

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΟ ΣΤΟ X_0

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.

- $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 8x + 10)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 3}{2x + 9}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 4}{5x + 8}$
- $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x - 3}{x + 2}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 1 + |x^2 - 1|)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \eta \mu x)$

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^4 - 81}$	2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$
3) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}}$	4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 3x^2 - 4}$
5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$	6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x^2 - 5x}{x^2 - 25}$
7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$	8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x}$
9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$	10) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$
11) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$	12) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^2 + x - 6}$
13) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^4 - 2x^2 + 1}$	14) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{5x^3 - 3\sqrt{2}x^2 - 4x}{x^2 - 2}$
15) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\nu - 1}{x^\mu - 1}, \nu, \mu \in \mathbb{N}^*$	16) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^\nu - \alpha^\nu}{x^\mu - \alpha^\mu}, \nu, \mu \in \mathbb{N}^*$

3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$	2) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 10}{5 - \sqrt{5x}}$
3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}$	4) $\lim_{x \rightarrow 12} \frac{\sqrt{x+4} - 4}{x - 12}$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x} - 1}$	6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x}$
7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}}{5x}$	8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}}{x^2-2x}$
9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-1}$	10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x^2-4}}$
11) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5+x} - 3}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}$	12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{7x-3}}$
13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x+1} - 1}$	14) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$
15) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$	16) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - \sqrt{x} - 2}$
17) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$	18) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - \sqrt{3x+2}}$
19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$	20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$
21) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x - 1}$	22) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x - 3}$
23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}$	24) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 5\sqrt[3]{x} + 4}{x - 1}$
25) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 5\sqrt{x} + 4}{x - 1}$	26) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x\sqrt{x+2} - 3\sqrt{x+2} + 4}{x + 1}$
27) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x+2} + 1}{x - 2}$	28) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - \sqrt{1+x}}{\sqrt{x+1} - 1}$
29) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x+1}}{x}$	30) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt{x+3} + 1}{x - 6}$

4. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 7 x }{x^2 - 7 x }$	2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ x-2 }{x-2}$
3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ x+3 - x-3 }{x^2 - 2x}$	4) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{ x \cdot x - 2}{ x ^4 - 4}$
5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ x \cdot x - 4}{ x ^4 - 16}$	6) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ x+2 \cdot 3x+6 }{ x^2 - 4 }$

7) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{ x - 1}$	8) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{ x^2 - 2x + x^2 - 4}$
9) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 7x + 10 + x - 2 }{x - 2}$	10) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 7x + 10 + x - 2 }{x - 2}$

5. Έστω $f(x) = \frac{|x-3| \cdot (3-x) + 3(x-3)^2}{|x-3| + x^2 - 3x}$. Να βρεθούν τα : $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

6. Έστω $f(x) = \begin{cases} 5x - 4, & x \geq 1 \\ x^2 + 1, & x < 1 \end{cases}$. Να βρεθούν τα : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

7. Έστω $f(x) = \begin{cases} x^2 - \kappa x + \lambda, & x < 4 \\ \frac{\kappa x^2 + \lambda x - 4(\kappa x + \lambda)}{x - 4}, & x > 4 \end{cases}$. Να βρεθούν τα κ, λ (πραγματικοί αριθμοί) ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 7\kappa - \lambda.$$

8. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}$	2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{2x}$
3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\eta\mu 10x}$	4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{\eta\mu 2x}$
5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi x}{x}$	6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi 4x}{x}$
7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi 4x}{6x}$	8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi \kappa x}{\varepsilon\phi \lambda x}, \kappa, \lambda \neq 0$
9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \kappa x}{\eta\mu \lambda x}, \kappa, \lambda \neq 0$	10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\phi \kappa x}{\sigma\phi \lambda x}, \kappa, \lambda \neq 0$
11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x^3}{x}$	12) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x - \alpha}{\varepsilon\phi(x - \alpha)}$
13) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\eta\mu(x-5)}{x-5}$	14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$ (συζυγή αριθμητική)

9. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax + 2, & x \in (-1, 0) \\ x^2 - ax + 3a, & x \in [0, 2) \\ ax^2 + \beta x + \gamma, & x \in [2, 6) \end{cases}$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί a, β, γ ,

ώστε η συνάρτηση να έχει όριο στα σημεία αλλαγής κλάδου και η γραφική παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(3, 1)$.

10. Να βρεθούν τα a, β (πραγματικοί αριθμοί) ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{ax + \beta - 1}{x - 1}, & x < 1 \\ \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$ να έχει

όριο στο x_0 .

11. Αν $\lim_{x \rightarrow -1} [2f(x) + 3x^2 - 2x + 1] = 7$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

12. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \lambda}{x} = \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda$.

13. Αν $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{x^2 + 3x + 2} = 3$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)}$.

14. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$, $a \in \mathbb{R}_+$

15. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς να δείξετε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^\nu + \beta x^\mu + \gamma}{x-1} = \nu\alpha + \mu\beta, \nu, \mu \in \mathbb{N}^*$$

16. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει: $x - x^2 \leq f(x) \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

1) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$

2) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

17. Έστω συναρτήσεις f, g με $|f(x) - g(x)| \leq x^2 \cdot |g(x)|$ σε περιοχή του μηδενός. Αν ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}, \text{ να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda$$

18. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\eta\mu^2 x + \eta\mu x - 1}{2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 1}$	2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}}{\eta\mu x - \eta\mu \frac{\pi}{4}}$ (συζυγή αριθμητή και παρανομαστή)
3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{x^2}$	4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\eta\mu x + 4} - \eta\mu x - 2}{2x}$
5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - \eta\mu x} - 1}{x}$	6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^3 x}{x \cdot \eta\mu 2x}$ (την ταυτότητα και μετά επί $1 + \sigma\upsilon\nu x$ πάνω - κάτω)	8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \eta\mu x) \cdot (1 - \eta\mu^2 x)(1 - \eta\mu^3 x)}{\sigma\upsilon\nu^6 x}$ (το $\sigma\upsilon\nu^6 x$ το γράφουμε $\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$)

19. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{1+x} - 1}$.

20. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x} - 2}$.

21. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x} - 6}{x - 8}$.

22. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - |x-1| - 3}{x - 2}$.

23. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x \cdot \psi) = f(x) + f(\psi) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1. \text{ Να υπολογιστεί το } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot f(2) - 2f(x)}{x-2}. \quad (\text{Υποδ: θέτω } x = 2u).$$

24. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x + \psi) = f(x) + f(\psi) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1821. \text{ Να υπολογιστεί το } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}.$$

25. Με δεδομένο ότι $e^x \geq x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι $e^x \geq 1 + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (πόρισμα 2.12.11). Θέτοντας $-x$ αντί x , παίρνουμε $e^{-x} \geq 1 - x$. Αν $x < 1$, τότε η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

Επομένως, $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$, για κάθε $x < 1$.

Αν $x \in (0, 1)$, τότε $1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x}$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1$, έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Αν $x < 0$, τότε $1 \geq \frac{e^x - 1}{x} \geq \frac{1}{1-x}$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1$, έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Εφόσον τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα, προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

26. Με δεδομένο ότι $\ln x \leq x - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

27. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}}$.

28. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{1 - \eta \mu x}$.

29. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$. Να υπολογιστούν τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x}$

β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{2x-2}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(\sqrt{x}-2)}{x-4}$

δ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{3x + 2f(x)}$

Υποδ: α) θέτω $3x = \omega$,

β) $x-1 = u$,

γ) $\sqrt{x} - 2 = h$,

δ) διαιρώ αριθμητή, παρανομαστή με x

30. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$. Να

υπολογιστούν τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(g(x))}{g(x)}$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 1} g\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x) + f(3x) + f(4x) + 2x}{5x}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 1} (3 \cdot g(\sqrt{x} + 1))$$

Υποδ: α) θέτω $g(x)=\omega$, β) θέτω $\frac{f(x)}{x}=h$, γ) σπάω το κλάσμα, δ) $\sqrt{x} + 1 = u$

31. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x^3 - x^2} = 1$. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x - 1}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5x + 3}{\sqrt{x} - 1}$$

Υποδ: θέτω $g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x^3 - x^2}$ και λύνω ως προς $f(x)$

32. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $f^2(x) - 2x^2 \cdot f(x) \leq -x^4 + x^2 - 2x + 1$ για όλα τα x . Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ αν υπάρχει.

Υποδ: στο πρώτο μέλος το $-X^4$ και έχω ταυτότητα στο πρώτο μέλος και ταυτότητα στο δεύτερο, διώχνω τα τετράγωνα και βάζω απόλυτες τιμές, μετά φτιάχνω την διπλή ανίσωση και τέλος κριτήριο παρεμβολής.

33. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $f^2(x) - 2x^2 \cdot f(x) \leq -x^4 + x^2 - 2x + 1$ για όλα τα x . Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lambda$, να βρεθεί το λ .

Υποδ: παίρνω όρια και στα δυο μέλη και έχω $\lambda^2 - 2\lambda + 1 \leq 0$ άρα $\lambda = 0$

(κοιτάχτε τη διαφορά στη διατύπωση από την προηγούμενη άσκηση και τον διαφορετικό τρόπο λύσης)

34. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $2x^2 \leq f(x) \leq x^4 + 1$

α. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

β. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f^2(x) - 3| - 3f(x) + 5}{2 - f(x)}$

Υποδ: α) παίρνω όρια και στα δυο μέλη β) βγάζω την απόλυτη τιμή, γιατί είναι θετικό το μέσα, κάνω παραγοντοποίηση και απλοποίηση.

35. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $f^3(x) + x^2 f(x) = 2(\sin x - 1)^3 + 2x^3$ για

όλα τα x , ακόμα ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \mu$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda$

α. Να δείξετε ότι $\mu = 0$

β. Να δείξετε ότι $\lambda = 1$

γ. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot f(1 - \sin^2 x)}{x^2}$

δ. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{\sqrt{x}}$

Υποδ: α) παίρνω όρια και στα δυο μέλη, β) διαιρώ με το x^3 και παίρνω όρια και στα δυο μέλη
 γ) πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με το $1 - \sin^2 x$
 δ) πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με το $f(x)$ με το $f(x)$

36. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu 2x}{x + \eta\mu x} = 2$ για όλα τα x .

α. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

β. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x^2}{x} = 2$

γ. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) + \eta\mu^2 x}{\sqrt{x+1} - 1}$

δ. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(f(\sin x) - \sin^2 x) \cdot \sin x}{x^2}$

Υποδ: α) θέτω $g(x) = \frac{f(x) + \eta\mu 2x}{x + \eta\mu x}$ και λύνω ως προς $f(x)$,

β) αντικαθιστώ όπου $f(x)$ αυτό που βρήκα,

γ) αντικαθιστώ το $\eta\mu^2 x$ με $\eta\mu^2 x = -\eta\mu^2 x + 2\eta\mu^2 x$, σπάω το κλάσμα, στο πρώτο κλάσμα πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με το $\eta\mu x$ και χρησιμοποιώ το 2) ερώτημα.

δ) πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με το $\sin x$, το σπάω σε δυο όρια, στο πρώτο θέτω $\sin x = u$ και στο άλλο αντικατάσταση.

Μη πεπερασμένο όριο στο x_0

1. Να υπολογιστούν τα όρια:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$	2) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x+1}{(x+2)^3}$
3) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{9}^-} \frac{2}{9x-1}$	4) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2}{ x-5 }$
5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1821}{ x^2-5x+4 }$	6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{ x^2-5x }$
7) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x-2}{ x-4 \cdot (2x+1)}$	8) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x-2}{x^2+8x+16}$
9) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{\sqrt{x+2}-2}$	10) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-2}{x^3+x^2-x+2}$

2. Να υπολογιστούν τα όρια:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x+1}{(x-1)^2}$	2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2-x-1}{ x-2 }$
3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^5-1}{x-1}$	4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$
5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+7x+5}{x^3-2x^2+x}$	6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x-1)^6}$
7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x-1)^5}$	8) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x^2+3x+2}{x-1}$

3. Να υπολογιστούν τα όρια:

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\eta\mu x}$	2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$
3) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2}{\eta\mu x}$	4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\eta\mu x}$
5) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{2}{\eta\mu x}$	6) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$
7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\phi x$	8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\phi x$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\eta\mu^3 x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-4}{1-\sigma\upsilon\nu x}$$

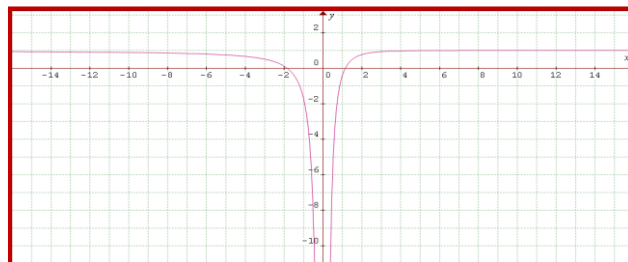
4. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ αν ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-5}{f(x)} = +\infty$$

5. Με δεδομένο ότι ισχύει $e^x \geq x+1, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\text{να υπολογίσετε το όριο } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 2}{e^x - x - 1}.$$

Υποδ: αντικατάσταση όπου x το 0



6. Με δεδομένο ότι $\ln x \leq x-1, \forall x \in \mathbb{R}_+$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + x - 3}{\ln x - x + 1}$.

7. Να βρεθεί το λ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + \lambda}{x}$.

8. Να υπολογιστεί το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x \cdot \eta\mu x}$

Υποδ: $-\infty$ γιατί $x \cdot \eta\mu x > 0$

9. Για τις διάφορες τιμές του λ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - \lambda}{(x-3)^2}$.

10. Για τις διάφορες τιμές του λ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - \lambda}{(x-9)^2}$.

11. Έστω $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και το όριο της καθώς το x τείνει στο -2 (Πανελλήνιες 1981).

12. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

13. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2-|x|}{f(x)} = -\infty$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

14. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x - 1} = 1$. Να υπολογιστούν τα

$$\text{όρια: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{[f(x) - 2]^2}$$

15. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{f(x) + 2} = +\infty$. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

16. Έστω συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει: $f^3(x) + f(x) = x - 1$ για όλα τα x του πεδίου ορισμού.

α. Να δείξετε ότι: $0 < f(x) < x - 1$

β. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

γ. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$

δ. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(e^x - e + 1)}$

Υποδ: α) $0 \leq f(x) = \frac{x-1}{f^2(x)+1} \leq x-1$ γιατί $x-1 > 0$ και $f^2(x)+1 > 1$

δ) θέτω $e^x - e + 1 = u$

17. Έστω $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{e^{\eta\mu x}}{e^x} - 1$

α. Να δείξετε ότι $f(x) < 0$

β. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

γ. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$

18. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} - \{\pm 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x \cdot f(x) + 2g(x)) = 3$

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2 \cdot f(x) + x \cdot g(x)) = 2$

α. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

β. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$

γ. Να αποδειχτεί ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)} = -1$

Υποδ: θέτω $\varphi(x) = x \cdot f(x) + 2g(x)$ και $h(x) = 2 \cdot f(x) + x \cdot g(x)$, λύνω το σύστημα ως προς $f(x)$ και $g(x)$ και υπολογίζω τα όρια

18.

α. Να δείξετε ότι $-1 < \frac{\eta\mu x}{x} < 1$ για $x \neq 0$

β. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta\mu x}{x^2 - \eta\mu^2 x}$

γ. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{1 - \frac{\eta\mu x}{x}}$

δ. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \eta\mu x}{x^3 - \eta\mu^3 x}$

19. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x)}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = +\infty$. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Υποδ: θέτω $\frac{x \cdot f(x)}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = g(x)$ και λύνω ως προς $f(x)$ και πολλαπλασιάζω πάνω, κάτω με $1 + \sigma\upsilon\nu x$

20. Έστω $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > \frac{2}{x-2}$

α. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

β. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - 3 \cdot f(x)}{x - f(x)}$

γ. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x) - x|}{f(x) - 2}$

δ. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^3(x) + f^2(x) + 1}{2f^3(x) - f(x) + x}$

21. Έστω $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $(x^2 - 1)f(x) > 1$

α. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

β. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7f^2(x) + f(x) - x}{2f^2(x) + 2x^2}$

Όριο συνάρτησης στο άπειρο

1. Έστω $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 3x - 1}{x^2 + 4}$	2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 11}{x^2 + 1}$
3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - x + 5}{2x^2 + 1}$	4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 5}{x^4 + 45}$
5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4}{x^3 - 1} - \frac{x^3}{x^2 + x + 1} \right)$	6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+4)}{(x+10)^4}$
7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x}}{5x + 3\sqrt{x}}$	8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$
9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 12x + 36}$	10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 12x + 36}$
11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1}}{3x - 2}$	12) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 9x - 2x})$	2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x)$
3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4} + x)$	4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x(x+10)}$
5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{(x+2)^2} - x + 1)$	6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3})$
7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$	8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}})$
9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}}$	10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4} + x$

4. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-|x-3| + 2x}{x-1}$
5. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - x| + 3x - 2}{2x^2}$
6. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-5| + |x-3|}{|2x-3|}$
7. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - x| + 3x - 2}{2x^2 + 3}$
8. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2 + 2}$ (Υπ: (κριτήριο παρεμβολής)

9. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x + 3}{x^3 + 1}$

10. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$ (Υπ: θέτω $u=1/x$)

11. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - \eta\mu x}{x^3 + \sigma\upsilon\nu x}$ (Υπ: (κοινό παράγοντα το x^3 μετά κριτήριο παρεμβολής)

12. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x + 3x\eta\mu x}{2x^2 + 1}$

13. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{3 + \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}$

14. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \left(\frac{2x - 1}{x^2 + 2} \right)$

15. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi x^2 + x}{x^2 + 1} \right)$

16. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x\eta\mu x + 1}{\sqrt{x^4 - 2}}$

17. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \eta\mu x - \sqrt{3x^4 + 1}}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sqrt{x^4 + 2}}$

18. Να βρείτε για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ το $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\lambda - 2)x^2 + 3x + 7]$

19. Να βρείτε για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ το $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^3 + \lambda x^2 + 3x + \lambda]$

20. Να βρείτε για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda - 1)x^3 + 3x - \lambda}{(\lambda - 3)x^3 + x^2}$

21. Να βρείτε για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda + 1)x^5 + (1 - \lambda)x - 2}{(\lambda - 2)x^5 + x^2 - x}$

22. Να βρείτε για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \lambda x$

23. Έστω $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4} - \alpha x$, να βρεθεί το α ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ και κατόπιν να βρεθεί η τιμή του.

24. Να βρεθούν τα α, β , ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + \alpha x + \beta) = 0$

25. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + e^x + 2^x}{4 + 3^x + 4^x}$

(Υπ: αντικατάσταση)

26. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^{x+2}}{2^{x+2} + 3^x}$

(Υπ: κοινό παράγοντα το 3^x)

27. Να υπολογιστούν τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 5^x}{3^x - 5^x}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 5^x}{3^x - 5^x}$

28. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^x - \left(\frac{1}{4} \right)^x \right]$

29. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x + 2x}{\eta\mu x - 3x}$ και το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x + 2\ln x}{\eta\mu x - 3\ln x}$.

Υποδ: για το πρώτο, διαιρώ αριθμητή – παρανομαστή με το x και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$ (μηδενικές επί φραγμένες),
για το δεύτερο διαιρώ με το $\ln x$ όλα τα άλλα τα ίδια.

30. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ και το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$.

Υποδ: για το πρώτο, θεω $u=1/x$, για το δεύτερο μηδενική επί φραγμένη.

31. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \eta\mu x$

Υποδ: μηδενική επί φραγμένη

32. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \eta\mu^2 x}{x + 3}$

Υποδ: κοινό παράγοντα το x

33. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(2 + \eta\mu^2 x)$

Υποδ: $x(2 + \eta\mu^2 x) \leq 3x$, όμως το $3x$ τείνει στο $-\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(2 + \eta\mu^2 x) = -\infty$

34. Να υπολογίσετε για τις διάφορες τιμές του λ το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^x + 3^x + e^x}{3^x + e^x}$

(Υπ: περιπτώσεις για $\lambda < 3$, $\lambda > 3$, $\lambda = 3$)

35. Να υπολογιστούν τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{3^x}$

β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{\ln x}$

γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{e^x}$

Υποδ: μηδενική επί φραγμένη

36. Να υπολογιστούν τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x^2+2x}}}{e^{\sqrt{x^2+3}}}$

β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\sqrt{x^2+1}} - e^{\sqrt{x^2+2}} \right)$

γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x^2 + 2x) - \ln(x^2 + 1) \right)$

37. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}{x^2 - 2x}$

Υποδ: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}{x(x-2)} \stackrel{u=x-2}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ u \rightarrow 0}} \frac{\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{2} \cdot u\right)}{u \cdot (u+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right)}{u \cdot (u+2)}$
 $= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} u \cdot (u+2)} = -\frac{\pi}{4}$

38. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ Να δείξετε ότι :

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(e^x) = -1$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} f(\ln x) = 2$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(f(x)) = +\infty$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 1} e^{f(x)} = 0$$

Υποδ: α) θέτω $e^x = u$ β) θέτω $\ln x = u$ γ) αντικατάσταση την $f(x)$ με τον τύπο της δ) ομοίως

$$39. \text{Έστω ότι ισχύει } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{f(x)} = 2$$

Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$$

Υποδ: α) και β) θέτω $\frac{\ln x}{f(x)} = g(x)$ και λύνω ως προς $f(x)$ γ) μηδενική επί φραγμένη.

$$40. \text{Έστω } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \text{ και } f \text{ γνησίως φθίνουσα ώστε να ισχύει: } f(x) \geq x + 1$$

$$\alpha. \text{ Να δείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\beta. \text{ Να δείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = -\infty$$

$$\gamma. \text{ Να δείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$$\delta. \text{ Να δείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

$$41. \text{Έστω } f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ ώστε να ισχύει: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1}{f(x)} = 0 \text{ και } f(x) > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

$$\alpha. \text{ Να δείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\beta. \text{ Να υπολογιστεί το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{f^2(x) + 1} - f(x) \right)$$

$$\gamma. \text{ Να υπολογιστεί το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(f(x))}{x^2}$$

$$\delta. \text{ Να υπολογιστεί το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)} + 2}{e^{f(x)} + 4}$$

$$42. \text{Έστω συνάρτηση } f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ τέτοια ώστε να ισχύει: } x^4 \cdot f(x) > 2 \text{ για όλα τα } x \text{ του πεδίου ορισμού. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:}$$

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

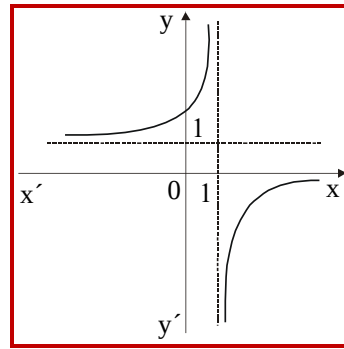
$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8f^3(x) + 3f^2(x) + 2f(x) + 1}{8 + 2f(x) + 3f^2(x) + 4f^3(x)}$$

43. ** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

β) Τι συμπεραίνετε για το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$;



44. ** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 2)x^3 + (\mu + 1)x + 1}{\mu x^2 + 1}, \text{ αν } \mu \in \mathbb{R}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \lambda x - \mu), \text{ αν } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x}{\alpha^x + 1}, \text{ αν } \alpha > 0$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x + 2^{x+1}}{\alpha^{x+1} + 2^x}, \text{ αν } \alpha > 0$

45. ** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \eta \mu \frac{1}{x})$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \eta \mu \frac{1}{x})$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \eta \mu^p \frac{1}{x})$ με $p \in \mathbb{N}^*$ και $p \geq 2$

46. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ell n \left(\frac{x^2 + \kappa^2}{x} \right), \kappa > 0$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) Να δείξετε ότι η $f(x) - \ell n x > 0$ και να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ell n x)$.