

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Συναρτήσεις - πεδίο ορισμού.

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

$$f(x) = e^{\frac{2x}{x^2-9}}, f(x) = e^{\frac{x^3}{x^2+x+1}}, f(x) = \ln(4-x^2)$$

2. Έστω $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{αν } x \leq 1 \\ e^x & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

- Να βρείτε το $f(\eta\mu\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε το $f(-1 - 2\eta\mu\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε το $f(x^4 + 1)$.
- Να λυθεί η εξίσωση: $f(x)=1$

(Υποδ: διακρίνω δυο περιπτώσεις $x \leq 1$ και $x > 1$)

3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+6}{x^2+\alpha x+1}$ Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το πεδίο ορισμού

της f να είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

4. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο $V = 500 \text{ cm}^3$. Η βάση του είναι τετράγωνο πλευράς x και το ύψος του είναι y . Να εκφράσετε την επιφάνεια του παραλληλεπιπέδου σαν συνάρτηση του x
5. Ένα σύρμα έχει μήκος 10 cm . Το κόβουμε σε δύο κομμάτια εκ των οποίων το ένα έχει μήκος x . Με το κομμάτι μήκους x κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο ισόπλευρο τρίγωνο. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το πηλίκο των εμβαδών των δύο σχημάτων.
6. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

$$f_1(x) = \frac{x^2-4}{x^2+5x-6}, f_2(x) = \frac{x^2-4}{x^2+10x+25}, f_3(x) = \frac{x^2-4}{x^2+10x+30}, f_4(x) = \sqrt{8-x}$$

7. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

$$f_1(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x-2}, f_2(x) = \sqrt{5-|x|}, f_3(x) = \sqrt{|x-1|-4}, f_4(x) = \sqrt{|x-3|+3}$$

8. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

$$f_1(x) = \sqrt{x^2-7x+6}, f_2(x) = \sqrt{2-\sqrt{x-2}}, f_3(x) = \sqrt{-x^2-x-1}, f_4(x) = \sqrt{x^2+2x-3} - \sqrt{16-x^2}$$

9. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{4x-x^2}{3}\right)}, f(x) = \sqrt{1-e^x}, f(x) = \sqrt{x^2-3|x|+2},$$

$$f(x) = \frac{\ln(x^2-7x+10)}{\sqrt{25-x^2}}, f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x+1}}, f(x) = \sqrt[3]{\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)}, f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt[3]{3-x}.$$

10. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^2 + 2x$	2. $f(x) = 2 - x $
3. $f(x) = \frac{2}{x^2+2}$	4. $f(x) = \frac{2x}{x-3}$
5. $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$	6. $f(x) = e^x + 2$
7. $f(x) = \ln x + 1$	8. $f(x) = x^2 + 2x - 3$
9. $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$	10. $f(x) = e^{x-1} + 3$

11. Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις και μετά να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών τους.

$f(x) = \sqrt{2 - x^2}$	$f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{αν } x \leq 1 \\ x - 2, \text{αν } x > 1 \end{cases}$
$f(x) = \begin{cases} e^x, \text{αν } x \leq 0 \\ x + 1, \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 3, \text{αν } 1 < x \end{cases}$	$f(x) = \ln x $
$f(x) = 4 - x^2 $	$f(x) = \sqrt{ x }$

12. Να βρεθεί το λ ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^3 + x - 6}{x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda^2}$ να είναι το $\mathbb{R}$.

13. Έστω $f(x) = x^2 + a^2x + a$, $g(x) = x^3 + 2$. Να βρεθεί το $a > 0$ ώστε οι C_f , C_g να τέμνονται στο σημείο με τετμημένη 1.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(3x - 2)$. Υποδ:

$$\left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$$

15. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[3, 7]$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(x + 2) + f(7 - x^2)$. Υποδ: $[1, 2]$

1

16. Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 4x + (a + 2)}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

17. Να βρεθεί το λ ώστε το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda^2}$ να είναι όλο το $\mathbb{R}$.

18. Να γράψετε χωρίς απόλυτα τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$f(x) = |3x - 2| + 1, \quad f(x) = |x^2 - 4x + 3| - x, \quad f(x) = |\ln x - 1|, \quad f(x) = |e^x - 1|, \quad f(x) = |\ln^2 x - \ln x|$$

19. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 1, \quad g(x) = x - 2$$

$$f(x) = \eta\mu x, \quad g(x) = \sigma\upsilon x$$

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \ln x.$$

20. Για ποιες τιμές του πραγματικού x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα xx' .

- $f(x) = \frac{1 - x}{x - 2}$

- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

- $f(x) = 1 - \ln x$

21. Για ποιες τιμές του πραγματικού x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

- $f(x) = -x^2 - 4x + 8$ και $g(x) = -2x^2 - x + 6$

- $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$

22. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι παρακάτω συναρτήσεις

1. $f(x) = -x^2 - 1$	2. $f(x) = -3x^3$
3. $f(x) = - x $	4. $f(x) = x-1 $
5. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$	6. $f(x) = \frac{-2x}{x^2+1}$
7. $f(x) = x x $	8. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$
9. $f(x) = \frac{x}{x^2-2}$	10. $f(x) = \frac{ x }{x}$
11. $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$	12. $f(x) = -3x^3 - x$

23. Έστω $f(x) = x^2 + ax + a$ και $g(x) = -x^2 + x - 3$ και οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από την C_g .

24. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{(x+1)(x+5)}{x+\lambda^2-2\lambda}$ και $g(x) = \frac{x^2+6x+5}{x+1}$ να είναι ίσες.

25. Αν ισχύει η σχέση $e^x \geq x+1$ για όλα τα x να δείξετε τη σχέση $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x-1$, για κάθε x θετικό.

Απόδειξη: Αν στη σχέση $e^x \geq 1+x$ θέσουμε $x-1$ αντί x , παίρνουμε $e^{x-1} \geq x$. Παίρνοντας τους φυσικούς λογαρίθμους και στα δύο μέλη, έχουμε $\ln x \leq x-1$.
 Αν στην τελευταία σχέση θέσουμε x^{-1} αντί x , θα πάρουμε $\ln(x^{-1}) \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow -\ln x \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$. ■

26. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) = (x+1)f(x^2+x) - (x-1)f(x^2-x)$ για κάθε x πραγματικός αριθμός. Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση είναι άρτια.

27. Έστω $f: [\alpha, 2\beta-1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = kx + 2\lambda$ και $g: [2-\alpha, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 3x + \kappa - \lambda$. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f = g$.

28. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες μεταξύ τους, αν όχι σε ποιο διάστημα είναι ίσες.

- $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$
- $f(x) = \frac{x}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sqrt{x^2-4}$, $g(x) = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-2}$

- $f(x) = \ln \frac{x-2}{x+2}, \quad g(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$
- $f(x) = \ln x^2, \quad g(x) = 2 \ln x$
- $f(x) = \ln x^3, \quad g(x) = 3 \ln x$
- $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}, & x \geq 2 \\ \sqrt{-x-2}, & x < -2 \end{cases}, \quad g(x) = \sqrt{|x|-2}$

29. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $3f(x) + f(-x) = 2\eta\mu x$, για κάθε x πραγματικός αριθμός.

- A) Ναδειχθεί ότι f περιττή.
B) Να βρεθεί ο τύπος της.

30. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $2f(x) - f(-x) = \sigma\upsilon\eta x$, για κάθε x πραγματικός αριθμός.

- A) Ναδειχθεί ότι f άρτια.
B) Να βρεθεί ο τύπος της.

21. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq -2 \\ 3-x, & x > -2 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \leq 1 \\ 4x-2, & x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\phi(x) = 2f(x) - g(x)$

22. Για μια συνάρτηση f ισχύει $f(x) + xf(-x) = x + 2$. Να βρεθεί ο τύπος της f . (Απ: $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x^2+1}$)

23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad g(x) = \frac{2x^2+2ax+a}{2(x^2-1)}, a \in \mathbb{R}, x > 0$.

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g
β) Για ποια τιμή του a ισχύει $f=g$;

24. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
β) Να αποδείξετε ότι $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1 \cdot x_2}\right)$ για κάθε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της.

25. ** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.
γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(|x|) = f(x)$.

Υποδ:

- α) Για $x = y = 0$, προκύπτει $f(0) = 0$
β) Για $x = y$ έχουμε $f(2x) = 3f(x)$
Για $y = -x$, έχουμε $f(2x) = 2f(x) + f(-x)$
απ' όπου προκύπτει $f(-x) = f(x)$
γ) Αν $x \geq 0$, ισχύει
Αν $x < 0$, $f(|x|) = f(-x) = f(x)$

26. ** Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2, x \neq 0$, να βρείτε το $f(2)$.

Υποδ: Για $x = 2$ και $x = \frac{1}{2}$ προκύπτουν δύο σχέσεις αν τις θεωρήσουμε σαν σύστημα, έχουμε $f(2) = -\frac{7}{4}$

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- Να εξετάσετε αν ορίζετε η $g \circ f$ και η $f \circ g$ στις παρακάτω περιπτώσεις :
 - $f(x) = 2x + 3, g(x) = 4x + 1$,
 - $f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = \sqrt{x-1}$
 - $f(x) = \frac{x+3}{x-2}, g(x) = \sqrt{x-1}$
 - $f(x) = \sqrt{1-2x^2}, g(x) = \eta\mu x$
 - $f(x) = \sqrt{1-x^2}, g(x) = \sqrt{x-1}$
 - $f(x) = x^2 + 1, g(x) = \sqrt{x+2}$
- Έστω $f: (-3,3) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 4$ και $g: (0,12) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x - 1$. Να βρεθούν οι συνθέσεις $g \circ f, f \circ g, f \circ f$.
- Έστω $f: [1,4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{2x+1}$ και $g: [1, e^5] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \ln x^2$. Να βρεθεί η $g \circ f$.
- Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-3}$ και $g(x) = \sqrt{2-3x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $(f \circ g)(x), (g \circ f)(x)$.
- Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 2x + 3$. Να βρεθεί η συνάρτηση f αν $(f \circ g)(x) = x^2 - x + 1$.
- Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x - 1$. Να βρεθεί η συνάρτηση f αν $(f \circ g)(x) = x^3 + 1$.
- Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \ln x$. Να βρεθεί η συνάρτηση f αν $(f \circ g)(x) = x - 4$.
- Έστω η συνάρτηση $(f \circ g)(x) = x^2 - 3x + 2$ με $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $g(x) = 2x - 3$. Να βρεθεί ο τύπος της f .
- Έστω η συνάρτηση $(f \circ g)(x) = x^2 - 3x + 2$ με $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $f(x) = x + 1$. Να βρεθεί ο τύπος της g .
- Να βρείτε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει: $(f \circ g)(x) = x^2 + 3x + 3$ και $g(x) = x - 1$.
- Να βρείτε συνάρτηση g για την οποία ισχύει: $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 4x - 9$ και $f(x) = 4x - 1$.
- Να βρείτε συνάρτηση g για την οποία ισχύει: $(f \circ g)(x) = x - 1$ και $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.
- Έστω η συνάρτηση $(f \circ g)(x) = x^2 + x + 1$ με $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $f(x) = e^x$. Να βρεθεί ο τύπος της g .

14. Έστω $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < -1 \\ x+2, & x \geq 2 \end{cases}$ και $g: [-2,3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 2x-1$. Να βρείτε αν ορίζεται τη συνάρτηση $f \circ g$.
15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x+2}, & x > 0 \end{cases}$ και $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Να βρεθεί η $f \circ g$.
16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ \frac{x}{x+2}, & x > 1 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [-6, -2] \\ x+1, & x \in (-2, 6] \end{cases}$. Να βρεθεί η $f \circ g$.
17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ και $g(x) = \frac{3}{x-1}$. Να βρεθούν οι : $f \circ g, g \circ f, g \circ g, f \circ f$
18. Έστω $f(x) = \frac{x+2}{3x}$. Να βρείτε αν ορίζεται η συνάρτηση $f \circ f$.
19. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \ln x$. Αν $(f \circ g)(x) = 2x-1$ να προσδιοριστεί η συνάρτηση f και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(\ln 3x) + f(\ln x) + 2 = 8x$ για κάθε $x > 0$.
20. Έστω $f(x) = \frac{4-ax}{3-x}$. Να βρεθεί το a (πραγματικός αριθμός) ώστε $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε x που ανήκει στο Π.Ο της f .
21. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) = x^2 + 3x$ για κάθε x πραγματικό αριθμό. Να αποδειχθεί ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (Υποδ: θέτω $x=f(x)$ και μετά θέτω $x=0$).
22. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) = x^2 - x + 1$ για κάθε x πραγματικό αριθμό.
- Να αποδειχθεί ότι $f(0)=0$. (Υποδ: θέτω $x=f(x)$ και μετά θέτω $x=1$).
 - Να αποδειχθεί ότι η $g(x) = x^2 f(x) - x + 1$ δεν είναι "1-1" (Υποδ: $g(0)=g(1)$).

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία στα πεδία ορισμού τους.

- $f(x) = 2x - 1$
- $f(x) = -3x + 1$
- $f(x) = 3x^3 + 1$
- $f(x) = -3x^3 - 1$
- $f(x) = \sqrt{1 - 2x} + 1$
- $f(x) = e^x + x^3 - 1$
- $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x - 1)$
- $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x - x^5$
- $f(x) = \frac{1}{x} - x^2 - \sqrt{x}$
- $f(x) = x^5 - \sqrt{1 - x} + 2x^3$
- $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ Υποδ: $(f(x) = 1 - \frac{1}{e^x + 1})$ ή με διαφορά)
- $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ Υποδ: $(f(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1})$ ή με διαφορά)
- $f(x) = x^2 - 2x + 3$ στα διαστήματα $(-\infty, 1]$, $[1, +\infty)$. Υποδ: $f(x) = (x - 1)^2 + 2$
- $f(x) = x^2 - 3x - 4$ στα διαστήματα $(-\infty, \frac{3}{2}]$, $[\frac{3}{2}, +\infty)$. Υποδ: $f(x) = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4}$

2. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x \leq 2 \\ -2x + 12, & x > 2 \end{cases}$ και από την γραφική παράσταση να βρεθεί το σύνολο τιμών.

3. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$ και από την γραφική παράσταση να βρεθεί το σύνολο τιμών.

4.

5. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» και να βρεθούν οι αντίστροφες αν υπάρχουν.

• $f(x) = 2x - 1$	• $f(x) = x^2 - 1$
• $f(x) = \frac{1}{x}$	• $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$
• $f(x) = \ln x + 2$	• $f(x) = \ln(x+1)$
• $f(x) = x $	• $f(x) = 3 \cdot \eta\mu x$
• $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + 2}$	• $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$

• $f(x) = 1 - \sqrt{x-1}$	• $f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$
---------------------------	--

6. Να βρεθεί η f^{-1} των συναρτήσεων:

- $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$
- $f: [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$
- $f: \left[7, \frac{41}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{2x-5}$.

7. Έστω $f(x) = 2x-1$. Να βρεθεί η f^{-1} και η $f \circ f^{-1}$.

8. Έστω $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ 2-x, & x > 0 \end{cases}$. Να βρεθεί αν ορίζεται η f^{-1} .

9. Έστω $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$. Να βρεθεί αν ορίζεται η f^{-1} .

10. Να βρεθούν οι αριθμοί λ, β ώστε η συνάρτηση $f(x) = \lambda x + \beta$ να έχει αντίστροφη και να ισχύει $f^{-1}(x) = f(x)$.

11. Έστω $f: [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x+3$ και $g(x) = 3x^2+2$. Να ορίσετε την $g \circ f$ και την $(f \circ g)^{-1}$.

12. Έστω $f(x) = -x^3$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της f και της f^{-1} .

Λύση

$$f(x) = -x^3 \quad A_f = \mathbb{R}$$

Εστω $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -x_1^3 = -x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ "1-1" άρα $\exists$ η f^{-1}

Εστω $y = -x^3 \Rightarrow x^3 = -y \Rightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{-y} & \text{αν } y \leq 0 \\ -\sqrt[3]{y} & \text{αν } y > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{-y}, & y \leq 0 \\ -\sqrt[3]{y}, & y > 0 \end{cases}$$

1^η μέθοδος : Θα λύσω συν. εξίσωση: $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -x^3 = \sqrt[3]{-x}, & x \leq 0 \\ -x^3 = -\sqrt[3]{x}, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-x^3)^3 = -x, & x \leq 0 \\ (-x^3)^3 = -x, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^9 = x, & x \leq 0 \\ x^9 = x, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x^9 - x = 0 \Rightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$$

Άρα $y = 0 \vee y = -1 \vee y = 1$ Άρα τα Σ. τομής είναι τα $A(0,0), B(1,-1), \Gamma(-1,1)$.

2^η μέθοδος : $f(x) = f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ f^{-1}(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y = -x^3 \\ x = -y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ y = -(-y^3)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, & y = 0 \\ x = 1, & y = -1 \\ x = -1, & y = 1 \end{cases}$$

13. Έστω $f(x) = x^5 + x - 1$

- Ν. δ. ο: η f είναι «1-1»
- Να βρείτε τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ και της ευθείας $\psi = x$.
- Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ (Να βρεθούν τα κοινά σημεία της C_f και της $C_{f^{-1}}$)
- Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) > 1$
- Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(-1) > x$

(Παρ: $f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x$ μόνο όταν $f(x)$ γνησίως αύξουσα.)

Υποδ: 1) $A = \mathbb{R}$ εσω $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5$ } $\Rightarrow x_1^5 + x_1 - 1 < x_2^5 + x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow$
 $x_1 < x_2$ }
 αρα "1-1"

2) $f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^5 + x - 1 = x \Leftrightarrow x^5 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

3) $f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} f(x) = \psi \\ f^{-1}(x) = \psi \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} f(x) = \psi \\ x = f(\psi) \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(x) + x = f(\psi) + \psi \Rightarrow$
 $g(x) = g(\psi)$ οπω $g(x) = f(x) + x$. Αφου $f \uparrow$ να η x είναι $\uparrow$ εχω σι
 $g(x) \uparrow$ αρα g "1-1" αρα $g(x) = g(\psi) \Leftrightarrow x = \psi$
 αρα $f(x) = \psi = x \Leftrightarrow x = 1$

αξιοθ: Αφου $f \uparrow$ $f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \dots$

4) $f^{-1}(x) > 1 \Leftrightarrow x > f(1) \Leftrightarrow x > 1$

14. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^7(x) + f^5(x) - x = 0$ για κάθε x πραγματικό αριθμό, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Να βρεθεί η f^{-1} αν υπάρχει.

15. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^5(x) + f(x) = x + 1$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

- Ν. δ. ο: η f είναι «1-1»
- Να βρεθεί η f^{-1}
- Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = x$ (Να βρεθούν τα κοινά σημεία της C_f και της πρώτης διχοτόμου.)

16. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^5(x) + 6f(x) - 2x + 4 = 0$ για κάθε x πραγματικό αριθμό.

- Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
- Αν επιπλέον η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ να βρείτε την f^{-1} .

17. Έστω $f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να δειχθεί ότι η f είναι «1-1»
- Να λυθεί η εξίσωση $3^x + 4^x = 7^x$

Υπόσ: • εστω $x_1 < x_2 \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{7}\right)^{x_2}$ γιατί $g(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x \downarrow$
εστω $x_1 < x_2 \Rightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^{x_1} > \left(\frac{4}{7}\right)^{x_2}$ γιατί $h(x) = \left(\frac{4}{7}\right)^x \downarrow$
αρα $\left(\frac{3}{7}\right)^{x_1} + \left(\frac{4}{7}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{7}\right)^{x_2} + \left(\frac{4}{7}\right)^{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \downarrow$
αρα "1-1"
• $3^x + 4^x = 7^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x = 1 \Rightarrow f(x) = f(1) \Rightarrow$
 $x=1$

18. Έστω $f(x) = 2 - (x-2)^3$, $x \in \mathbb{R}$.

- Ναδειχθεί ότι η f είναι «1-1»
- Να βρεθούν τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $\psi = x$.

19. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x+1) + f(x-1) = 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Ναδειχθεί ότι η f δεν είναι «1-1»
- Ναδειχθεί ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Υπόσ: • για $x=1$ και για $x=-1$ έχω από αρχική σχέση

$$\left. \begin{aligned} f(2) + f(0) &= 3 \\ f(0) + f(-2) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(2) + f(0) = f(0) + f(-2) \Rightarrow f(2) = f(-2)$$

αρα f όχι "1-1"
• Αρα f όχι "1-1" τότε δεν είναι γνησίως μονότονη
αλλιώς: εστω ότι f είναι $\uparrow$ τότε

$$\left. \begin{aligned} \text{αν } x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1 + 1) < f(x_2 + 1) \\ \text{και } x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1 - 1) < f(x_2 - 1) \end{aligned} \right\} \xRightarrow{(+)} f(x_1 + 1) + f(x_1 - 1) < f(x_2 + 1) + f(x_2 - 1) \Rightarrow 3 < 3 \text{ άτοπο}$$

αρα f όχι γνησίως μονότονη.

20. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση, η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(4,5)$.

- Ναδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να βρεθεί το $f^{-1}(3)$ και το $f^{-1}(5)$.
- Ναδειχθεί ότι $f^{-1}(f(4)) + f(f^{-1}(3)) = 7$.
- Να λυθεί η εξίσωση: $f(3 + f^{-1}(2x)) = 5$.

21. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x + \psi) = f(x) + f(\psi)$

- Ναδειχτεί ότι: $f(0) = 0$
- Ναδειχτεί ότι: η f είναι περιττή
- Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$ τότε ναδειχθεί ότι η f είναι «1-1»
- Ναδειχτεί ότι: $f^{-1}(x + \psi) = f^{-1}(x) + f^{-1}(\psi)$

Λύση:

1) Για $x = -x$
 2) Για $\psi = -x$ έχω $f(x + \psi) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(0) = f(x) + f(-x) \xrightarrow{f(0)=0}$
 $f(-x) = -f(x)$ αρα f περιττή
 3) Έστω $f(x_1) = f(x_2)$ θα δείξω ότι $x_1 = x_2$
 δια $x = x_1$ και $\psi = -x_2$ έχω $f(x_1 + \psi) = f(x_1) + f(-x_2) \xrightarrow{f \text{ περιττή}}$
 $f(-x_2) = -f(x_2)$
 $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) \xrightarrow{f(x_1)=f(x_2)}$ $f(x_1 - x_2) = 0 \xrightarrow{\psi=0}$ $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow$
 $x_1 = x_2 \Rightarrow f: '1-1'$ αρα $\exists$ f^{-1}
 4) $f^{-1}(\Leftrightarrow) f^{-1}(x + \psi) = f^{-1}(x) + f^{-1}(\psi) \Leftrightarrow f(f^{-1}(x + \psi)) = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(\psi))$
 $\Leftrightarrow x + \psi = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(\psi)) \Leftrightarrow x + \psi = x + \psi$ ισχύει.
Διάσπαση: εσω $f^{-1}(x + \psi) = u$, $f^{-1}(x) = \lambda$, $f^{-1}(\psi) = \mu$. Θα
 δείξω ότι $u = \lambda + \mu$ προφανώς
 $f^{-1}(x + \psi) = u \Rightarrow x + \psi = f(u)$
 $f^{-1}(x) = \lambda \Rightarrow x = f(\lambda)$
 $f^{-1}(\psi) = \mu \Rightarrow \psi = f(\mu)$
 $\Rightarrow f(u) = f(\lambda) + f(\mu) \Rightarrow f(u) = f(\lambda + \mu) \xrightarrow{f(1-1)}$
 $u = \lambda + \mu$

22. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $f(x \cdot \psi) = f(x) + f(\psi)$

- Ναδειχτεί ότι: $f(1) = 0$
- Ναδειχτεί ότι: $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$, x πραγματικός αριθμός.
- Ναδειχτεί ότι: $f\left(\frac{x}{\psi}\right) = f(x) - f(\psi)$, $\forall x, \psi \in (0, +\infty)$
- Αν υπάρχει η αντίστροφη της f , να δείξετε ότι $f^{-1}(x + \psi) = f^{-1}(x) + f^{-1}(\psi) \forall x, \psi \in \mathbb{R}$

23. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x + \ln x$

- Ναδειχτεί ότι: η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Ναλυθεί η εξίσωση: $f^{-1}(x) = 1$ (Απ: $x=3$)
- Ναλυθεί η ανίσωση $f^{-1}(3x + 2) > x$ (Απ: $0 < x < e^2$)

24. Έστω $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f\left(\frac{x}{\psi}\right) = f(x) - f(\psi) \forall x, \psi \in \mathbb{R}^*$

- Ναδειχτεί ότι: $f(1) = 0$
- Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$ τότε ναδειχθεί ότι η f είναι «1-1»
- Ναδειχτεί ότι: $f^{-1}(x - \psi) = \frac{f^{-1}(x)}{f^{-1}(\psi)} \forall x, \psi \in f(\mathbb{R}^*)$
- Ναλυθεί η εξίσωση $f(x) + f(x^2 + 2) = f(x + 1) + f(x^2 + 1)$

25. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ισχύει $f(f(x)) = -x$.

- Ναδειχθεί ότι η f είναι «1-1»
- Ναδειχθεί ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.
- Ναδειχθεί ότι: η συνάρτηση είναι περιττή.

Υπόδ:

- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ «1-1»
- εστω f ~~π~~ τ ότε $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \xrightarrow{f \downarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow -x_1 < -x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$ άτπ
- ομοίως αν $f \uparrow$
- $f(f(x)) = -x \xrightarrow{x: f(x)} f(f(f(x))) = -f(x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ άρα f περιττή.

26. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \pi \cdot \left(\frac{e}{\pi}\right)^x + \left(\frac{1}{e}\right)^x$

- Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.
- Να δείξετε ότι $f(1) > 2$
- Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{x^2} - e - 1) > \frac{\pi^2}{e} + e$. (Υποδ: $f(e^{x^2} - e - 1) > f(-1) \xrightarrow{f \downarrow} e^{x^2} < e \Rightarrow x^2 < 1$)
- Να δείξετε ότι $\pi \cdot e^{2(x-1)} + \pi^{x-1} > (\pi+1) \cdot (\pi \cdot e)^{x-1}$ για $x < 1$. (Υποδ: $x < 1 \Rightarrow f(x) > f(1)$)

27. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(f(x)) + f(x) = -x$

- Ναδειχθεί η f είναι «1-1»
- Ναδειχθεί ότι αν f γνησίως μονότονη, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Υποδ: εις άποπο απαγωγή)

28. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(f(x)) + f(x) = -\frac{x}{4} - 3$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $f(0) = -2$

- Ναδειχθεί η f είναι «1-1»
- Ναδειχθεί ότι αν f γνησίως μονότονη, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Ναδειχθεί ότι:
 - $f(-2) = -1$
 - $f(-1) = -\frac{3}{2}$
 - $f^{-1}(0) = -4$

- Υπόσ: • Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ "1-1"
- Εστω f ∇ ζότε για $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (+)
 $-\frac{x_1}{4} - 3 < -\frac{x_2}{4} - 3 \Rightarrow x_1 > x_2$ άτοπο αφού αφού f γνήσιως
 μονότονη αυστηρά αυξάνουσα θα είναι ∇ .
- στην αρχική σχέση για $x=0$ έχω: $f(f(0)) + f(0) = -3 \xrightarrow{f(0)=-2} f(-2) - 2 = -3 \Rightarrow f(-2) = -1$

- στην αρχική σχέση για $x: -2$ έχω $f(f(-2)) + f(-2) = -\frac{(-2)}{4} - 3 \Rightarrow f(-1) + (-1) = \frac{1}{2} - 3 \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow f(-1) = -\frac{3}{2}$
- στην αρχική σχέση για $x: f^{-1}(0)$ έχω:
 $f(f(f^{-1}(0))) + f(f^{-1}(0)) = -\frac{f^{-1}(0)}{4} - 3 \Rightarrow f(0) + 0 = -\frac{f^{-1}(0)}{4} - 3 \xrightarrow{f(0)=-2} \frac{f^{-1}(0)}{4} = -3 + 2 \Rightarrow f^{-1}(0) = -4$

29. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(f(x)) = x + 1$ και $f(0) = \frac{1}{2}$

- Να δειχθεί η f είναι «1-1»
- Να δειχθεί ότι: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
- Να δειχθεί ότι: $f^{-1}(x) = f(x) - 1$
- Να δειχθεί ότι: $f(x+1) = f(x) + 1$
- Να δειχθεί ότι: $f^{-1}(1) = \frac{1}{2}$
- Να λυθεί η εξίσωση: $f^{-1}(x^2 + 2x - 2) = \frac{1}{2}$

- Λύση $f(f(x)) = x+1$
- Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ αφού f "1-1"
- Εστω $f(x) = y$ αναζητώ τις τιμές του y για τις οποίες η εξίσωση έχει λύση ως προς x αφού έχω:
 $f(x) = y \Rightarrow f(f(x)) = f(y) \Rightarrow x+1 = f(y) \Rightarrow x = f(y) - 1$
 Επομένως δεν έχω περιορισμό στο y αφού $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ από $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

• Μορφή: Εστω $x \in \mathbb{R}$ τυχαίο θα αποδείξω ότι $\exists \lambda \in A_f = \mathbb{R}$ ώστε $f(\lambda) = x$
 αναρωτιέται ποτε $x+1 = u \Rightarrow x = u-1$ άρα στην αρχική σχέση
 $f(f(x)) = x+1 \xrightarrow{x: u-1} f(f(u-1)) = u-1+1 \Rightarrow f(\underbrace{f(u-1)}) = u$
 άρα το ζητούμενο λ είναι το $\lambda = f(u-1)$ ώστε $f(\lambda) = u$
 Επομένως αφού για το τυχαίο $x \exists \lambda$ ώστε $f(\lambda) = x$ το
 σύνολο τιμών είναι $\mathbb{R}$ δηλαδή $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

• Αφού ισχύει $x = f(x) - 1 \xrightarrow{f(x)=\psi} f^{-1}(\psi) = f(x) - 1 \xrightarrow{\psi=x}$
 $\boxed{f^{-1}(x) = f(x) - 1}$
 • ισχύει $f(f(x)) = x+1 \xrightarrow{x: f(x)} f(\underbrace{f(f(x))}_{x+1}) = f(x)+1 \Rightarrow$
 $\boxed{f(x+1) = f(x)+1}$
 • ισχύει: $f^{-1}(x) = f(x) - 1 \xrightarrow{x: 1} f^{-1}(1) = f(1) - 1 \Rightarrow$
 αφού $f(x+1) = f(x)+1 \xrightarrow{x: 0} f(1) = f(0)+1 \Rightarrow$
 $f^{-1}(1) = f(0) + 1 - 1 = f(0) \Rightarrow \boxed{f^{-1}(1) = \frac{1}{e}}$
 • $f^{-1}(x^2 + 2x - 2) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = f(\frac{1}{e}) \xleftrightarrow{f^{-1}(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}} \frac{1}{e} = f(\frac{1}{e})$
 $x^2 + 2x - 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$

30. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(x) - x - 1 \leq x^2 \leq f(x+1) - 3x - 3$ για όλα τα x .

- Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.
- Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Υπόσ: • Ισχύει: $f(x) - x - 1 \leq x^2 \leq f(x+1) - 3x - 3 \Rightarrow$
 $\left. \begin{aligned} f(x) - x - 1 &\leq x^2 \\ x^2 &\leq f(x+1) - 3x - 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} f(x) &\leq x^2 + x + 1 \quad (1) \\ f(x+1) &\geq x^2 + 3x + 3 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\substack{x+1=u \\ x=u-1}}$
 $f(u) \geq (u-1)^2 + 3(u-1) + 3 \Rightarrow f(u) \geq u^2 - 2u + 1 + 3u - 3 + 3 \Rightarrow$
 $f(u) \geq u^2 + u + 1 \xrightarrow{u:x} f(x) \geq x^2 + x + 1 \quad (2)$
 Από (1), (2) $\Rightarrow f(x) = x^2 + x + 1$
 • $f(x) = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}$
 Για $x_1 < x_2 < -\frac{1}{4} \Rightarrow x_1 + \frac{1}{4} < x_2 + \frac{1}{4} < 0 \Rightarrow \left(x_1 + \frac{1}{4}\right)^2 > \left(x_2 + \frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow$
 $\left(x_1 + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} > \left(x_2 + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \downarrow \text{ στο } (-\infty, -\frac{1}{4}]$
 ομοίως $f \uparrow \text{ στο } [-\frac{1}{4}, +\infty)$

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

ισχύει ότι $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow f(x) \geq f\left(-\frac{1}{4}\right) \forall x \in \mathbb{R}$

αρα για $x = -\frac{1}{4}$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$

• $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

31. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και f γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

- Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^3 + 2$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- Να δείξετε ότι για $x \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq x^3$ και για $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq x^3$.
- Να δείξετε ότι $f(1) > f(2) - 7$.
- Να λυθεί η ανίσωση: $f(x^2 + 2) - f(3x) < (x^2 + 2)^3 - (3x)^3$

Λύση: • έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Rightarrow$

$f(x_1) - x_1^3 + 2 > f(x_2) - x_2^3 + 2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow g(x)$ $\searrow$

• έστω $x \leq 0$ $\Rightarrow g(x) \geq g(0) \Rightarrow f(x) - x^3 + 2 \geq f(0) + 2 \Rightarrow f(x) \geq x^3$

• έστω $x \geq 0$ $\Rightarrow g(x) \leq g(0) \Rightarrow f(x) \leq x^3$

• $1 < 2$ $\Rightarrow g(1) > g(2) \Rightarrow f(1) - 1 + 2 > f(2) - 2^3 + 2 \Rightarrow f(1) > f(2) - 8 + 2 - 1 \Rightarrow f(1) > f(2) - 7$.

• $f(x^2 + 2) - f(3x) < (x^2 + 2)^3 - (3x)^3 \Leftrightarrow f(x^2 + 2) - (x^2 + 2)^3 < f(3x) - (3x)^3 \Leftrightarrow$

$g(x^2 + 2) < g(3x) \Leftrightarrow x^2 + 2 > 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

32. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ισχύουν:

- $f(0)=0$
- f γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
- $(f \circ g)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$

Να λυθεί η ανίσωση: $g(f(x+1)) - 2f(x) < x+1$

Λύση: ισχύει: $g(f(x+1)) - 2f(x) < x+1 \Leftrightarrow f(g(f(x+1)) - 2f(x)) < f(x+1) \Leftrightarrow$

$f(g(x)) - 2f(x) < f(x+1) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow$

$x > 0$

33. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x^3 + 3x - 4$.

- Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.
- Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.
- Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από την ευθεία $\psi=1$.
- Να λυθεί η ανίσωση: $f^{-1}(2f(x) - x^3 + 4) < x$.

Υπό:

- Προφανώς $f \neq 1$
- Θα λύσω την εξίσωση: $f(x) = f^{-1}(x) \iff f(x) = 4 \iff f^{-1}(x) = 4 \iff x = f(4)$
 $f(x) + x = f(4) + 4 \iff g(x) = g(4) \iff x = 4$
 $\text{όμως } g(x) \text{ είναι } f(x) + x \text{ και } h(x) = x \text{ άρα } g \text{ "1-1"}$
- $x = 4 \iff x = f(x) \iff 2x^3 + 3x - 4 = x \iff 2x^3 + 2x - 4 = 0 \iff (x-1)(2x^2 + 2x + 4) = 0 \iff x = 1, x = -1$
 $\Delta < 0$
 Άρα το κοινό σημείο είναι το $A(1, 1)$
- $f(x) > 1 \iff 2x^3 + 3x - 4 > 1 \iff 2x^3 + 3x - 5 > 0$
 $(x-1)(2x^2 + 2x + 5) > 0 \iff x-1 > 0 \iff x > 1$
 $\Delta < 0$
- $f^{-1}(2f(x) - x^3 + 4) < x \iff 2f(x) - x^3 + 4 < f(x) \iff f(x) - x^3 + 4 < 0 \iff 2x^3 + 3x - 4 - x^3 + 4 < 0 \iff x^3 + 3x < 0 \iff x(x^2 + 3) < 0 \iff x < 0$

34. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ με πεδίο ορισμού το $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Να δείξετε ότι και δυο συναρτήσεις αντιστρέφονται.
- Να υπολογίσετε το $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- Να υπολογίσετε το $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- Να υπολογίσετε το $g^{-1}\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

- Υπό:
- $f(x) \nearrow \text{ στο } [0, \frac{\pi}{2}]$
 $g(x) \searrow \text{ στο } [0, \frac{\pi}{2}]$
 Άρα αντιστρέφονται
 - $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f^{-1}\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$
 - $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = g^{-1}\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$
 - $g^{-1}\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

35. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με f γνησίως μονότονη της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(-1, 7)$.

- Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Να λυθεί η εξίσωση: $|x - 1| = f^{-1}(5)$.
- Να λυθεί η ανίσωση: $f^{-1}(2 + f(3x^2 - 2x)) < -1$

Υπόψ: • ισχύει $-1 < 1 \Rightarrow f(-1) > f(1)$ $\xrightarrow[\text{μονότον}]{f \text{ γνησίως}}$ $f \downarrow$

• $|x-1| = f^{-1}(5) \xLeftrightarrow{f \downarrow} f(|x-1|) = 5 \Leftrightarrow f(|x-1|) = f(1) \Leftrightarrow$
 $|x-1| = 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \vee x-1 = -1 \Leftrightarrow x = 2, \vee x = 0$

• $f^{-1}(2 + f(3x^2 - 2x)) < -1 \Leftrightarrow 2 + f(3x^2 - 2x) < f(-1) \Leftrightarrow$
 $2 + f(3x^2 - 2x) < 7 \Leftrightarrow f(3x^2 - 2x) < 5 \Leftrightarrow f(3x^2 - 2x) < f(1) \Leftrightarrow$
 $3x^2 - 2x < 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 < 0$ $\xrightarrow{-\infty \quad -1/3 \quad 1 \quad +\infty}$
 $x \in (-1/3, 0)$

36. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $h(x) = \frac{1}{x+2}$ με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$.

A. α) Να βρείτε μια συνάρτηση g ώστε $fo g = h$.

β) Να βρείτε μια συνάρτηση φ ώστε $\varphi \circ f = h$.

B. α) Να βρείτε τις f^{-1} , g^{-1} , h^{-1} (αντίστροφες των f , g , h).

β) Να βρείτε τις $f^{-1} \circ g^{-1}$ και $g^{-1} \circ f^{-1}$.

γ) Να εξετάσετε αν $g^{-1} \circ f^{-1} = h^{-1}$ (δικαιολογήστε την απάντησή σας).

37. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να βρείτε την f^{-1} .

38. ** Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις της μορφής $f(x) = ax+b$, $a \neq 0$, σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

α) $f = f^{-1}$

β) $f = -f^{-1}$

γ) $f = f^{-1} + c$

($c \neq 0$, σταθερά)

39. ** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$(fo f)(x) - f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της f .

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

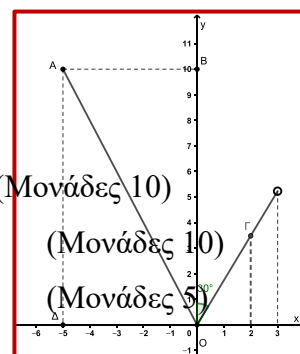
1. ΘΕΜΑ 2/26603

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης (Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

γ) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Γ; (Μονάδες 5)



2. ΘΕΜΑ 2/29830

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 10)

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i. $f \cdot g$ (Μονάδες 7)

ii. $\frac{f}{g}$ (Μονάδες 8)

3. ΘΕΜΑ 2/26637

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \ln x$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \cdot g$. (Μονάδες 9)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων

των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$, που ορίσατε στα ερωτήματα (α) και (β). (Μονάδες 7)

4. ΘΕΜΑ 2/29831

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το διάστημα $(-1, 1)$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$. (Μονάδες 8)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{x}$, να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$, $x \in \mathbb{R}^*$. (Μονάδες 10)

5. ΘΕΜΑ 2/29832

Δίνεται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ και $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}^*$ και της g το διάστημα $(-1, 1)$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $(f \circ g)(x)$. (Μονάδες 9)

6. ΘΕΜΑ 2/35168

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g και h ώστε :

$f(x) = \ln(1 + e^x)$, $g(x) = 2\ln x$ και $h(x) = \ln(1 + x^2)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 8)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$. (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και h είναι ίσες.

(Μονάδες 8)

7. ΘΕΜΑ 2/23198

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1, x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 9)

Έστω $f^{-1}(x) = (x + 1)^2, x \geq -1$

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} . (Μονάδες 9)

8. ΘΕΜΑ 2/23209

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2 - 1, x \leq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$.

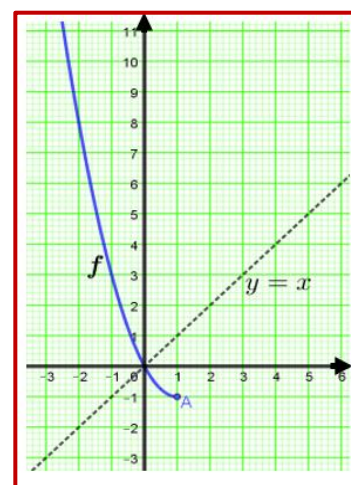
(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να μεταφέρετε στην κόλλα σας ή στο φύλλο απαντήσεων το παρακάτω σχήμα με την γραφική παράσταση της f και το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .

(Μονάδες 8)



9. ΘΕΜΑ 2/23216

Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα xx' και για ποιες είναι πάνω από τον xx' .

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$

(Μονάδες 10)

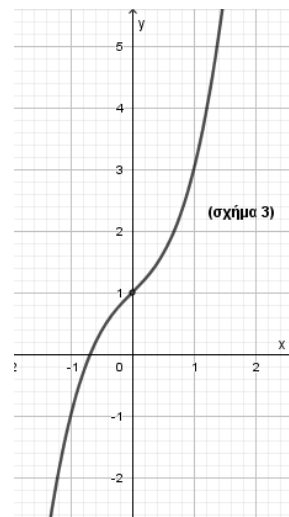
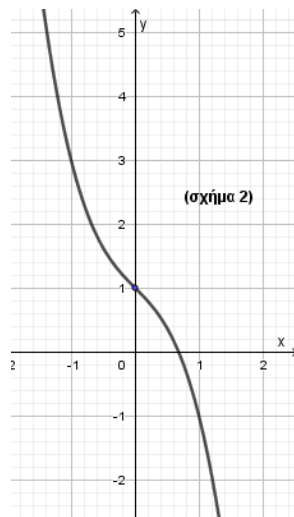
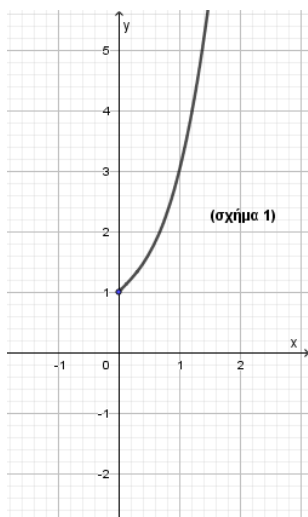
10. ΘΕΜΑ 2/23642

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 07)

β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 07)

- γ)
- Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $|f|$. (Μονάδες 06)
 - Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|x^3 + x + 1| = 2023$. (Μονάδες 05)

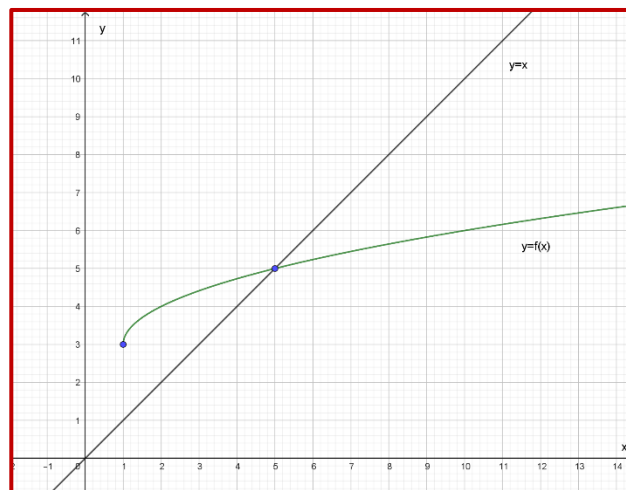
11. ΘΕΜΑ 2/24130

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$, $x \geq 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών καθώς και την αντίστροφη της f . (Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και η διχοτόμος $y = x$ της γωνίας xOy . Αφού μεταφέρετε το σχέδιο στην κόλλα σας, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f^{-1} και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f , f^{-1} . (Μονάδες 08)



12. ΘΕΜΑ 2/24569

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f = [0,1]$. (Μονάδες 05)

β)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι “1 – 1”. (Μονάδες 10)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 0, x \in [0,1]$. (Μονάδες 10)

13. ΘΕΜΑ 2/24703

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $x \in (-\infty, 1]$.

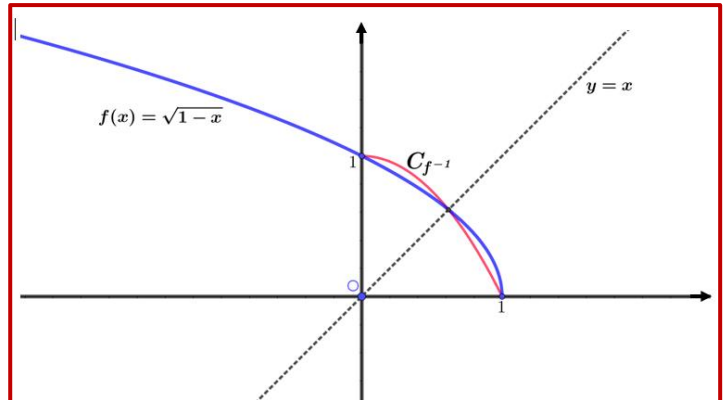
α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της f^{-1} .



Να μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων το παραπάνω σχήμα και το οποίο να συμπληρώσετε με την υπόλοιπη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .

(Μονάδες 7)

14. ΘΕΜΑ 2/24991

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -2 \ln x + 1, x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} . (Μονάδες 09)

γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = 1 - \ln x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$.

(Μονάδες 08)

15. ΘΕΜΑ 2/26602

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ και $g(x) = x - 2$.

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h , με $h(x) = |g(x)|$. (Μονάδες 7)

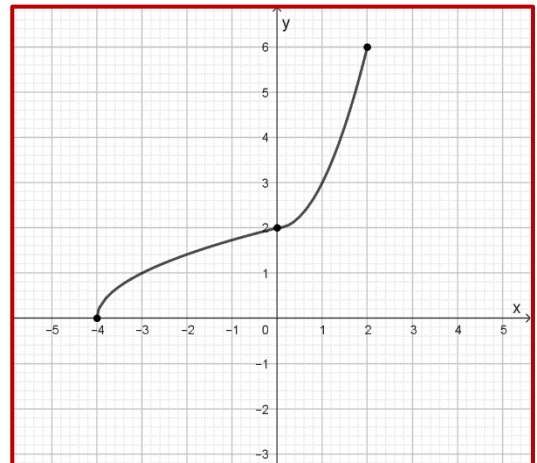
γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f και h .

(Μονάδες 10)

16. ΘΕΜΑ 2/27277

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συνάρτησης f . Με τη βοήθεια του σχήματος να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f^{-1}(f(6))$. (Μονάδες 8)
- γ) Στο σύστημα αξόνων που ακολουθεί να χαράξετε την γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)

**17. ΘΕΜΑ 2/27317**

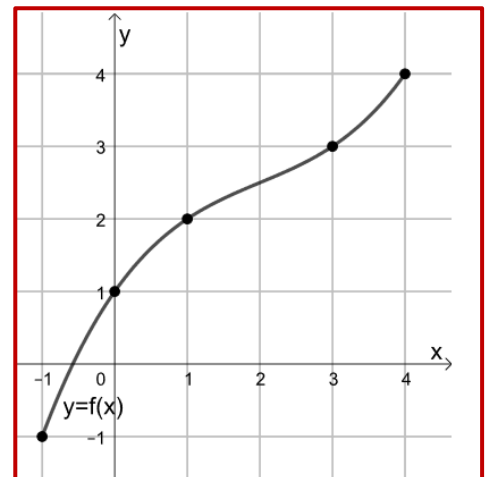
Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [0, 2]$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο $[0, 2]$ (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι:
- Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, 2]$. (Μονάδες 05)
 - Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . (Μονάδες 03)
 - Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες. (Μονάδες 07)

18. ΘΕΜΑ 2/28299

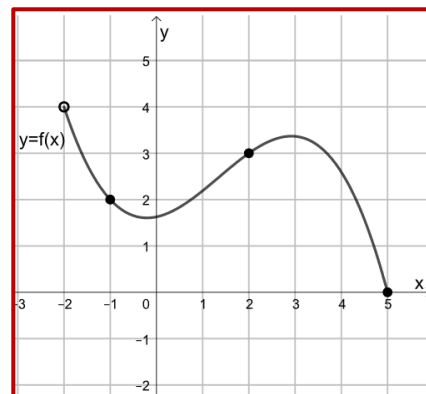
Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = [-1, 4]$ και με γραφική παράσταση C_f που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη C_f :

- α) να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f , (Μονάδες 8)
- β) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$, (Μονάδες 8)
- γ) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} . (Μονάδες 9)

**19. ΘΕΜΑ 2/28300**

Έστω μια συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη γραφική παράσταση της f να βρείτε:

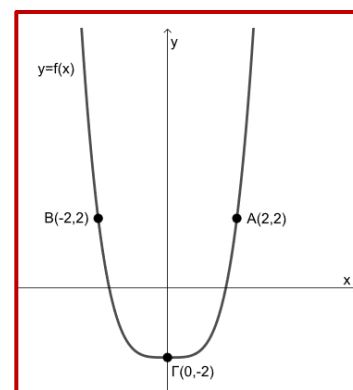
- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f , (Μονάδες 6)
- β) τις τιμές $f(-1)$, $f(2)$ και $f(5)$, (Μονάδες 6)
- γ) το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f , εφόσον υπάρχουν, (Μονάδες 7)
- δ) την τιμή της σύνθεσης $f \circ f$ στο -1 . (Μονάδες 6)



19. ΘΕΜΑ 2/28304

Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, διέρχεται από τα σημεία $A(2, 2)$, $B(-2, 2)$ και $\Gamma(0, -2)$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = |x|$.

- α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(-2)$ και $f(0)$. (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε τις τιμές $(g \circ f)(2)$, $(g \circ f)(-2)$ και $(g \circ f)(0)$. (Μονάδες 8)
- γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται παρακάτω. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g \circ f$. (Μονάδες 9)



20. ΘΕΜΑ 2/29835

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = 2 - x$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 5)
- β) Να αποδείξετε ότι για $x \in (-\infty, 3]$ η $(f \circ g)(x) = \sqrt{3-x} - 1$. (Μονάδες 10)
- γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = (f \circ g)(x)$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφό της. (Μονάδες 10)

21. ΘΕΜΑ 2/29926

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \ln(x-2) + 5$ για κάθε $x > 2$ και $g(x) = 2x-1$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α)
 - i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη. (Μονάδες 6)
 - ii. Να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1} . (Μονάδες 7)
- β)

- i. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)
- ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)

22. ΘΕΜΑ 2/31528

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 14)
- β) Να βρείτε την f^{-1} . (Μονάδες 11)

23. ΘΕΜΑ 2/32695

Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, σύνολο τιμών το $[-\frac{1}{2}, 1)$ και τύπο $f(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt{x+2}}$.

Δίνεται επίσης η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $[-\frac{1}{2}, 1)$, σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και τύπο $g(x) = \left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^2$. Με δεδομένο ότι η συνάρτηση f είναι 1-1,

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f . (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε x που ανήκει στο $[0, 1)$. (Μονάδες 06)
- γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 07)

24. ΘΕΜΑ 2/35170

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ώστε:

$$f(x) = \ln(1 + e^x) \text{ και } g(x) = 2\ln x.$$

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 8)
- β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f + g$. (Μονάδες 8)
- γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f + g$ ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 9)

25. ΘΕΜΑ 2/35171

Δίνονται οι συναρτήσεις g και h ώστε :

$$g(x) = 2\ln x, x > 0 \text{ και } h(x) = \ln(1 + x^2), x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι :
- i. Η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη (Μονάδες 5)
- ii. $g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$, με $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)
- β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ g^{-1}$. (Μονάδες 10)

26. ΘΕΜΑ 2/23196

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1} . (Μονάδες 9)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και της ευθείας $y=x$, η οποία εφάπτεται της C_f στο μοναδικό κοινό τους σημείο, την αρχή των αξόνων. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} . (Μονάδες 9)

