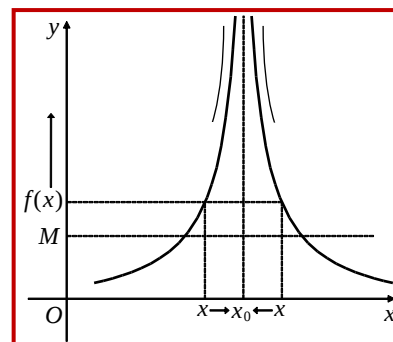
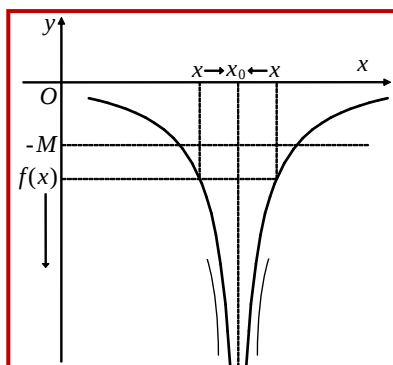


1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

- Έστω συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R}$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι καθώς το x πλησιάζει το x_0 με οποιοδήποτε τρόπο, (από τα αριστερά και από τα δεξιά), οι τιμές $f(x)$ αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από κάθε θετικό πραγματικό αριθμό M . Σε κάθε τέτοια περίπτωση θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο το $+\infty$ και θα γράφουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.



- Έστω συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R}$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι καθώς το x πλησιάζει το x_0 (από τα αριστερά και από τα δεξιά) οι τιμές $f(x)$ ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από κάθε αρνητικό πραγματικό αριθμό $-M$ ($M > 0$). Σε κάθε τέτοια περίπτωση θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο το $-\infty$ και θα γράφουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.



- Για τις συναρτήσεις, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} \text{➤ } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \\ \text{➤ } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

Ιδιότητες

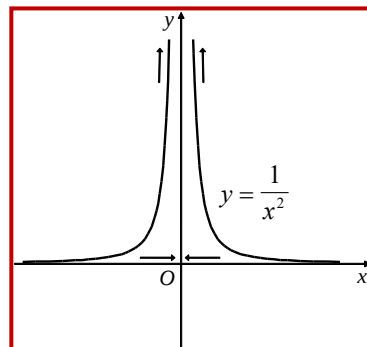
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$, ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.

•

Με την βοήθεια των παραπάνω ιδιοτήτων προκύπτει:

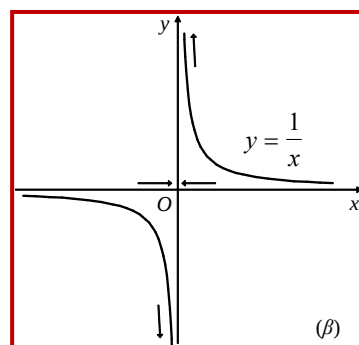
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty$, $v \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty$, $v \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty$, $v \in \mathbb{N}$



Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της

$$f(x) = \frac{1}{x^{2v+1}}, \quad v \in \mathbb{N} \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty.$$



- Για τα όρια του αθροίσματος δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$						
το όριο της f είναι:	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f + g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

- Για τα όρια του γινομένου δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$,										
το όριο της f είναι:	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Παρατήρηση

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**.

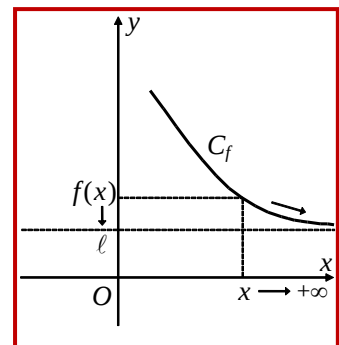
Αυτές είναι

- $(+\infty) + (-\infty)$
- $0 \cdot (\pm\infty)$.
- $(+\infty) - (+\infty)$
- $(-\infty) - (-\infty)$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

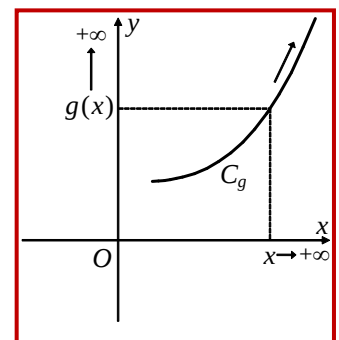
1.7 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

- Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το $f(x)$ προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ . Σε κάθε τέτοια περίπτωση γράφουμε:

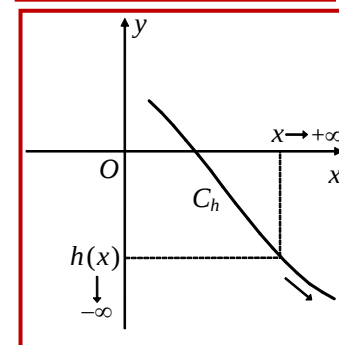
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$



- Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το $g(x)$ αυξάνεται απεριόριστα. Σε κάθε τέτοια περίπτωση γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$



- Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης h , παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το $h(x)$ ελαττώνεται απεριόριστα. Σε κάθε τέτοια περίπτωση γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$



Παρατήρηση:

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν, όταν $x \rightarrow -\infty$ για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.

Βασικά όρια:

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0, \quad v \in \mathbb{N}^*.$$

➤

Όριο πολωνυμικής συνάρτησης

Για την πολωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0$, με $\alpha_v \neq 0$ ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_v x^v)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_v x^v)$$

Όριο ρητής συνάρτησης

Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_v \neq 0$, $\beta_k \neq 0$ ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_k x^k} \right)$$

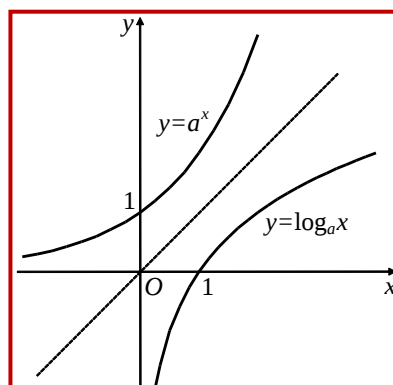
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_k x^k} \right)$$

Όρια εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης

Αποδεικνύεται ότι

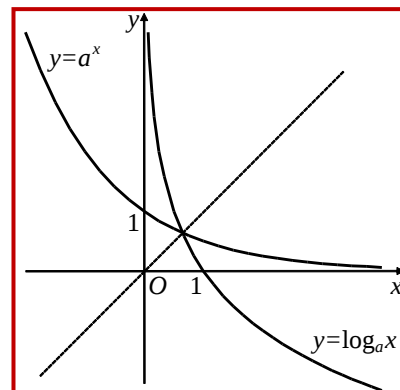
- Αν $a > 1$, τότε

$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0,$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$



- Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\alpha} x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = -\infty$



- Επίσης ισχύουν :

$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$	$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$
---	---

Πεπερασμένο όριο ακολουθίας

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$

Ορισμός

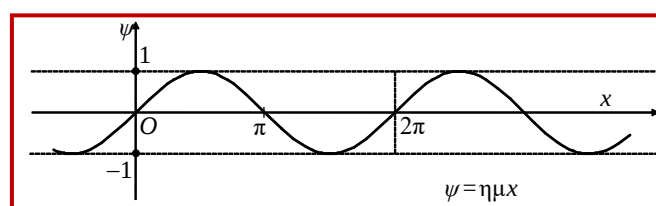
Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_n) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει $|\alpha_n - \ell| < \varepsilon$.

Παρατήρηση

Για τις ακολουθίες ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων των συναρτήσεων όταν $x \rightarrow +\infty$, που μελετήσαμε προηγουμένως.

Παρατηρήσεις

- Οι γνωστές ιδιότητες των ορίων ισχύουν και για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ με την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.
- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\epsilon\phi x$, $\sigma\phi x$ δεν έχουν όριο στο $+\infty$ και στο $-\infty$. Π.χ: $f(x) = \eta\mu x$



- Για να βρούμε το όριο στο $\pm\infty$ μιας πολωνυμικής ή ρητής συνάρτησης απομονώνουμε τους μεγιστοβάθμιους όρους και βρίσκουμε το όριο τους.
- Για να υπολογίσουμε όρια στο $\pm\infty$ που περιέχουν παραστάσεις με ριζικά $\sqrt[n]{f(x)} \pm g(x)$ ή $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[m]{g(x)}$ εργαζόμαστε ως εξής :
 - 1) Σε κάθε υπόριζο βγάζουμε κοινό παράγοντα τη μεγαλύτερη δύναμη του x
 - 2) Χωρίζουμε τις ρίζες.
 - 3) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x .

(Αν κατά τη διαδικασία εμφανιστεί απροσδιοριστία της μορφής $0 \cdot (\pm\infty)$, τότε στο αρχικό όριο πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση)

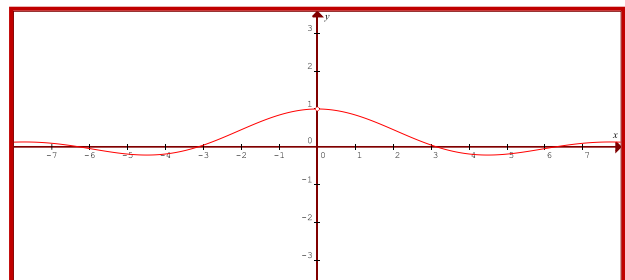
- Αν μέσα στο όριο υπάρχουν απόλυτες τιμές $|f(x)|$ τότε υπολογίζω ξεχωριστά το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)|$. Αν είναι θετικό τότε $f(x) > 0$, ενώ αν είναι αρνητικό τότε $f(x) < 0$. Έτσι θα απαλλαχτούμε από τις απόλυτες τιμές και υπολογίζουμε κανονικά το όριο.
- Επειδή τα $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta\mu x$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$ δεν υπάρχουν. Αν σε κάποιο όριο παρουσιάζονται οι όροι $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$, τότε διαιρούμε τους όρους αυτούς με κάποια θετική δύναμη του x , ώστε χρησιμοποιώντας το κριτήριο παρεμβολής να τους μηδενίσουμε. π.χ: Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + 3x}{x + 5}$. **Λύση:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + 3x}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\eta\mu x}{x} + 3}{1 + \frac{5}{x}} \stackrel{\frac{0+3}{1+0}}{=} 3 \quad \text{γιατί:} \quad \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|} \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}.$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|} = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$$

- Όταν θέλουμε να βρούμε το όριο στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ μιας παράστασης με εκθετικά 2^x , 3^x , e^x κ.λ.π τότε βγάζουμε κοινό παράγοντα αυτή με τη μεγαλύτερη βάση αν $x \rightarrow +\infty$, ενώ αν $x \rightarrow -\infty$ βγάζουμε κοινό παράγοντα την εκθετική με τη μικρότερη βάση.
- Υπάρχουν συναρτήσεις των οποίων το όριο, όταν το $x \rightarrow +\infty$, υπάρχει αλλά οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι μονότονες.

$$\text{Π.χ: } f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$$



- Τις παρακάτω προτάσεις μπορούμε να τις χρησιμοποιούμε αναπόδεικτα.
Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

➤ Αν ισχύουν: α) $f(x) \leq g(x)$, κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

➤ Αν ισχύουν: α) $f(x) \leq g(x)$, κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

π.χ: Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \eta\mu \frac{1}{x^2} \right)$. **Πράγματι:**

Για $x \neq 0$ έχουμε: $\eta\mu \frac{1}{x^2} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\eta\mu \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} - 1 \leq \frac{1}{x^2} - \eta\mu \frac{1}{x^2}$. Όμως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) = +\infty \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \eta\mu \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$