f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)]\Delta x.$ - Υπολογίζουμε το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανε-

ξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k . Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega) \geq 0$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 13

Πως ορίζετε το ορισμένο ολοκλήρωμα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω μια συνάρτηση f **συνεχής** στο $[a, \beta]$. Χωρίζουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta - a}{n}$, έτσι έχουμε τα σημεία $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$. Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_k)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x$

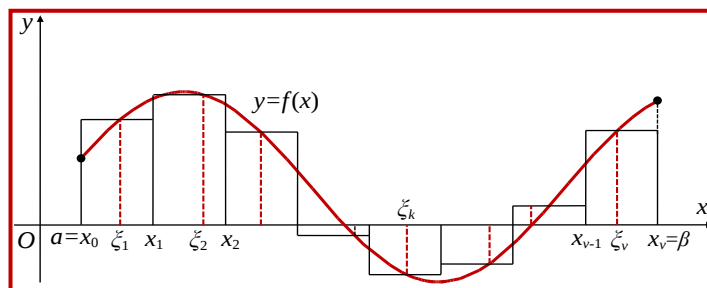
(**άθροισμα RIEMANN**)

Αποδεικνύεται ότι, “Το όριο του αθροίσματος S_n , δηλαδή το $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x \right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_k ”.

Το παραπάνω όριο ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το a στο β , συμβολίζεται με $\int_a^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της f από το a στο β ”. Δηλαδή,

$$\int_a^\beta f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x \right)$$

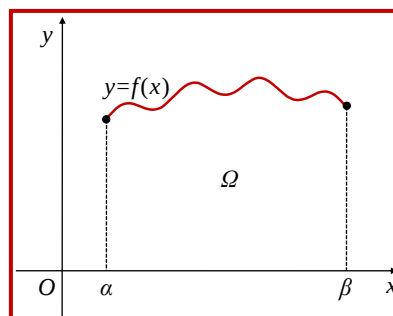
Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται



σύμβολο ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος S της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί a και β ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης. Στην έκφραση $\int_a^\beta f(x)dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα.

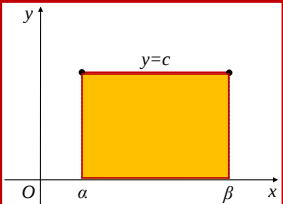
	Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b f(t)dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός, σε αντίθεση με το $\int f(x)dx$ που είναι ένα σύνολο συναρτήσεων. Είναι, όμως, χρήσιμο να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό και για τις περιπτώσεις που είναι $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, ως εξής: • $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ • $\int_a^a f(x)dx = 0$
--	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 14	Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ τι παριστάνει ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (Σχ. 11). Δηλαδή, $\int_a^b f(x)dx = E(\Omega).$ Επομένως, Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.



ΕΡΩΤΗΣΗ 15	Ποιες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος γνωρίζετε;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ΘΕΩΡΗΜΑ 1^ο Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν ➤ $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$ ➤ $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ και γενικά ➤ $\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$ ΘΕΩΡΗΜΑ 2^ο

	Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$ ΘΕΩΡΗΜΑ 3^ο Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0.$ Παρατήρηση Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f τότε ισχύει: $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta - \alpha)$
--	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 16	Αν $c > 0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} cdx$ τι εκφράζει;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c. 

3.5 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$

ΕΡΩΤΗΣΗ 17	ΘΕΩΡΗΜΑ Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ, τότε γνωρίζετε μια παράγουσα της f στο Δ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι, η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$, $x \in \Delta$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει: $\left(\int_{\alpha}^x f(t)dt \right)' = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. (υπάρχει γεωμετρική ερμηνεία)
ΕΡΩΤΗΣΗ 18	Να αναφέρεται τη γεωμετρική ερμηνεία του προηγούμενου θεωρήματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει (Σχ. 14) ως εξής:

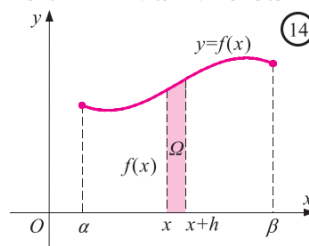
$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_x^{x+h} f(t) dt \\ &= \text{Εμβαδόν του χωρίου } \Omega \\ &\approx f(x) \cdot h, \text{ για μικρά } h > 0. \end{aligned}$$

Άρα, για μικρά $h > 0$ είναι

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x),$$

οπότε

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

**ΕΡΩΤΗΣΗ 19**

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $F(x) = \int_a^x f(t) dt$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f και το σύνολό στο οποίο είναι συνεχής η f .
- Απαιτούμε το a και το x να ανήκουν στην τομή των δυο παραπάνω συνόλων.
- Αν το πεδίο ορισμού της f είναι ένωση διαστημάτων, διαλέγουμε ως πεδίο ορισμού της F , εκείνο στο οποίο ανήκει το a

ΕΡΩΤΗΣΗ 20**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Μπορείτε να αναφέρετε το «Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού»;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$.
Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε

$$\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 21

Το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης τι είναι;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι αριθμός.

ΕΡΩΤΗΣΗ 22

Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ είναι ολοκληρώσιμη σε αυτό;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι.
-----------------	------

ΕΡΩΤΗΣΗ 23	Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ είναι ένας πραγματικός αριθμός που εξαρτάται από τι;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Εξαρτάται από τα άκρα ολοκλήρωσης α και β και από τις τιμές της f στο κλειστό διάστημα με άκρα α και β και όχι από το γράμμα που παριστάνει την ανεξάρτητη μεταβλητή της f . Δηλαδή $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

ΕΡΩΤΗΣΗ 24	Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της επιλογής της παράγουσας;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Ναι. Δηλαδή $\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$ και $\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} + 1 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 25	Με τι ισούται το: $\int_{\alpha}^{\beta} f'(t)dt =$ και Με τι ισούται το: $\int_{\alpha}^{\beta} f''(t)dt =$
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	➤ Το πρώτο: $\int_{\alpha}^{\beta} f'(t)dt = f(\beta) - f(\alpha)$ και ➤ Το δεύτερο: $\int_{\alpha}^{\beta} f''(t)dt = f'(\beta) - f'(\alpha)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 26	Τι γνωρίζετε για τη παραγοντική ολοκλήρωση;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 27	Τι γνωρίζετε για την αλλαγή μεταβλητής
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 28	Με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες τι μπορούμε να υπολογίσουμε;
-------------------	--

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Μπορούν να υπολογισθούν οι παρακάτω μορφές ολοκληρωμάτων. Όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x και $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}^*, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ ▪ $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) \cdot e^{\alpha x + \beta} dx$ ▪ $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) \cdot \eta\mu(\alpha x + \beta) dx$ ▪ $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha x + \beta) dx$ ▪ $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) \cdot \ln(\alpha x + \beta) dx$ με $\alpha x + \beta > 0$ ▪ $\int_{\alpha}^{\beta} e^{\alpha x + \beta} \cdot \eta\mu(\gamma x + \delta) dx$ ▪ $\int_{\alpha}^{\beta} e^{\alpha x + \beta} \cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta) dx$
-----------------	--

ΕΡΩΤΗΣΗ 29	Πως υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της αντίστροφης συνάρτησης;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Για τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x) dx$, εφόσον δεν είναι δυνατόν να υπολογίσουμε τη συνάρτηση f^{-1} εργαζόμαστε ως εξής : Θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(u)$ Τότε $dx = f'(u) \cdot du$ Τα νέα άκρα ολοκλήρωσης είναι u_1 και u_2 αντίστοιχα ώστε $\begin{cases} f(u_1) = \alpha \\ f(u_2) = \beta \end{cases}$ οι οποίες είναι μοναδικές, αφού η συνάρτηση f είναι 1-1. Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται λόγω των παραπάνω σχέσεων θα γίνει $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} u \cdot f'(u) du$ το οποίο και το υπολογίζουμε συνήθως με παραγοντική ολοκλήρωση.

ΕΡΩΤΗΣΗ 30	Πως υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της άρτιας συνάρτησης;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αν η συνάρτηση f είναι άρτια τότε ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx \text{ (απόδειξη στο τέλος)}$

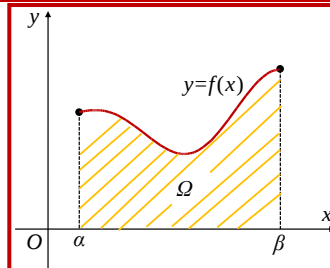
3.7 ΕΜΒΛΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

ΕΡΩΤΗΣΗ 31**Πρώτη περίπτωση**

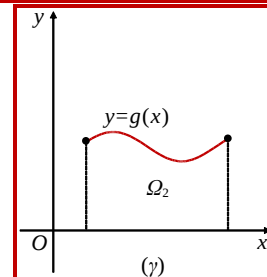
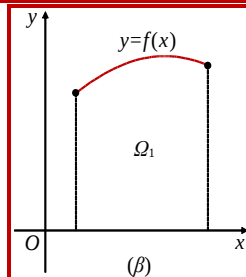
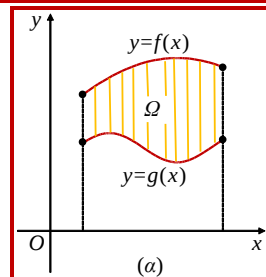
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$, ποιο είναι ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

**ΕΡΩΤΗΣΗ 32****Δεύτερη περίπτωση**

Έστω, δυο συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Με τι ισούται το εμβαδόν του χωρίου αυτού;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρούμε ότι

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$$

Επομένως,

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$$

Ο παραπάνω τύπος βρέθηκε με τις προϋποθέσεις ότι:

(α) $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και

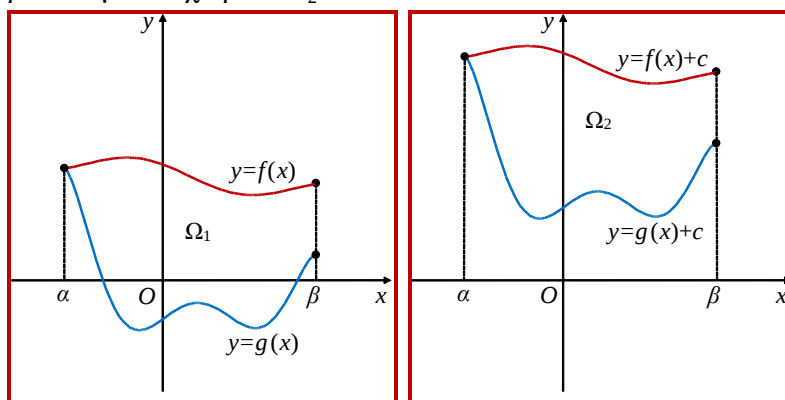
(β) οι f, g είναι μη αρνητικές στο $[\alpha, \beta]$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 33**Τρίτη περίπτωση**

Τι γίνεται αν δεν ισχύει η δεύτερη προϋπόθεση; δηλαδή οι f, g δεν είναι μη αρνητικές στο $[\alpha, \beta]$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρξει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω_1 έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω_2 .



Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε:

$$E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x) + c) - (g(x) + c)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$$

Άρα,

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 34**Τέταρτη περίπτωση**

Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g , με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$;

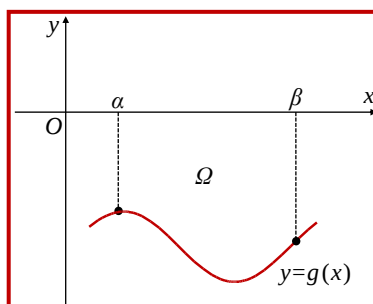
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0$, έχουμε

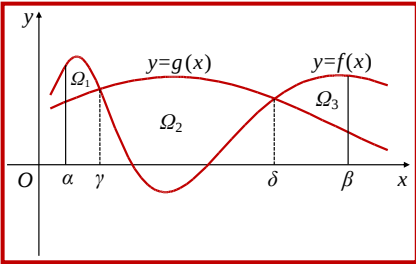
$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [-g(x)] dx = - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx. \end{aligned}$$

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε

$$E(\Omega) = - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

**ΕΡΩΤΗΣΗ 35****Πέμπτη περίπτωση**

Όταν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρό-

	σημο στο $[\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, πως το υπολογίζουμε;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Το εμβαδόν Ω είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3. Δηλαδή, $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = \int_{\alpha}^{\gamma} (f(x) - g(x)) dx + \int_{\gamma}^{\delta} (g(x) - f(x)) dx + \int_{\delta}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$ $= \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) - g(x) dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x) - g(x) dx + \int_{\delta}^{\beta} f(x) - g(x) dx$ $= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) - g(x) dx$ Επομένως, $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) - g(x) dx$ 

ΕΡΩΤΗΣΗ 36	Τι παριστάνει το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Παριστάνει το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x ή μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x. 